HITP

数学奥林匹克系列

2006·第一辑

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰 主编

《数学奥林匹克与数学文化》是数学竞赛与数学文化方面的系列专业文集。本文集旨在为从事数学竞赛的师生与从事数学文化研究与传播的专业人员提供深度阅读，搭建表达平台，促进海内外华人同业人士的学术交流与合作，推动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社

HITP

数学奥林匹克系列

2006 · 第一辑

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰　主编

哈尔滨工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克与数学文化.第1卷/刘培杰主编.
哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.6
ISBN 7-5603-2341-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学课-中学-竞赛题-研究
Ⅳ.G634.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第026851号

策划编辑　刘培杰　责任编辑　康云霞　杨明蕾
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张31.5　字数565千字
版　　次　2006年6月第1版　2006年6月第1次印刷
印　　数　1-3 000册
定　　价　48.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

2006·第一辑

目　录　CONTENTS

特稿　Special Features

1　莎士比亚新诗真伪之鉴定

研究札记　Reading Notes

9　几个多项式问题

初中数学竞赛试题研究　Research on Test Questions of Junior High School Mathematics Competition

18　初中竞赛题与Edgar问题

希望杯数学竞赛试题研究　Research on Test Questions of "The Hope Cup" Mathematics Competition

26　从希望杯竞赛试题到约当不等式

全国高中数学联赛试题研究　Research on Test Questions of National High School League Matches

32　从全国高中数学联赛试题谈反向不等式

CMO 试题研究 Research on CMO Test

54 一道冬令营试题与 Rudin 不等式

IMO 试题研究 Research on IMO Test

61 一道 IMO 试题与希尔伯特问题
72 一道 IMO 试题与 Siegel 引理
78 关于一道候选试题的注记

对话 Dialogue

79 等分布数列问题
93 关于 Thue-Siegel-Roth 定理

USAMO 试题研究 Research on Test Questions of USAMO

108 一道 USAMO 的积分证法
110 Möbius 问题
116 雅致问题
123 一道 USAMO 试题与 Vandermonde 行列式

Putnam 试题研究 Research on Test Questions of Putnam

133 关于一道 Putnam 数学竞赛试题的背景
135 从 Putnam 试题谈 Catalan 猜想
152 从一道 Putnam 赛题到闵可夫斯基定理
179 从一道 Putnam 试题谈数论中的同余数问题

环球城市数学竞赛试题研究 Research on Test Questions of Globe Cities Mathematics Competition

192 磨光变换与双随机方阵

综述 Summary

211 Bernstein 多项式与 Bézier 曲线
237 Beatty 定理与 Lambek-Moser 定理
296 数的 Fibonacci 表示
326 Erdös-Ginzburg-Ziv 问题

培训试题背景研究 Background Research on Training Test Questions

338 关于几道培训题的高等背景
360 一道高中数学竞赛培训题与 Carleson 不等式

高考数学试题研究 Research on College Entrance Test

367 Shannon 信息论与 2005 年高考试题

解题方法 Problems Solving Mode

377 利用函数迭代构造技巧方程组

海外特稿 Overseas Features

386 Riemann 猜想漫谈(一)

史海钩沉 Research on the Competition in the Past

390 我国之三分角家及方圆家
405 前苏联一次数学竞赛活动纪实
407 介绍匈牙利施外则米克拉司数学竞赛

学生习作 Works From Students

410 二〇〇五年全国高中数学联合竞赛加试第三题解答

新书文摘 Digest of New Books

413 费马——孤独的法官

探索 Discovery

420 平面组合几何问题探索

数学与计算机 Mathematics and Computer

438 Some New Development on the Length of Golomb Ruler

数学趣闻 Entertaining Mathematics

446 密码与宝藏

声音 Voice

450 一封读者的来信
452 没有人告诉你是对还是错

试题之窗 The Column of Test Questions

469 二〇〇五年全国高中数学联合竞赛试题及参考答案、评分标准
478 二〇〇五年全国高中数学联合竞赛加试试题及参考答案
482 二〇〇五年黑龙江省全国高中数学联合竞赛预赛试题及部分答案、评分标准
490 二〇〇五年河南省数学竞赛试题及参考答案(高中二年级)

莎士比亚新诗真伪之鉴定

黄文璋①

1985年11月14日，英国及美国的报纸及杂志争相报导研究莎士比亚(Shakespeare，1564—1616，英国剧作家及诗人)的美国学者Gary Taylor，在英国牛津大学(Oxford University)的Bodleian图书馆(是英国历史最悠久、最重要，且藏书只供参考概不外借的图书馆之一，现有馆藏420余万册印刷本及5万余册手稿本)的一本自1755年起收藏的书中，找到一首很可能是莎士比亚的抒情诗(见Lelyveld(1985)及Taylor(1985))．该诗的第二抄本稍后在美国耶鲁大学(Yale University)的图书馆出现．我们姑且先称这首诗为泰勒诗(Taylor poem)．如果能证实泰勒诗确为莎士比亚所作，则这将是17世纪以来，莎士比亚作品最重要的一次发现．英美学者为了这首诗之真伪争论不休，大打笔战．只是不少专家认为这首泰勒诗不论在用字遣词与韵味风格上，都迥异于莎士比亚其他的作品．有趣的是，统计学者也介入这场纷争．1986年1月24日出版的Science杂志，刊登了一篇“莎士比亚的新诗——向统计学礼赞”(Shakespeare's new poem: an ode to statistics)，介绍著名的统计学者，美国斯坦福大学(Stanford University)的Efom教授及芝加哥大学(University of Chicago)的Thisted教授，如何以统计的方法鉴定这首新出土的泰勒诗，是否为莎士比亚所作．

早在1976年，Efom和Thisted便把莎士比亚作品中所用的字作了一番统计分析．他们想回答若发现了一新的作品，如何经由统计分析(statistical analysis)其中所用的字，以判断此作品是否为莎士比亚所作这一问题．他们当初作此分析只是为了好玩，没想到10年后真派上了用场．

这并非统计学家第一次协助解决文学上的问题．而由于统计分析是如此的具说服力，因此往往能使一些文学上长期的争论迅速地平息．例如，哈佛大学(Harvard University)的Mosteller及Wallace利用统计方法，判定The Federalist Pa-

① 中国台湾高雄大学，应用数学教授兼副校长，美国普渡大学统计博士．

pers 的作者为 James Madison，而非 Alexander Hamiliton. 在 19 世纪 50 年代，著名的英国统计学者 David Cox 及文学家 L. Brandwood 也曾利用统计方法，以解决争论长达 1 000 年的关于柏拉图(Plato，约公元前 428—347 年)众多作品的先后顺序问题. 柏拉图为古希腊三大哲学家之一，和苏格拉底(Socrates，约公元前 470—399 年)及亚里士多德(Aristotle，公元前 384—322 年)，共同奠定西方文化的哲学基础. 柏拉图本来对民主抱着希望，但在苏格拉底被判死刑后，他终于认清一个有良知的人，在活跃的政治中是无容身之处的(There is no place for a man of conscience in active politics)，颇令人深省.

虽然利用统计方法来解答文学上的问题之想法并非创新，Efom 与 Thisted 所采用的特别方法却不曾在这方面用过. 此方法可追溯至 19 世纪 40 年代，那时生物学家 Williams 向英国统计学家费雪(R. A. Fisher，1890—1962，现代统计学的奠基者，其生平事迹可参考 Gower(1990/91))，提出一个似乎不可能回答的问题. Williams 曾前往马来西亚采集蝴蝶，他把自己共见过几种(species)蝴蝶，以及每种各见过的次数(有些见过几十次，有些见过几次，有些只见过一次)，都告诉费雪. Williams 想知道在马来西亚的蝴蝶中，他没见过的究竟有多少?

一般人会觉得此问题毫无头绪，不可能解答. 但统计学家却有办法估计尚有几种蝴蝶还未被捕捉到. 只要假设蝴蝶是依照每一种之只数的比例，随机地(randomly)被捕捉. 而这只要假设每一件事(包括蝴蝶的分布，捕捉的技术等)随时都很均匀，不会先是把某一种蝴蝶捕捉殆尽，之后再大量捕捉另一种. 若有某一种蝴蝶尚未被捕捉到，那纯粹只是运气的关系，而非该种蝴蝶特别会躲藏. 费雪所用方法之细节，由于蛮技术性的，此处无法细说，可参考 Fisher et al. (1943).

Efron 与 Thisted 介入文学是很偶然的. 有一次他们聆听加州大学 Santa Barbara 分校(University of California at Santa Barbara)的 Gani(1924—，著名的应用机率[①]学者，Journal of Applied Probability，Advances in Applied Probability 等重要期刊均为他所创. 他曾到过台湾)的演讲. Gani 的目的是要分析莎士比亚作品的结构. 在演讲中他提到德国 Münster 的 Westfälische Wilhelms Universität 的 Marvin Spevack，已将莎士比亚的所有作品输入计算机中，并已计算出莎士比亚所用过的全部字数，及每一个字使用过的次数，见 Spevack(1968). 听完演讲后，Efom 与 Thisted(那时为 Efron 的学生)决定把费雪所用的方法拿来分析莎士比亚的作品. Efron and Thisted(1976)一文就是他们的研究报告，发表在统计学中极权威的学术期刊 Biometrika.

这一篇文章的题目为：Estimating the number of unseen species：How many

① 机率即概率(编者注).

words did Shakespeare know? 如前所述，在生态学中往往会估计某生物尚未见到的种数，而在该文中，尚未见到的"种"，却是莎士比亚知道但不曾用过的字.

莎士比亚全部作品（以下简称总作品）之总字数为 884 647，其中有 14 376 个相异字只出现一次，4 343 个相异字只出现两次. 表 1（见 Efron and Thisted（1976））列出只出现 100 次的字数. 令 n_x 表示出现 x 次的字数. 当 $x=43$，即列 40+，行 3，其对应的 $n_x=30$，表出现 43 次的字共有 30 个，余类推.

在总作品中，莎士比亚共用了 31 534 个不同的字，即

$$\sum_{x=1}^{\infty} n_x = 31\ 534$$

必须注意的是像"girl"与"girls"乃视为不同的字. 由表 1，出现次数不超过 100 的有 30 688 个字，因此有 846 个字出现的次数超过 100.

Efron 与 Thisted 分别依据 Fisher et al.（1943）所用的参数模式（parametric model）及 Good and Toulmin（1956）所用的非参数模式（nonparametric model），来估计莎士比亚尚认识多少字，所得到的估计值（estimate）都差不多是 11 460，且标准差（standard deviation）小于 150.

表 1　莎士比亚总作品中字出现之频率

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	小计
0+	14 376	4 343	2 292	1 463	1 043	837	638	519	430	364	26 305
10+	305	259	242	223	187	181	179	130	127	128	1 961
20+	104	105	99	112	93	74	83	76	72	63	881
30+	73	47	56	59	53	45	34	49	45	52	513
40+	49	41	30	35	37	21	41	30	28	19	331
50+	25	19	28	27	31	19	19	22	23	14	227
60+	30	19	21	18	15	10	15	14	11	16	169
70+	13	12	10	16	18	11	8	15	12	7	122
80+	13	12	11	8	10	11	7	12	9	8	101
90+	4	7	6	7	10	10	15	7	7	5	78

事实上在 Efron and Thisted（1976）一文中，他们想回答更一般的问题. 他们写着"假设有另一很大量的莎士比亚的作品被发现，譬如说共有 884 647 t 个字，则除了那 31 534 个不同的字外，预期可找到几个新字？"莎士比亚共认识几个字就对应 $t=\infty$ 的情况. 由于自 17 世纪之后，便没有莎士比亚的新作品出现，所以 Efron 与 Thisted 从未想过会有机会真正地以莎士比亚的作品来检验他

们的理论．他们做此研究的动机纯粹是觉得有趣．据 Efron 说"It never possibly occurred to me that we'd have a chance to use it."甚至当他从新闻上获知这首泰勒诗出现，且有可能是莎士比亚所作，他一时并没想到他其实曾与 Thisted 做过这方面的研究．直到 Thisted 提醒他，他才想到 10 年前所做的工作．尘封已久的莎士比亚又浮现在眼前．

这首泰勒诗与总作品相比，相当短，共只有 429 个字．Efron 与 Thisted 基于罕用字(unusual words)出现的频率(frequency of occurrence)，发展出一在统计上算是简单的检定法．有一些字是大家常用的，如"a, is, the"，在每一篇文章中可能都出现不少次．但对罕用字，每个作者使用的习惯可能便不同了．Efron 与 Thisted 指出，在总作品中，罕用字的使用非常普遍，在全部使用的 31 534 个相异字中，有接近 2/3 的比例(共 21 011 个)，只用了不超过 3 次(表 1)．

这首泰勒诗虽只有 429 个字，但其中包含 258 个相异字．令 m_x 表示在泰勒诗中所使用的字，在总作品中出现 x 次的相异字数．表 2 列出 $x=0\sim99$ 的统计．例如，泰勒诗中有 7 个相异字在总作品中只出现过 1 次，即 $m_1=7$，有 5 个相异字在总作品中出现过 23 次，即 $m_{23}=5$，余类推．表 2 中包含 118 个相异字，泰勒诗中另有 140 个相异字在总作品中出现 100 次以上．其中特别值得注意的是 $m_0=9$，此为泰勒诗中不曾在总作品中出现的相异字数．这就是 Efron and Thisted(1976)一文中所要估计的量，在该文中采用的符号为 $\Delta(t)$．

Efron 与 Thisted 将他们的结果整理为 Thisted and Efron(1987)一文，题目就叫"Did Shakespeare write a newly—discovered poem?"表 3 即为他们求出的若泰勒诗真为莎士比亚所作，表 2 中 m_x 之期望值(expectation)之估计值．

表 2　泰勒诗在总作品中出现 x 次的相异字 m_x

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	小计
0+	9	7	5	4	4	2	4	0	2	3	40
10+	1	0	3	0	1	1	1	2	1	0	10
20+	2	2	1	5	3	1	0	2	2	3	21
30+	4	1	1	1	2	1	0	0	3	3	16
40+	1	2	0	0	2	1	1	2	1	1	11
50+	0	1	1	1	1	0	0	1	0	2	7
60+	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	4
70+	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	4
80+	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2
90+	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	3

表 3　表 2 中 m_x 之期望值之估计值 $\hat{\nu}_x$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0+	6.97	4.21	3.33	2.84	2.53	2.43	2.16	2.01	1.87	1.76
10+	1.62	1.50	1.52	1.51	1.36	1.38	1.33	1.28	1.25	1.22
20+	1.18	1.16	1.13	1.11	1.09	1.06	1.04	1.02	1.00	0.98
30+	0.96	0.94	0.93	0.91	0.90	0.88	0.86	0.85	0.83	0.82
40+	0.80	0.79	0.77	0.76	0.75	0.74	0.73	0.72	0.70	0.69
50+	0.68	0.67	0.66	0.65	0.64	0.63	0.62	0.61	0.60	0.59
60+	0.58	0.57	0.56	0.55	0.54	0.53	0.52	0.51	0.50	0.50
70+	0.49	0.48	0.48	0.47	0.47	0.46	0.45	0.45	0.44	0.44
80+	0.43	0.42	0.42	0.41	0.41	0.40	0.39	0.39	0.38	0.38
90+	0.37	0.36	0.36	0.35	0.35	0.34	0.34	0.33	0.32	0.32

由表 3，若此泰勒诗确为莎士比亚所作，则 Efron 与 Thisted 估计其中含有 $\Delta(t)=6.97$ 个在总作品中未曾出现的相异字．若再考量标准差，则此首新诗约包含 6.97 ± 2.64 个新字，即新字的数目约介于 $4.33\sim9.61$ 间．实际的新字有 9 个(即表 1 中的 m_0)，的确在 4.33 与 9.61 间．估计曾出现一次的字的 4.21 ± 2.05 个，实际则为 7，估计曾出现两次的字有 3.33 ± 1.83 个，实际则为 5．Efron 与 Thisted 一直分析到曾出现 100 次的字，其吻合程度皆相当惊人，可以说通过严格的统计检定(quite delicate statistical tests)．看起来这首诗确是莎士比亚所写，或者用比较保守的统计术语来说：没有足够的证据可推翻此诗为莎士比亚所做之假设．

传奇统计学者 Persi Diaconis(当时在斯坦福大学任教，现已转至哈佛大学统计系．1945 年出生于纽约，14 岁时离开学校在街头变魔术为生，24 岁时到纽约市立学院(City College)的夜间部就读，1971 年毕业随即进入哈佛大学统计系，而于 1974 年完成博士学位．DeGroot(1986)为一篇对他的访问稿，戴贞德(1987)为节译稿)，他熟悉 Efron 及 Thisted 的分析．据他讲，他第一次读这首泰勒诗时，觉得这一点也不像莎士比亚的作品，他认为只要做一些数值分析，就可以证明诗中字所摆的位置完全是错的．但读了 Efron 及 Thisted 的分析后，他相信这首诗很可能是莎士比亚所作．

Efron 强调他们的分析并无法证明这首泰勒诗真是莎士比亚写的．但他说这首泰勒诗在罕用字的使用情况，如此吻合莎士比亚的总作品，确实令人惊讶．

Efron 及 Thisted 也对 John Donne(1572—1631)，Christopher Marlowe(1564—1593)及 Ben Jonson(1573—1637)等三位约略与莎士比亚同时代的诗人，各取一首诗，另取四首莎士比亚的诗，与这首泰勒诗作比较．此 8 首诗之资料列在表

4.表5是列出8首诗之用字在总作品中之出现频率.只是此处计算是分成11类.例如,在Jonson的诗中,有10个相异字在总作品中出现60~79次.至于Efron及Thisted所作之估计值则列在表6.

表4　8首待分析的诗

编　　　写	说　　　明	总字数	相异字数
1.JON	Ben Jonson;"An Elegy"	411	243
2.MAR	C.Marlowe;four poems	495	272
3.DON	J.Donne;"The Ecstacy"	487	252
4.CYM	Shakespeare;from "Cymbeline"	323	215
5.PUC	from "A Midsummer Night's Dream"	234	156
6.PHO	"The Phoenix and Turtle"	352	216
7.SON	"Sonnets, Nos.12~15"	448	264
8.TAY	Taylor poem	429	258

表5　8首诗之用字依在总作品中出现的频率而分类(如表2)

在总作品之出现次数

诗名	0	1	2	3~4	5~9	10~19	20~29	30~39	40~59	60~79	80~99
1.JON	8	2	1	6	9	9	12	12	13	10	13
2.MAR	10	8	8	16	22	20	13	9	14	9	5
3.DON	17	5	6	5	12	17	14	6	12	3	10
4.CYM	7	4	3	5	13	17	9	12	17	4	4
5.PUC	1	4	0	3	9	6	9	4	5	9	3
6.PHO	14	5	5	9	8	18	13	7	13	8	5
7.SON	7	8	1	5	16	14	12	13	12	13	8
8.TAY	9	7	5	8	11	10	21	16	18	8	5

经过3种严密的统计检定(其过程我们自然无法在此介绍性的短文中讲述),发现对前三首(非莎士比亚之作品),罕用字出现次数之实际值与预测值(假设其为莎士比亚所作)皆不吻合.而虽然挑选的4首莎士比亚的诗偶尔有不吻合处,总地来说是可接受的.本来仅是一师生的游戏之作,说不定当初还被"有识之士"视为纸上谈兵,10年后竟令那些向来可能不常接触统计的文学学者折服.不过与其将此视为无心插柳,不如相信统计的用途是无所不在的.

表 6　表 5 中之相异字之期望值的估计值在总作品之出现次数

诗名	0	1	2	3－4	5－9	10－19	20－29	30－39	40－59	60－79	80－99
1.JON	6.68	4.03	3.19	5.14	9.81	13.61	9.64	8.18	12.68	9.17	6.83
2.MAR	8.04	4.86	3.85	6.19	11.81	15.91	12.03	9.92	14.92	10.72	8.26
3.DON	7.91	4.78	3.78	6.09	11.62	15.59	11.77	9.68	14.99	10.83	8.06
4.CYM	5.25	3.17	2.51	4.04	7.71	10.35	7.82	6.44	9.99	7.23	5.39
5.FUC	3.79	2.29	1.81	2.91	5.57	7.47	5.65	4.66	7.22	5.23	3.91
6.PHO	5.72	3.46	2.73	4.40	8.40	11.28	8.52	7.02	10.87	7.87	5.87
7.SON	7.28	4.40	3.48	5.60	10.69	14.52	11.10	9.06	13.71	10.02	7.96
8.TAY	6.97	4.21	3.33	5.36	10.24	13.96	10.77	8.87	13.77	9.99	7.48

关于估计种类的方法尚有不少，可参考赵莲菊一文[2].

最后我们以 Efron 及 Thisted 特地挑出来咏怀他们心情的一首莎士比亚的诗作为本文之结束.

Why is my verse so barren of new pride,
So far from variation or quick change?
Why with the time do I not glance aside
To new－found methods and to compounds strange?
Why write I still all one, ever the same,
And keep invention in a noted weed,
That every word doth almost tell my name,
Showing their birth and where they did proceed?
O, know, sweet love, I always write of you,
And you and love are still my argument;
So all my best is dressing old words new,
Spending again what is already spent;
For as the sun is daily new and old,
So is my love still telling what is told.

William Shakespeare
Sonnet LXXVI

参考文献

[1]　戴贞德.与统计魔术大师对话录[J].科学月刊,1987,18(5):353-355.

[2]　赵莲菊.种类知多少[J].数学传播季刊,1995,19(2):3-7.

[3] DEGROOT M H. A conversation with Persi Diaconis[J]. Statistical Science, 1995, 19(2): 319-334.

[4] EFRON B, THISTED R. Estimating the number of unseen species: How many words did shakespeare know[J]. Biometrika, 1976(63): 435-447.

[5] FISHER R A, CORBET A S, WILLIAMS C B. The relation between the number of species and the number of individuals in a random sample of an animal population[J]. Journal of Animal Ecology, 1943(12): 42-58.

[6] GOOD I J, TOULMIN G H. The number of new species, and the increase in population converage, when a sample is increased[J]. Biometrika, 1956(43): 45-63.

[7] GOWER J C. Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890—1962[J]. Mathematical Spectrum, 1990, 91(23): 76-86.

[8] KOLATA G. Shakespeare's new poem: an ode to statistics[J]. Science, 1986(231): 335-336.

[9] LELYVELD J. A scholar's find: Shakespearean lyru[J]. New York Times, 1985, 1(12).

[10] SPEVACK M. A Complete and Systematic Concordance to the Words of Shakespeare[M]. George Olms, Hildesheim, 1968.

[11] TAYLOR G. Shakespeare's new poem. A scholar's clues and conclusions[M]. New York: New York Times Book Review, 1985: 11-14.

[12] THISTED R, EFRON B. Did Shakespeare write a newlydiscovered poem[J]. Biometrika, 1987(74): 445-455.

(原文载于《数学欣赏》,中国统计出版社,经作者黄文璋同意转载)

编后语 伴随着人们对理性的渴望,数学攀升到了科学宝塔的顶点,于是开始了对社会科学的大举"入侵",先是经济学全面沦陷(数学家康托洛维奇和纳什成为诺贝尔经济学奖得主即为证明),随后社会学与心理学也是半壁江山不保(出现了拓扑心理学等交叉学科),接着开始染指文学艺术这块纯而又纯的社会科学"净土",从用微分方程鉴别名画真伪到判断《红楼梦》后四十回的真正作者,从《静静的顿河》的文风到莎士比亚新诗真伪的鉴定,黄文璋教授既沐欧风美雨,又有深厚国学功底,文章独到,读之爱不释手,并承蒙2005年11月27日亲笔回函,慨然允准重登,为本文集增辉不少.

不知从何时开始,中国大陆的知名数学家已从数学科普领域悄然而退,可能一是专业数学家竞争加剧使他们力争上游,无法分身;二是功利心日重而将精力投向了更有收益的领域;三是志存高远为夺菲尔兹奖而不屑于从事数学科普.但更重要的原因恐怕一是缺乏大师那样通达的理解,"博大精深"之后无法浅出;二是由于历史的原因,新一代的数学家其人文素质及文章技巧远不及华罗庚先生那一辈,使知难而退,于是二、三流科普作品充斥于市,不仅如此,"伪数学家"及"民间数学爱好者"开始占领这一市场,着实可怕.黄文璋先生身兼台湾高雄大学应用数学系教授兼主任、中华机率统计学会理事长(台湾),亲力亲为为统计数学鼓与呼,以引人入胜之题材诱人于统计数学之殿堂,令人向往,催人奋进.

几个多项式问题

林常①

§1 全 k 次方值蕴涵 k 次方式

给定正整数 $k \geqslant 2$ 和实系数多项式 $f(x)$，如果对每个充分大的正整数 n，$f(n)$ 都是整数的 k 次方，则必有整值多项式 $g(x)$，使得 $f(x) = g(x)^k$.

证明　不妨设 $\deg f = m \geqslant 1, f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$，记 $r = \left[\frac{m}{k}\right]$.

$$u(x) = \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{a_0 x^m}\sqrt[k]{1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \cdots}\quad (\text{当 } k \text{ 为偶数时取算术根}).$$

利用函数 $(1 + c_1 t + \cdots)^{1/k}$ 在 $t = 0$ 处的马克劳林(Maclaurin)展开，我们有

$$u(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i^{(0)} x^{(m/k)-i} + \varepsilon$$

其中 ε 表示 $x \to \infty$ 时的无穷小量.

注意到对 $t > 0$，差分函数

$$\Delta x^t = (x+1)^t - x^t = x^t\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^t - 1\right) = \sum_{i=1}^{[t]} c_i x^{t-i} + \varepsilon$$

故
$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i^{(1)} x^{(m/k)-i} + \varepsilon$$

归纳可证
$$\Delta^j u(x) = \sum_{i=j}^{r} a_i^{(j)} x^{(m/k)-i} + \varepsilon \quad (j \geqslant 1)$$

最后有
$$\Delta^{r+1} u(x) = \varepsilon$$

也就是
$$\lim_{x \to +\infty} \Delta^{r+1} u(x) = 0$$

现在根据已知条件，对充分大的正整数 n，$u(n)$ 都是整数，由差分的定义

---

① 林常，福建省教育学院.

$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ 可知，$\Delta^{j} u(n)$ 都是整数，特别，$\Delta^{r+1} u(n)$ 都是整数．再由上面的极限式得到：存在 n_0，使得 $n \geqslant n_0$ 时 $\Delta^{r+1} u(n) = 0$.

于是存在(至多)r 次的整值多项式 $g(x)$，使得 $n \geqslant n_0$ 时 $u(n) = g(n)$，从而

$$f(n) = u(n)^k = g(n)^k$$

最后，由于 f 与 g^k 都是多项式，根据多项式恒等定理得到 $f(x) = g(x)^k$.

单墫老师在《解题研究》(南京师范大学出版社，2002.6) 第五章第 8 节(平方数与平方式)一书中用初等方法证明了 $k = m = 2$ 的情形．对一般的 k, m 恐怕很难用初等方法证明.

§2　Чебышев 多项式引申出的几个问题

n 次 Чебышев 多项式 $T_n(x)$ 归纳定义为：$T_0(x) = 1$，$T_1(x) = x$，而对于 $n \geqslant 2$，有

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

容易归纳证明，$n \geqslant 1$ 时 $T_n(x)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的 n 次整系数多项式.

归纳可证 $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$．由此可知，$|x| \leqslant 1$ 时 $|T_n(x)| \leqslant 1$. $T_n(x)$ 有 n 个不同实根 $u_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 和 $n-1$ 个极值点 $v_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，$T_n(v_k) = (-1)^k$，它们在$[-1,1]$中交错分布：$v_0 > u_0 > v_1 > u_1 > \cdots$.

同样归纳可证 $T_n\left(\dfrac{u+u^{-1}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(u^n + u^{-n})$，由此有 $|x| > 1$ 时 $|T_n(x)| > 1$.

利用特征方程可求出显式

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k}(x^2-1)^k x^{n-2k}$$

Чебышев 定理　给定正整数 n，区间$[\alpha,\beta]$和非零实数 a，首项系数为 a 的 n 次实系数多项式 $f(x)$ 在区间$[\alpha,\beta]$上的振幅

$$M(f,[\alpha,\beta]) = \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)| \geqslant \frac{|a|(\beta-\alpha)^n}{2^{2n-1}}$$

达到最小值的多项式只有一个

$$f(x) = \frac{a(\beta-\alpha)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right) =$$

$$\frac{\alpha}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}(x-\alpha)^k(x-\beta)^k\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{n-2k}$$

令 A 为实系数多项式的一个集合,f 取遍 A 时 $M(f,[\alpha,\beta])$ 的最小值记做 $A([\alpha,\beta])$. 达到这个最小值的 f 称为极值函数.

Чебышев 定理的结论及证明方法对于研究多项式族在区间上振幅的极值问题有重要的启发. 它的基本证法是先猜测构造极值函数,然后用同一法给予证明. 证明中用到多项式的惟一性定理(又称恒等定理):如两个至多 n 次的多项式在 $n+1$ 个不同点处的值分别相等,则它们必恒等. 循着这一思路,改变问题的条件和提法,可以引申出一些有趣的极值问题.

引申问题 1　给定正整数 n,区间 $[\alpha,\beta]$,以及不属于 $[\alpha,\beta]$ 的实数 u,令 $A=\{f(x)\mid \deg f\leqslant n, M(f,[\alpha,\beta])\leqslant 1\}$. f 取遍 A 时求 $|f(u)|$ 的最大值.

解　记

$$v_k=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{k\pi}{n}\qquad 0\leqslant k\leqslant n$$

由 Lagrange 插值公式

$$f(u)=\sum_{k=0}^{n}f(v_k)\prod_{i\neq k}\frac{u-v_i}{v_k-v_i}$$

注意到所有的 $u-v_i$ 彼此同号(因为 v_i 都在区间 $[\alpha,\beta]$ 中,而 u 在区间外),v_k 关于 k 递减,且 $|f(v_k)|\leqslant 1$,故

$$|f(u)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|f(v_k)|\prod_{i\neq k}\left|\frac{u-v_i}{v_k-v_i}\right|\leqslant\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\prod_{i\neq k}\frac{u-v_i}{v_k-v_i}\right|=$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}T_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\prod_{i\neq k}\frac{\frac{2u-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}-\cos\frac{i\pi}{n}}{\cos\frac{k\pi}{n}-\cos\frac{i\pi}{n}}\right|=\left|T_n\left(\frac{2u-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)\right|$$

(最后一步是对 $T_n(x)$ 用 Lagrange 插值公式)这个上界又可写成

$$\frac{2^n}{(\beta-\alpha)^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}(u-\alpha)^k(u-\beta)^k\left|u-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^{n-2k}$$

$f(x)$ 为极值函数,当且仅当 $f(v_k)=(-1)^k(0\leqslant k\leqslant n)$ 或 $f(v_k)=(-1)^{k+1}(0\leqslant k\leqslant n)$. 由于 $n+1$ 个不同点处的值惟一确定 n 次多项式,故极值函数只有两个,即

$$g(x)=\pm T_n\left(\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)$$

本题也可用同一法讨论. 设 $f\in A$ 使 $|f(u)|$ 不小于上面给出的值,选取 g 的符号使 $g(u)$ 与 $f(u)$ 同号. 不妨设 $u>\beta$ 且 $f(u)>1$. 作 $\varphi(x)=g(x)-f(x)$. 注意到

$$g(u) \leqslant f(u) \qquad g(v_k) = (-1)^k \qquad |f(v_k)| \leqslant 1$$

就得到：$\varphi(x)$ 在 $v_n, v_{n-1}, \cdots, v_0, u$ 处交替变号，而且极值点 $v_k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 若是 $\varphi(x)$ 的根就是二重根，又如果 $\varphi(x)$ 在 (v_1, u) 中只有一个根 v_0，它也是二重．因此 $\varphi(x)$ 至少有 $n+1$ 个实根（计算重数），故 $\varphi(x) = 0$，即 $f = g$．

引申问题 2　给定正整数 n，区间 $[\alpha, \beta]$ 和非零实数 c，$A = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + c \mid a_n, \cdots, a_1 \in \mathbf{R}\}$，求 $A([\alpha, \beta])$．

解　(1) 如 $0 \in [\alpha, \beta]$，则 $M(f, [\alpha, \beta]) \geqslant |f(0)| = |c|$，$f(x) = c$ 达到，故 $A([\alpha, \beta]) = |c|$．

(2) 设 0 不属于 $[\alpha, \beta]$，即 $\alpha\beta > 0$，此时 $\left|\dfrac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\right| > 1$，可令

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} = (u + u^{-1})/2 \qquad u = \frac{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}$$

猜测极值函数为 $g(x) = mT_n\left(\dfrac{\alpha+\beta-2x}{\beta-\alpha}\right)$．代入 $x = 0$，求 m．

$$g(0) = c = mT_n((u+u^{-1})/2) = m(u^n + u^{-n})/2$$

故

$$m = \frac{2c}{u^n + u^{-n}} = \frac{2c(\beta-\alpha)^n}{(\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta})^n + (\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta})^n} = \frac{c(\beta-\alpha)^n}{\sum\limits_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i}(4\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-2i}}$$

而

$$g(x) = mT_n\left(\frac{\alpha+\beta-2x}{\beta-\alpha}\right) = \frac{c(-2)^n}{\sum\limits_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i}(4\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-2i}}$$

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2k}(x-\alpha)^k(x-\beta)^k\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{n-2k}$$

由以上构造自然有

$$g \in A, M(g, [\alpha, \beta]) = |m| = \frac{|c|(\beta-\alpha)^n}{\sum\limits_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i}(4\alpha\beta)^i|\alpha+\beta|^{n-2i}}$$

设有 $f \in A$ 使得 $M(f, [\alpha, \beta]) \leqslant |m|$，作 $\varphi(x) = g(x) - f(x)$，则

$$\varphi(0) = 0 \qquad g(v_k) = (-1)^k m \qquad |f(v_k)| \leqslant |m|$$

故对 $0 \leqslant k \leqslant n$，$\varphi(v_k)$ 的值交替地 $\geqslant 0$ 和 $\leqslant 0$，而且在极值点 $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 处若有 $\varphi(v_k) = 0$，v_k 必是重根．因此 $\varphi(x)$ 至少有 $n+1$ 个实根（计算重数），但 $\deg\varphi(x) \leqslant n$，故 $\varphi(x) = 0$，即 $f = g$．

这样就用同一法证明了 $A([\alpha, \beta]) = |m|$，而且极值函数只有一个，即

$g(x)$.

顺便指出:$0\in[\alpha,\beta]$ 时的极值函数不惟一,事实上,任意取定正整数 $n\geqslant 2$ 和 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$,令 $f(x)=(-1)^k cT_n(tx+\cos\frac{k\pi}{n})$. 显然 $f\in A$,只要选取 t 使得

$$t\alpha,t\beta\in[-1-\cos\frac{k\pi}{n},1-\cos\frac{k\pi}{n}]$$

就有 $M(f,[\alpha,\beta])=|c|$. 符合要求的 t 有无穷多个.

引申问题 3　给定正整数 $n\geqslant 2$,正数 m 以及非零实数 $b,c(m\geqslant|c|)$. $A=\{a_nx^n+\cdots+a_2x^2+bx+c\mid a_n,\cdots,a_2\in\mathbf{R}\}$. 求最大的 β,使得 $A([0,\beta])\leqslant m$.

解　猜测 $g(x)=\varepsilon mT_n(px+q)$. $(\varepsilon=\pm 1)$. $c=g(0)=\varepsilon mT_n(q)$,记 $\theta=\arccos\frac{c}{\varepsilon m}$,则 $q=\cos\frac{\theta}{n}$. 再令 $p\beta+q=-1$,得到 $p=-\frac{1+\cos\frac{\theta}{n}}{\beta}$.

$$b=g'(0)=\varepsilon m(-\sin\theta)n(-\frac{1}{\sqrt{1-q^2}})p=-\varepsilon\frac{n\sqrt{m^2-c^2}}{\beta}\cot\frac{\theta}{2n}.$$

故 $\varepsilon=-\operatorname{sgn} b$.

(1) 当 $m>|c|$ 时,$\beta=\frac{n\sqrt{m^2-c^2}}{|b|}\cot\frac{\theta}{2n}$,显然 $g\in A$ 且 $M(g,[0,\beta])=m$.

如果有 $f\in A$ 使 $M(f,[0,\beta])\leqslant m$,作 $\varphi(x)=g(x)-f(x)$. 则 $x^2\mid\varphi(x)$,$\varphi(x)$ 有二重根 $x=0$,对于 $1\leqslant k\leqslant n$,$\varphi(x)$ 在 $x_k=\frac{\cos\frac{k\pi}{n}-q}{p}\in(0,\beta]$ 处交替变号,而且极值点如果是根必为重根,故 $\varphi(x)$ 至少有 $n+1$ 个实根(计算重数),但 $\deg\varphi(x)\leqslant n$,因此 $\varphi(x)=0$,$f=g$.

注意到 $x>\beta$ 时 $px+q<-1$,$|g(x)|>m$,于是 $m>|c|$ 时所求的最大 β 是

$$\frac{n\sqrt{m^2-c^2}}{|b|}\cot\frac{\theta}{2n}$$

其中 $\theta=\arccos(-\operatorname{sgn}b\frac{c}{m})$,并且极值函数只有一个

$$g(x)=-(\operatorname{sgn}b)mT_n(\cos\frac{\theta}{n}-\frac{1+\cos\frac{\theta}{n}}{\beta}x)$$

(2) 当 $m=|c|$ 且 $bc>0$ 时 $f(0+)>m$,故 $\beta=0$.

(3) 当 $m=|c|$ 且 $bc<0$ 时 $\theta=0$

$$g(x)=cT_n\left(1-\frac{2x}{\beta}\right)=\frac{c}{\beta^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}(4x)^k(x-\beta)^k(\beta-2x)^{n-2k}$$

$$b=\frac{c}{\beta^n}(-2n\beta^{n-1}+4C_n^2(-\beta)\beta^{n-2})=-\frac{2n^2c}{\beta}$$

故 $\beta=-\dfrac{2n^2c}{b}$，和(1)取 $\theta\to 0$ 的极限相同，而且(1)的惟一性讨论也成立．因此这时极值函数也惟一．

笔者曾为 1998 年全国高中数学联赛提供试题：

设函数 $f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$．对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个区间 $[0,l(a)]$ 上，不等式 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立．

问：a 为何值时 $l(a)$ 最大？求出这个最大的 $l(a)$．证明你的结论．

它就是引申问题 3 的特例：$n=2,b=8,c=3,m=5$．此时

$$\cos\theta=-3/5\qquad \cot(\theta/4)=\frac{\sqrt5+1}{2}\qquad \beta=\frac{\sqrt5+1}{2}$$

$$g(x)=-5T_2\left(\frac{1-2x}{\sqrt5}\right)=-8x^2+8x+3$$

公布的官方解答和学生实际作的解答都是讨论二次函数区间极值的常规方法，要求较强的运算能力．下面给出用同一法的讨论：

猜测极值函数 $$g(x)=a(x-x_0)^2+5$$

代入 $g(0)=3=ax_0^2+5,b=8=-2ax_0$，解得 $x_0=1/2,a=-8$．

令 $g(l(a))=-8(l(a)-1/2)^2+5=-5$，得 $l(a)=\dfrac{\sqrt5+1}{2}$．由二次函数的图象可知

$$g(x)=-8x^2+8x+3=-8(x-1/2)^2+5$$

在区间 $\left[0,\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right]$ 中满足 $|g(x)|\leqslant 5$．且 $x>\dfrac{\sqrt5+1}{2}$ 时，$g(x)<-5$．

设有 $f(x)=ax^2+8x+3$ 在区间 $[0,u]$ 中满足 $|f(x)|\leqslant 5$，其中 $u\geqslant\dfrac{\sqrt5+1}{2}$．令

$$\varphi(x)=f(x)-g(x)=(a+8)x^2$$

由于 $f(1/2)\leqslant 5=g(1/2),f\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right)\geqslant -5=g\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right)$，故 $\varphi(1/2)\leqslant 0$，$\varphi\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right)\geqslant 0$，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right]$ 中有一个根．又有二重根 $x=0$，所以 $\varphi(x)$

恒等于 0，即 $f = g$，而且 $u = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

因此只有 $a = -8$ 时给出最大的 $l(a) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

§3 二次函数的几个问题

1. 给定非零实数 b 和区间 $[\alpha,\beta]$，$A = \{ax^2 + bx + c \mid a, c \in \mathbf{R}\}$. 求 $A([\alpha,\beta])$.

解 令

$$g(x) = mT_2\left(\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right) = m\left(2\left(\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)^2 - 1\right) =$$

$$\frac{m}{(\beta-\alpha)^2}(8x^2 - 8(\alpha+\beta)x + \alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2)$$

$\alpha + \beta \neq 0$ 时应取

$$m = -\frac{b(\beta-\alpha)^2}{8(\alpha+\beta)} \cdot g(x) = -\frac{b}{\alpha+\beta}\left(x^2 - (\alpha+\beta)x + \frac{\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2}{8}\right)$$

$\varphi(x) = g(x) - f(x)$ 在 $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$，$[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ 中各有一个根. 又因 $\varphi(x)$ 为偶函数（不含一次项），它的根成对互为相反数.

(1) 当 $\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant -\alpha$（即 $3\alpha+\beta \geqslant 0$，此时 $\alpha+\beta > 0$）或 $\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant -\beta$（即 $\alpha + 3\beta \leqslant 0$，此时 $\alpha+\beta < 0$）时，$\varphi(x)$ 有 3 个实根，从而

$$A([\alpha,\beta]) = \frac{|b|(\beta-\alpha)^2}{8|\alpha+\beta|}$$

且极值函数只有一个，即 $g(x)$.

(2) 当 $-\alpha/3 < \beta < -3\alpha$（此时 $\alpha < 0 < \beta$）时，令 α, β 中绝对值较小者为 u，由于 $u, -u \in [\alpha,\beta]$，故对任意 $f \in A$

$$M(f,[\alpha,\beta]) \geqslant \max\{|au^2 + c + bu|, |au^2 + c - bu|\} =$$

$$|au^2 + c| + |bu| \geqslant |bu|$$

极值函数 g 应当满足 $au^2 + c = 0$，即 $g(x) = ax^2 + bx - au^2$. 此时 $g(u) = bu$，$g(-u) = -bu$，故 g 的顶点 $-\frac{b}{2a}$ 不能在区间内.

如 $\beta \neq -\alpha$，$-u$ 是区间的内点，应当为顶点，惟一的极值函数 $g(x) = \frac{b}{2u}(x^2 + 2ux - u^2)$ 达到 $A([\alpha,\beta]) = |bu| = |b| \cdot \{-\alpha, \beta\}$.

如 $\beta=-\alpha$, $g(x)=ax^2+bx-a\beta^2$ 达到 $A([\alpha,\beta])=|b|\beta$，当且仅当 $|a|\leqslant\dfrac{|b|}{2\beta}$，此时有无穷多个极值函数.

2. 给定正数 k 和区间 $[m,n]$，$A=\{f(x)=ax^2+bx+c\mid a,b,c\in\mathbf{R}, M(f,[m,n])\leqslant k\}$. f 取遍 A 时求 $S=|a|+|b|+|c|$ 的最大值.

解 最早见到这种题目是1990年之前的苏联8～9年级（相当于我国初中）竞赛题：$f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $[0,1]$ 上满足 $|f(x)|\leqslant 1$，求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值. 解出后自然想推广到任意的区间 $[m,n]$，m 与 n 同号时较简单：

记
$$u=f(m)=am^2+bm+c$$
$$v=f(n)=an^2+bn+c$$
$$w=f((m+n)/2)=a(m+n)^2/4+b(m+n)/2+c$$

联立解出
$$a=(2v+2u-4w)/(n-m)^2$$
$$b=(-(n+3m)v-(3n+m)u+(4n+4m)w)/(n-m)^2$$
$$c=((m^2+mn)v+(n^2+mn)u-4mnw)/(n-m)^2$$

(1) 若 m 与 n 同号（$m,n\geqslant 0$ 或 $m,n\leqslant 0$）. 注意到 $|u|,|v|,|w|\leqslant k$，故有
$$|a|\leqslant(|2v|+|2u|+|4w|)/(n-m)^2\leqslant 8k/(n-m)^2$$
$$|b|\leqslant(|(n+3m)v|+|(3n+m)u|+|(4n+4m)w|)/(n-m)^2\leqslant(|8n+8m|k)/(n-m)^2$$
$$|c|\leqslant(|(m^2+mn)v|+|(n^2+mn)u|+|4mnw|)/(n-m)^2\leqslant((m^2+n^2+6mn)k)/(n-m)^2$$

于是
$$|a|+|b|+|c|\leqslant((m^2+n^2+6mn+8|n+m|+8)k)/(n-m)^2$$

等号当且仅当 $u=v=-w=\pm k$，即
$$f(x)=\pm k/(n-m)^2\cdot(8(x-(m+n)/2)^2-(n-m)^2)=\pm k/(n-m)^2\cdot(8x^2-8(m+n)x+(m^2+n^2+6mn))$$

时成立.

(2) 若 $-m=n\leqslant 1$，则
$$a=(v+u-2w)/(2n^2)\qquad b=(v-u)/(2n)\qquad c=w$$
$$|a|+|b|+|c|\leqslant(|v+u|+|v-u|n)/(2n^2)+(|w|(n^2+1))/n^2\leqslant((n^2+2)k)/n^2$$

此处用到 $|v+u|+|v-u|n=\max\{|v+u+(v-u)n|, |v+u-(v-u)n|\}=\max\{|(1+n)v+(1-n)u|, |(1-n)v+(1+n)u|\}\leqslant(1+n+1-n)k=2k$

最大值也是在 $u=v=-w=\pm k$，即 $f(x)=\pm k/n^2\cdot(2x^2-n^2)$ 时达到.

(3) 若 $-m=n>1$,由于 $\pm f(\pm x)$ 与 $f(x)$ 情况一样,不妨设 $a,b\geqslant 0$. 此时若 $c\geqslant 0$,则

$$|a|+|b|+|c|=a+b+c=f(1)\leqslant k$$

若 $c<0$,记 $t=(n-1)/(n+1)$,有

$$\begin{aligned}v-(n+1)^2/2\cdot f(-t)=a(n^2-(n-1)^2/2)+\\ b(n+(n^2-1)/2)-c((n+1)^2/2-1)=\\ (n^2+2n-1)/2\cdot(a+b-c)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}|a|+|b|+|c|=a+b-c=\\ (2v-(n+1)^2\cdot f(-t))/(n^2+2n-1)\leqslant\\ ((2+(n+1)^2)k)/(n^2+2n-1)=\\ ((n^2+2n+3)k)/(n^2+2n-1)\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$f(x)=\pm(k(n+1)^2/(n^2+2n-1)^2)(2(x\pm(n-1)/(n+1))^2-(n^2+2n-1)^2/(n+1)^2)$$

由于$(n^2+2n+3)/(n^2+2n-1)>1$,最大值就是$((n^2+2n+3)k)/(n^2+2n-1)$.

剩下 $mn<0$ 且 $-m$ 不等于 n 的情形十分棘手.

编后语 林常老师的这篇稿子是2006年在上海召开的第二届全国奥林匹克数学研究会上约到的,林常老师的文章中学时就读到过,所以神交已久,林老师衣着简朴性格内敛,颇俱老派知识分子风范,文如其人,这篇文章朴实无华,小处着眼,大处着手,布局讲究,叙述简洁.他所举的那道全国高中联赛试题倘若不介绍如此背景,按命题时的标准答案去讲,总有隔靴搔痒,不得要领之感,所以读完此文后豁然开朗.更难能可贵的是它有自己的视角,自己的风格,自己的语言,林常老师文章不多,惜墨如金.菲尔兹奖得主,华人数学家丘成桐先生在浙江省图书馆讲演时谈到:"我曾经参观德国的哥廷根大学,看到19世纪和20世纪伟大科学家的手稿,他们传世的作品只是他们工作的一部分,很多杰作都还未发表,使我深为惭愧而钦佩他们的胸襟.今人则不然,大量模仿,甚至将名作稍微改动,据为己有,尽快发表.或申请院士,或自炫为学术宗匠,于古人何如哉."(李桂保编《思想的声音》.上海书店出版社,2006年1月.P169)另外此文绝不是命题作文,也非基金资助,评奖需要,全是林老兴趣所在,兴致所至.正如钱钟书所言:"大抵学问是荒江野老屋中二三素心人商量培养之事."绝不应成为市声嚣然的奔赴竞争之具.

初中竞赛题与 Edgur 问题

刘培杰　郭岗田①

§1　一个初二竞赛题

1993 年北京市初中二年级数学竞赛有一题为:

p 是素数,且 p^4 的全部正约数之和恰是一个完全平方数,则满足上述条件的素数 p 的个数是(　　).

(A)3　　(B)2　　(C)1　　(D)0

答案选(C).

因为 p 是素数,所以 p^4 有 5 个正约数:$1,p,p^2,p^3,p^4$.依题意有

$$1+p+p^2+p^3+p^4=n^2\quad (n\in \mathbf{N})\tag{1}$$

则
$$(2n)^2>4p^4+4p^3+p^2=(2p^2+p)^2$$
又
$$(2n)^2<4p^4+p^2+4+4p^3+8p^2+4p=(2p^2+p+2)^2$$
即
$$(2p^2+p)^2<(2n)^2<(2p^2+p+2)^2$$
故
$$(2n)^2=(2p^2+p+1)^2=4p^4+4p^3+5p^2+2p+1$$
与
$$4n^2=4p^4+4p^3+4p^2+4p+4$$
联立,解得
$$p^2-2p-3=0$$
解得 $p=3,p=-1$(舍去).

当我们将(1)中对 p 是素的限制取消后,问题可变为如下问题.

§2　Bennet 方法

试证明,使

$$x^4+x^3+x^2+x+1$$

① 郭岗田,哈尔滨市教育研究院数学教研员.

是一个完全平方数的整数 $x=-1,0,3$.

证明　这个问题,在贝内特(Bennet)教授根据著名的配方法提出下述巧妙的方法之前,长达7年未解决.

我们来求方程

$$y^2=x^4+x^3+x^2+1+x$$

的解.为此,把 y 以 x 表示,现有

$$(x^2+\frac{x}{2})^2=x^4+x^3+\frac{x^2}{4}$$

右端的前两项已经是 y^2 表达式的前两项,$x^2+\frac{x}{2}+1$ 的值更接近 y 值.

$$(x^2+\frac{x}{2}+1)^2=x^4+x^3+\frac{9}{4}x^2+x+1=y^2+\frac{5}{4}x^2$$

但是,当 $x\neq 0$ 时,$(x^2+\frac{x}{2}+1)^2$ 太大.另一方面

$$(x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2=$$

$$x^4+x^3+\frac{2\sqrt{5}-1}{4}x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{4}x+\frac{3-\sqrt{5}}{8}=$$

$$y^2-\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2<y^2$$

这是因为$(5-2\sqrt{5})/4$大于0,而且,x 不等于无理数 $-(3+\sqrt{5})/2$.由此,我们对两端有了估计.y 值位于由近似确定的下述边界之间

$$x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}<|y|\leqslant x^2+\frac{x}{2}+1$$

这就表明

$$x^2+\frac{x+(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{2}<|y|\leqslant x^2+\frac{x+2}{2}$$

对于一个适当的实数 k,$(\sqrt{5}-1)/2<k\leqslant 2$,则有

$$|y|=x^2+\frac{x+k}{2}$$

由于 x 和 y 都是整数,这表明$\frac{x+k}{2}$也是整数,因而 $x+k$ 是偶数.从而,k 也是一个整数.因此,k 的一些可能的值是1和2(注意到$(\sqrt{5}-1)/2$在0和1之间).现在,研究 $k=2$ 和 $k=1$ 的情形.

$k=2$ 时,$|y|=x^2+\frac{x}{2}+1$,由$\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2=y^2+\frac{5}{4}x^2$,得到 $y^2=$

$y^2 + \frac{5}{4}x^2$,即 $x = 0$.

$k = 1$ 时,有

$$|y| = x^2 + \frac{x+1}{2}$$

另一方面,易知

$$y^2 = \left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{(x-3)(x+1)}{2}$$

从而说明

$$y^2 = y^2 - \frac{(x-3)(x+1)}{2}$$

由此得知 $(x-3)(x+1) = 0$,这又说明 $x = 3$ 或 $x = -1$. 只要验证 $x = -1, 0, 3$ 时,y 确取整数值,即得证.

长时间以来,人们一直认为,这种巧妙的证明是非常可观的成就. 但是令人惊奇和兴奋的是,在《数学文摘》(Mathematical Digest)这一杂志中,发现了一种类似的,但是更加漂亮的解法.《数学文摘》是一家不苛求复写的刊物,是为南非卡普斯达特(Kapstade)郊区的一所高中学生办的.

这家杂志在 1973 年 7 月号中,给出了下述解答.

注意到

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - \left(\frac{3}{4}x^2 + x + 1\right) =$$

$$y^2 - \frac{1}{4}(3x^2 + 4x + 4)$$

由于 $3x^2 + 4x + 4$ 的判别式($4^2 - 4\times 3\times 4 = -32$)是负的,所以,对一切实数 x,$3x^2 + 4x + 4$ 均为正. 这就是说

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 < y^2 \quad 或 \quad \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) < |y|$$

后者是因为

$$x^2 + \frac{x}{2} = x\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

对所有整数均非负,因而有

$$x^4 + x^3 + \frac{2\sqrt{5}-1}{4}x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}x + \frac{3-\sqrt{5}}{8} = y^2 - \frac{5-2\sqrt{5}}{4}\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 < y^2$$

这是因为 $(5-2\sqrt{5})/4 > 0$,而且,x 不等于无理数 $-(3+\sqrt{5})/2$. 由此,我们对两端有了估计. y 值位于由近似确定的下述边界之间,即

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} < |y| \leqslant x^2 + \frac{x}{2} + 1$$

这就表明

$$x^2+\frac{x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2}<|y|\leqslant x^2+\frac{x+2}{2}$$

对于一个适当的实数 k，$(\sqrt{5}-1)/2<k\leqslant 2$，则有

$$|y|=x^2+\frac{x+k}{2}$$

由于 x 和 y 都是整数，这表明 $\frac{x+k}{2}$ 也是整数，因而 $x+k$ 是偶数．从而，k 也是一个整数．因此，k 的一些可能的值是 1 和 2（$(\sqrt{5}-1)/2$ 在 0 和 1 之间）．现在，研究 $k=2$ 和 $k=1$ 的情形．

$k=2$ 时，$|y|=x^2+\frac{x}{2}+1$，由 $(x^2+\frac{x}{2}+1)^2=y^2+\frac{5}{4}x^2$ 得到 $y^2=y^2+\frac{5}{4}x^2$，得到 $y=y^2+\frac{5}{4}x^2$，即 $x=0$．

$k=1$ 时，有

$$|y|=x^2+\frac{x+1}{2}$$

另一方面，易知

$$y^2=(x^2+\frac{x+1}{2})^2-\frac{(x-3)(x+1)}{2}\qquad |x^2+\frac{x}{2}|=x^2+\frac{x}{2}$$

由此得出
$$x^2+\frac{x}{2}<|y|$$

如果 x 是一个偶数，则 $x^2+\frac{x}{2}$ 同样也是整数．这对较大的整数 $|y|$ 而言，表明它至少要比 $x^2+\frac{x}{2}$ 大 1．如果 x 是奇数，则 $x^2+\frac{x}{2}$ 位于两个相邻整数之间．因此，$|y|$ 必定至少大于 1/2．在每种情况下，均有

$$|y|\geqslant x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

$$y^2\geqslant x^4+x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=$$

$$x^4+x^3+x^2+1+(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{3}{4})=y^2+\frac{1}{4}(x^2-2x-3)$$

这就表明 $x^2-2x-3\leqslant 0$，因而 $(x+1)(x-3)\leqslant 0$，所以，x 必取 $-1,0,1,2,3$ 中的某个值．将 $x=1$ 和 $x=2$ 代入，则证明 $x^4+x^3+x^2+1$ 不是一个完全平方数．因而 x 只能是 $-1,0,3$．证毕．

§ 3　Edgur 猜想

其实这是一个著名问题的特例，出于研究有限群的需要，Edgur 提出了如下问题：除开 $\frac{3^5-1}{3-1}=11^2$ 外，方程

$$\frac{q^x-1}{q-1}=p^y \text{①} \qquad x \geqslant 5, y \geqslant 2 \qquad p, q \text{ 是素数} \tag{2}$$

是否存在另外的解.

曹珍富选择给出了方程(2)有解的充要条件，他证明了：

定理 1　设 $D=p(q-1)$，则方程(2)有 2 ∤ y 的解的充要条件是方程

$$x^2+Dy^2=q^z$$

有解 $x>0, y>0, z>0$，且 $x_1=1, y_1=p^{\frac{y-1}{2}}, z=x$. 这里 x_1, y_1, z_1 为满足 $x_1^2+Dy_1^2=q^{z_1}$ 的 $x_1>0, y_1>0$，使 z_1 为最小的正整数.

由此可推出，对给定的 p, q，方程(2)最多有一组解 x, y，另外曹珍富还定出了方程(2)的解 x, y 的上界，例如

$$x<\sqrt{pq(q-1)} \cdot \frac{\lg(pq(q-1))}{\lg q}$$

著名数论专家林仑格(Ljunggren)曾证明了方程 $\frac{x^n-1}{x-1}=y^2 (n \geqslant 4)$，仅有正整数解

$$\frac{7^4-1}{7-1}=20^2 \quad \text{和} \quad \frac{3^5-1}{3-1}=11^2$$

这是 Ljunggren 利用代数数论，在《Norsk Mur》Tidssdr 25，1943，17 ~ 20 中给出的. 1990 年曹珍富和吴波在《青年科技论文集》(黑龙江科学技术出版社)中的《关于丢番图方程 $\frac{x^n-1}{x-1}=y^2$ 的一个初等解法与 Edgur 方程》中给出了初等解法.

更为一般的方程是

$$\frac{x^n-1}{x-1}=y^m \qquad n \geqslant 3, m>1, |x|>1 \tag{3}$$

1920 年内格尔(Nugell)在《Norsk Mat》(Tidask)上证明了：

---

① 最近瑞士数学家 Preda Mihăilescu 在证明 Catalan 猜想时也将 $x^p-y^q=1$ 转换成形状 $\frac{x^p-1}{x-1}=pb^q$(下 b).

如果 $n \equiv 0 \pmod 4$，则方程(3)仅有整数解 $n = 4, x = 7, m = 2, y = \pm 20$.

1943 年 Ljunggren 证明了：

如果 $n \equiv 0 \pmod 3$，则方程(3)仅有解 $m = n = 3, x = 18$ 或 $-19, y = 7$.

如果 $m = 3, n \not\equiv -1 \pmod 6$，则方程(3)仅有解 $n = 3, x = 18$ 或 $-19, y = 7$.

由于在 $m = 2$ 时，利用卡塔兰方程 $x^2 - 1 = y^n (n > 1)$ 的结果知，方程(3)给出 $2 \nmid n$，于是方程(3)可化为

$$x(x^{\frac{n-1}{2}})^2 - (x - 1)y^2 = 1$$

所以利用佩尔(Pell)方程

$$z^2 - x(x - 1)y^2 = 1$$

的全部解可以给出 Ljunggren 定理的一个简短的初等证明.

1960 年柯召在《四川大学学报》上用不等式法证明了：

在 $m = 2, 2 \nmid n, |x| > 2^{n-2}$ 时，方程(3)无整数解.

1988 年，曹珍富创造了一种初等方法，步骤如下：

i) 把欲求的方程化为佩尔方程；

ii) 利用佩尔方程的解的性质，把欲求解的方程转化为与佩尔方程基本解有关的问题；

iii) 利用解析数论中关于基本解的估计定出解的不等式或解的上界.

他利用此方法，求解了方程

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = y^n \qquad m > 2, n > 1$$

此结论在 1988 年 9 月，山东大学纪念闵嗣鹤教授的学术报告会论文集中发表.

1972 年，Iukeri 在《Acta Arith》上发表文章考虑了更一般的方程

$$a\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^m \qquad n \geqslant 3, m > 1$$

的解，在 $1 < a < x \leqslant 10$ 时，他给出了方程(3)的全部解是 $n = a = 4, x = 7, m = 2, y = 40$.

当贝克(Baker)方程在丢番图方程领域大显身手的时候，Shorey 在 1986 年利用它证明了：如果 $\omega(h) = h - 2$，$\omega(h)$ 表示不同素因子的个数，则方程(3)仅有有限组解，如果 x 是一个 m 次幂，则 x, y, m, n 是可以有效计算的.

Shorey 还进一步用此方程考虑了方程

$$a\frac{x^m - 1}{x - 1} = y\frac{y^n - 1}{y - 1} \qquad x > 1, y > 1, m > 1, n > 1$$

§4　与之相关的盖尔芳特 - 贝克方法

对于此类问题人们还动用了盖尔芳特 - 贝克方法这样的高级工具. 在丢番

图方程中我们较常见的是如下一类所谓多项式方程,它通常可表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0\qquad x_1\in\Phi_1,x_2\in\Phi_2,\cdots,x_m\in\Phi_m$$

其中 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是未定义 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的整系数多项式,$\Phi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是未知数 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$ 取值的集合.

盖尔芳特-贝克方法就是用来估计此类型方程解的上限,这一方法的提出与希尔伯特的第七问题有关.

问题　当 α 为不等于0或1的代数数,β 为非有理数的代数数时,α^β 是不是超越数?

1934年苏联数学家盖尔芳特(Gel'foud)和德国数学家施奈德(Schneider)分别独立地解决了这一问题.他们的结果可以等价地表述为:

定理2　对于非零代数数 α_1,α_2,如果 $\lg\alpha_1,\lg\alpha_2$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上线性无关,则它们在 A(全体代数数)上也线性无关.

1955年,盖尔芳特提出可否将其推广到任意多个非零代数数的情况.

1966年英国数学家贝克(Baker)完整地解决了这一猜想,他证明了:

定理3　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是非零代数数,如果 $\lg\alpha_1,\cdots,\lg\alpha_n$ 在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关,则 $1,\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_n$ 在 A 上同样线性无关.

设 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是非零代数数,此时

$$\Lambda=\beta_0+\beta_1\lg\alpha_1+\cdots+\beta_n\lg\alpha_n$$

称为关于代数数 $1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的对数线性,由贝克定理可知,当 $\lg\alpha_1,\cdots,\lg\alpha_n$ 在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关时,必有 $\Lambda\neq0$,在此条件下盖尔芳特首先对 $n=2$ 的情况给出了 $|\Lambda|$ 的可有效计算的下界,他证明了:当 $n=2$ 且 $\beta_0=0$ 时,对于任何正数 δ 必有

$$\lg|\Lambda|>-C_1(\delta,d,A)(\lg B)^{5+\delta}$$

其中 $d=[Q(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2):Q]$,$A,B$ 分别是两组代数数 α_1,α_2,以及 β_1,β_2 的高的最大值,$C_1(\delta,d,A)$ 是仅与 δ,d,A 有关的可有效计算的正常数.

1968年贝克又将其推广为:

定理4　当 $\Lambda\neq0$ 时,对任何正数 δ 必有

$$\lg|\Lambda|>-C_2(\delta,n,d,A)(\lg B)^{n+1+\delta}$$

其中 $d=[Q(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n):Q]$;$A,B$ 分别是代数数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 以及 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的高的最大值,$C_2(\delta,n,d,A)$ 是仅与 δ,n,d,A 有关的可有效计算的正常数.

这个结果对许多丢番图方程都有应用,现在我们从另一个角度看 Edgar 问题:

设 k 是一个大于1的整数,此时,任何给定的正整数 a 都可惟一地表示成

$$a = b_0 + b_1k + \cdots + b_tk^t \tag{4}$$

其中 t 是非负整数，$b_i(i = 0,1,\cdots,t)$ 是适合 $0 \leqslant b_i \leqslant k-1$ 的整数，此式称为 a 的 k - adic 表示．当式(4) 中的 $b_i(i = 0,1,\cdots,t)$ 都等于1时，a 称为 k - adic 重单位数．

从式(4) 知如此的 a 满足

$$a = \frac{k^{t+1}-1}{k-1}$$

由于数论、群论及组合数学中很多重要问题都与重单位数中的完全方幂有关，所以研究

$$\frac{x^m-1}{x-1} = y^n \qquad x,y,m,n \in \mathbf{N}, x > 1, y > 1, m > 2, n > 2 \tag{5}$$

是重要的．

Shorey 和 Tijdeman 曾提出如下猜想：

猜想　方程(5) 仅有有限多组解 (x,y,m,n)．

1976 年，Shorey 和 Tijdeman 根据盖尔芳特 - 贝克方法，在超椭圆方程方面取得的结果，证明了在方程(5) 的4个未知数 x,y,m,n 中至少有一个是给定的数或有给定的素因数时，该方程仅有有限多组解 (x,y,m,u)，而且这些解都是可以有效计算的，1993 年，乐茂华先生综合运用丢番图逼近方法和盖尔芳特 - 贝克方法去掉了上述限制，他证明了：

方程(5) 仅有有限组解 (x,y,m,n) 适合 $y \equiv 1 \pmod 4$ 以及 x 是素数的方幂，且这些解都满足 $x^m < C_1$．

1996 年袁平之在《数学学报》上发表了"关于丢番图方程 $\frac{x^m-1}{x-1} = y^n$ 的一个注记"的文章，他去掉了上述定理中"x 是素数方幂"的这个条件．

在本节开始提到的竞赛题相当于

$$\frac{3^5-1}{3-1} = 11^2$$

孙琦于 1986 年在《数学研究与评论》上发表的"有限群中一个未解决问题"中提出方程 $\frac{3^m-1}{3-1} = q^n, q \in p^*$ (p^* 为全体素数及其方幂的集合)，$m,n \in \mathbf{N}$，$m > 2, n > 1$ 是否仅有上面那一组解时之后，乐茂华利用盖尔芳特 - 贝克定理具体地得出该方程的解 (q,m,n) 都满足

$$q < 10^{6\cdot 10^9} \qquad m < 1.4\cdot 10^{15} \qquad n < 1.2\cdot 10^5$$

从希望杯竞赛试题到约当不等式

刘培杰

§1 约当不等式

约当(Jordan Camille 1838 - 1 - 5—1922 - 1 - 21)是法国著名数学家.他毕业于多科工艺学校,先后在多科工艺学校和法兰西学院任教.1881 年被选为法兰西科学院院士.1885 年至 1921 年担任法国数学杂志《纯粹数学与应用数学》的主编.1895 年被选为彼得堡科学院院士.

1893 年约当的《分析教程》(Coursd'analyse)第二版出版,这是 19 世纪的标准教科书,其中约当首次引入了一个不等式:

约当不等式 $$\frac{\sin\theta}{\theta}\geqslant\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\tag{1}$$

等号当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时成立.

他给出的证明十分简洁:

对不等式 $\sec^2\theta\geqslant 1\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 的两边在区间 $(0,\theta)$ 上积分,得到

$$\tan\theta\geqslant\theta\qquad 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$$

因此,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=\frac{\cos\theta}{\theta^2}(\theta-\tan\theta)\leqslant 0\qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

即 $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$ 是减函数,故

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \geqslant \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

证毕.

如果再注意到一个更常用的不等式

$$\sin\theta \leqslant \theta \qquad \theta \geqslant 0$$

可得

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \qquad 0 < |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

对于不等式(2)还可以利用 $\sin\theta$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的凸性来证明：

直线 $y = \frac{2}{\pi}\theta$ 是 $y = \sin\theta$ 的一条弦，它通过$(0,0)$和$(\frac{\pi}{2},0)$两点，直线 $y = \theta$ 是 $y = \sin\theta$ 在原点处的切线，因此，$y = \sin\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ 的图形位于这两条直线之间，故不等式(2)成立.

§2 约当不等式的应用

约当不等式在各类数学竞赛中都有许多应用，仅举几例说明.

例 1 试证：当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时，$\sin x < \sqrt{\frac{2}{\pi}x}$.

(1996 年第 7 届"希望杯"数学竞赛高二第二试试题)

证明 由约当不等式 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$，令 $t = \frac{\pi}{2} - x$，则

$$\sin(\frac{\pi}{2} - t) > \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - t) \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

即
$$\cos t > 1 - \frac{2}{\pi}t \Rightarrow \sin^2\frac{t}{2} < \frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2} \Rightarrow \sin\frac{t}{2} < \sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2}}$$

记 $\frac{t}{2} = x$，即得 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时

$$\sin x < \sqrt{\frac{2}{\pi}x}$$

例 2 设整数 $d \geqslant 1$，且 d 不是整数的平方，试证：对于每个整数 $n \geqslant 1$，有

$$(n\sqrt{d} + 1)\,|\sin(n\pi\sqrt{d})| \geqslant 1$$

(1985 年第 26 届 IMO 预选题)

证明　因为 d 不是完全平方数，所以存在整数 k，满足 $k < n\sqrt{d} < k+1$，分两种情况讨论：

(1) 当 $k < n\sqrt{d} \leqslant k+\frac{1}{2}$ 时

$$k\pi < n\pi\sqrt{d} \leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$$

于是 $n\pi\sqrt{d}$ 位于第一象限和第三象限．而 $y=|\sin x|$ 在 $\left[k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数．

又因为 $k^2 < n^2 d$，所以

$$k^2+1 \leqslant n^2 d \Rightarrow n\pi\sqrt{d} \geqslant \sqrt{k^2+1}\pi \Rightarrow |\sin(n\pi\sqrt{d})| \geqslant$$
$$|\sin\sqrt{k^2+1}\pi| = \sin(\sqrt{k^2+1}\pi-k\pi) =$$
$$\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k} > \sin\frac{\pi}{2(k+1)}$$

由约当不等式可得

$$\sin\frac{\pi}{2(k+1)} > \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2(k+1)} = \frac{1}{1+k} > \frac{1}{1+n\sqrt{d}}$$

(2) 当 $k+\frac{1}{2} < n\sqrt{d} < k+1$ 时

$$k\pi+\frac{\pi}{2} < n\pi\sqrt{d} < k\pi+\pi$$

于是 $n\pi\sqrt{d}$ 位于第二象限和第四象限，而 $y=|\sin x|$ 在第二象限和第四象限是减函数．又因为 $n\sqrt{d} < k+1$，所以

$$n^2 d < k^2+2k+1 \Rightarrow n^2 d \leqslant k^2+2k \Rightarrow n\sqrt{d} \leqslant \sqrt{k^2+2k}$$

这时就有

$$|\sin(n\pi\sqrt{d})| \geqslant |\sin\sqrt{k^2+2k}\pi| =$$
$$\sin[(k+1)\pi-\sqrt{k^2+2k}\pi] =$$
$$\sin\frac{\pi}{k+1+\sqrt{k^2+2k}} > \sin\frac{\pi}{2(k+1)}$$

由约当不等式可得

$$\sin\frac{\pi}{2(k+1)} > \frac{\pi}{2(k+1)}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{k+1} > \frac{1}{1+n\sqrt{d}}$$

于是
$$(n\sqrt{d}+1)|\sin(n\pi\sqrt{d})| \geqslant 1$$

§3 几个练习题

1. 试证：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，不等式 $\frac{2\cos x}{1+\cos x} < \frac{\sin x}{x}$ 成立。

（第 15 届全俄罗斯数学竞赛试题）

2. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，试证：$\frac{3x}{\sin x} > 4 - \cos x$.

（提示：将原不等式变形为 $3x - 4\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x > 0$，引进函数 $f(x) = 3x - 4\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x = x(3 - 4\cdot\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{2x})$，由 Jordan 不等式的证明 $\frac{\sin x}{x}$，$\frac{\sin 2x}{2x}$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为减函数，可知 $f(x)$ 为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的增函数，故 $f(x) > f(0) = 0$.）

3. 设 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$，求证：

$$(2\alpha - 1)\sin x + (1-\alpha)\sin(1-\alpha)x \geqslant 0$$

（提示：由于 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内是减函数，而 $(1-\alpha)x < x$，所以有 $\frac{\sin(1-\alpha)x}{(1-\alpha)x} \geqslant \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \sin(1-\alpha)x \geqslant (1-\alpha)\sin x \Rightarrow (1-\alpha)\sin(1-\alpha) \geqslant (1-\alpha)^2\sin\alpha \geqslant (1-2\alpha)\sin\alpha \Rightarrow (2\alpha-1)\sin\alpha + (1-\alpha)\sin(1-\alpha)x \geqslant 0$. 当 $\alpha = 0, 1$ 及 $x = 0, \pi$ 时不等式显然成立.）

4. 求证：$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant 2\sqrt{\pi}$ 对一切实数 x 成立.

（1996 年浙江省高中数学竞赛试题）

（提示：首先考察 $x \in (0, \pi)$，取 m 为某个自然数，使 $m \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{x} < m+1$ 成立，则 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|$，这里当 $m = 0$ 时，右边每项为 0；当 $m \geqslant n$ 时，右边第二项为 0，由于 $\sin kx < kx$，故

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{kx}{x} = mx < \sqrt{\pi}$$

利用阿贝尔不等式，有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{m+1}$$

29

再由 Jordan 不等式：$\sin\frac{x}{2}\geqslant\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{\pi}$ 及 $m+1>\frac{\sqrt{\pi}}{x}$，有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\frac{1}{\frac{x}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{x}}=\sqrt{\pi}$$

故当 $x\in(0,\pi)$ 时，所求证的不等式成立.

其次，当 $x\in(-\pi,0)$ 时，由于 $f(x)=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|$ 为偶函数，故所求证的不等式成立. 此外，当 $x=\pm\pi,0$ 时，所求证不等式显然成立.

由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，故对一切实数 x，所求证的不等式成立.)

§4 约当不等式的推广

约当不等式已有许多推广，仅以《Amer Math Monthly》及《J. Approx. Theory》上刊登的结果有以下几个：

定理 1 设 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，则

$$\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x+\frac{x}{12\pi}(\pi^2-4x^2)$$

定理 2 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则

$$x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$

$$\left|\sin x-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

而且这个差具有 $(-1)^n$ 的符号.

定理 3 （Redheffer 不等式）对于所有实数 $x\neq 0$，有 $\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}$.

这是 R. Redheffer 于 1969 年得到的结果，该不等式与约当不等式互不包含.

定理 4 对所有 $x\neq 0$，存在常数 $c>0$，使得

$$1-\frac{x^2}{6}<\frac{\sin x}{x}<1-\frac{cx^2}{1+x^2}$$

定理 5 存在常数 $a,b>0$，使得

$$1-\frac{\sin x}{x}\geqslant\begin{cases}a & |x|>1\\ bx^2 & |x|\leqslant 1\end{cases}$$

定理 6 $\sin x \geqslant \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x/5} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 53x/(53x + 9x^2) & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3} \\ (3\sqrt{3}/2\pi)x & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

定理 7 $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{2\cos x}{1 + \cos x} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

定理 8 $\left|\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{\pi} & 0 < |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \sqrt{2} - \dfrac{4}{\pi} & 0 < |x| \leqslant \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Mathematics, like philosophy, is virtually inseparable from its history.

——宋德华

从全国高中数学联赛试题谈反向不等式

刘培杰

§1 从一个联赛试题的证明谈起

1998 年全国高中数学联赛第二试的第二题为

试题 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in [1,2]$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

它的证明"起点很低"，是从一个简单的不等式开始的.

一般地，在正数 x, y 的比 $\frac{y}{x} \in [m, M]$，$(m > 0)$ 时，有 $0 \leqslant (y - mx) \times (Mx - y)$，由此可得

$$(M + m)xy \geqslant y^2 + Mmx^2$$

现在取 $m = \frac{1}{2}, M = 2, x = b_i, y = a_i$，可得

$$a_ib_i \geqslant \frac{2}{5}(a_i^2 + b_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant \frac{2}{5}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \frac{4}{5}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{1}$$

再取 $x = \sqrt{a_ib_i}, y = \sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}$，得

$$\frac{5}{2}a_i^2 \geqslant a_ib_i + \frac{a_i^3}{b_i} \Rightarrow \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \tag{2}$$

式(1)、(2)结合得

$$\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \frac{4}{5}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

等号当且仅当 n 为偶数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有一半取 1，另一半取 2，$b_i = \frac{2}{a_i}, i =$

$1,2,\cdots,n$ 时成立.

这道试题具有"悠久"的历史背景，它与许多诸如 Schweitzer，Diaz—Metialf、Rennie 不等式相关，并且这些不等式都有一个共同的特点，它们都是所谓的反向不等式.

§2　反向不等式

对于不等式 $2xy \leqslant x^2 + y^2$ 我们大家都很熟悉，但对于反向不等式 $xy \geqslant c_1x^2 + c_2y^2$ 都很陌生，其实这一直是不等式研究的一个热点.

早在 1914 年，P.Schweitzer 就首先证明了一个反向不等式.

Schweitzer 不等式　若 $0 < m \leqslant a_n \leqslant M, k = 1,\cdots,n$，则有不等式 $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}) \leqslant \frac{(M+m)^2}{4Mm}$.

1925 年 G.Pólya 和 G.Szeyö 进一步将其推广如下：

Pólya – Szeyö 不等式　设 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2, k = 1,\cdots,n$，有

$$\frac{(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2)}{(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k)} \leqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}} + \sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}}{2}\right)^2$$

等号当且仅当

$$k = \frac{\frac{M_1}{m_1}}{\frac{M_1}{m_1} + \frac{M_2}{m_2}}n \qquad L = \frac{\frac{M_2}{m_2}}{\frac{M_1}{m_1} + \frac{M_2}{m_2}}n$$

是正整数，且数 $a_1,\cdots,a_n$ 中有 k 个等于 m，L 个等于 M_1，以及相应的数 b_k 分别等于 M_2 和 m_2 时成立.

1948 年，苏联数学家康托洛维奇（Kantorovič 1912—　）在苏联 uspehi Mat. Nauk 上一篇"Functional analysis and applied math ematics"上又将其推广为：

康托洛维奇不等式　设 $0 < m \leqslant \gamma_k \leqslant M, k = 1,\cdots,n$，有不等式

$$(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k\mu_k^2)(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma_k}\mu_k^2) \leqslant \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}})^2(\sum_{k=1}^{n} u_k^2)^2$$

值得一提的是，康托洛维奇是一位天才的数学家，从小就显示出非凡的数学天才，14 岁进入列宁格勒大学，并成为斯米尔诺夫（Smirnor, Vladimir

Ivanovič）等人主持的讨论班的积极参加者，20 岁开始担任教授工作，22 岁被正式任命为教授，23 岁未经答辩就被授予博士学位. 1949 年获苏联国家奖金；1959 年获列宁奖金；1975 年获诺贝尔经济学奖. 正是由于康托洛维奇的杰出表现，所以提到反向不等式便首推康托洛维奇不等式.

1959 年 W. Greub 和 W. Rheinboldt 证明了：

Greub-Rheinboldt 不等式 设 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2, k = 1, \cdots, n$，则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 u_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 u_k^2) \leqslant \frac{(M_1 M_2 + m_1 m_2)^2}{4 m_1 m_2 M_1 M_2}(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k u_k^2)^2$$

§3 康托洛维奇不等式的几种证法

一般在中学范围内，康托洛维奇不等式常被简化为如下形式：

设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，又 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，则有

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i}) \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}$$

下面介绍几种简单证法.

证法 1 构造二次函数

$$f(x) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i}) x^2 - (\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}}) x + (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i)$$

则

$$\begin{aligned} f(\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}) = & (a_1 \lambda_n + a_n \lambda_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i \frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_i}) - \\ & (\lambda_1 + \lambda_n) + (a_1 \lambda_1 + a_n \lambda_n + \sum_{i=2}^{n-1} a_i \lambda_i) = \\ & -(\lambda_1 + \lambda_n)(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + \\ & \sum_{i=2}^{n-1} (\frac{\lambda_1 \lambda_n + \lambda_i^2}{\lambda_i}) a_i = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_n - \lambda_i)}{\lambda_i} \leqslant 0 \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 的开口向上，故抛物线必与 x 轴相交，从而判别式 $\Delta \geqslant 0$，故有

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i}) \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}$$

证法 2 要证原不等式成立，只需证不等式

$$2\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i)(\lambda_1 \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i})} - (\lambda_1 + \lambda_n) \leqslant 0$$

由平均值不等式，有

$$\text{左边} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \lambda_1 \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} - (\lambda_1 + \lambda_n) =$$

$$\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i + \lambda_1 a_1 + \lambda_n a_n\right) + \left(\lambda_n a_1 + \lambda_1 a_n + \lambda_1 \lambda_n \sum_{i=2}^{n-1} \frac{a_i}{\lambda_i}\right) =$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \frac{\lambda_1 \lambda_n + \lambda_i^2}{\lambda_i} a_i - (\lambda_1 + \lambda_n)(a_2 + a_3 + \cdots + a_n) =$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_n - \lambda_i)}{\lambda_i} a_i \leqslant 0$$

故原不等式成立.

证法 3　由 $(\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_n - \lambda_i) \leqslant 0$，有

$$(\lambda_1 + \lambda_n)\lambda_i \geqslant \lambda_1 \lambda_n + \lambda_i^2$$

两边同乘 $\frac{a_i}{\lambda_i}$ 后再求和，并注意到 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，得

$$\lambda_1 + \lambda_n \geqslant \lambda_1 \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$$

同除以 $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}$ 后平方，并用平均值不等式，得

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n} \geqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\lambda_1 \lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)^2 \geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)$$

昆明师院施恩伟给出如下简单证法：

证法 4　当 $\lambda_1 = \lambda_n$ 时，结论显然成立；当 $\lambda_1 \neq \lambda_n$ 时，令 $a_i \lambda_i = u_i \lambda_1 + v_i \lambda_n$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 易知 $u_i \geqslant 0, v_i \geqslant 0$，而且

$$a_i^2 = (a_i \lambda_i)(a_i \lambda_i^{-1}) = u_i^2 + u_i v_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) + v_i^2 \geqslant (u_i + v_i)^2$$

从而有 $a_i \geqslant u_i + v_i$，因此可得到

$$(u + v)^2 \leqslant \left(\sum a_i\right)^2 = 1 \quad \left(u = \sum u_i, v = \sum v_i\right)$$

所以

$$\left(\sum a_i \lambda_i\right)\left(\sum a_i \lambda_i^{-1}\right) = \left(\sum u_i \lambda_1 + \sum v_i \lambda_n\right)\left(\sum u_i \lambda_1^{-1} + \sum v_i \lambda_n^{-1}\right) =$$

$$u^2 + uv\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) + v^2 = (u + v)^2 + uv \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n} \leqslant$$

$$(u + v)^2 + \frac{(u + v)^2}{4} \cdot \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n} \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}$$

康托洛维奇不等式的矩阵形式为：设 $Q_{n \times n}$ 为正定矩阵，a, A 为 Q 的最小及最大

特征值，则对任一矢量 X 有

$$\frac{(X'QX)(X'Q^{-1}X)}{(X'X)^2} \leqslant \frac{(a+A)^2}{4aA}$$

§4　三个竞赛试题

反向不等式最早出现在数学竞赛中是在 1977 年的美国第六届奥林匹克试题.

试题 2　如果 a,b,c,d,e 是介于 p 和 q 之间的五个正数，就是 $0 < p \leqslant a,b,c,d,e \leqslant q$，求证

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \leqslant 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

且决定何时等式成立.

这个题出的很好，因为它并不是 Schweitzer 不等式当 $n=5$ 时的特例. 当 $n=5$ 时，Schweitzer 不等式为

$$\left[\frac{1}{5}(a+b+c+d+e)\right]\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\right] \leqslant \frac{(p+q)^2}{4pq} \Rightarrow$$

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \leqslant$$

$$25\left[\frac{4pq+(p^2-2pq+q^2)}{4pq}\right] = 25 + \frac{25}{4}\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

而 $\frac{25}{4} > 6$，所以 Schweitzer 不等式在 $n=5$ 时弱于证题 2，所以必须做更细致的分析，我们在此介绍两种证法.

证法 1　假定 a,b,c,d 是给定的，那么要求 e 使

$$(u+e)\left(v+\frac{1}{e}\right) = uv + 1 + ev + \frac{u}{e}$$

最大，其中

$$u = a+b+c+d \qquad v = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

因为
$$ev + \frac{u}{e} = \left(\sqrt{ev} - \sqrt{\frac{u}{e}}\right)^2 + 2\sqrt{uv}$$

故当 $\sqrt{ev} = \sqrt{\frac{u}{e}}$，即 $e = \sqrt{\frac{u}{v}}$ 时，上式取最小值，并且当由 $\sqrt{\frac{u}{v}}$ 开始逐渐增加或减小时 $ev + \frac{u}{e}$ 的值都单调地上升，于是当 e 等于 p 或 q 时 $ev + \frac{u}{e}$ 取到最大值.

同理可知,当 a,b,c,d,e 取极端值 p 或 q 时,$(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e})$ 取得它的最大值.

设 a,b,c,d,e 中有 k 个取值 p 和 $(5-k)$ 个取值 q;我们希望确定 k 使

$$(kp+(5-k)q)(\frac{k}{p}+\frac{5-k}{q})$$

最大,这个式子等于

$$k^2+(5-k)^2+k(5-k)(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}) = k(5-k)(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}})^2+25$$

当正整数 $k=2$ 或 3 时上式最大,所以

$$(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}) \leqslant 25+6(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}})^2$$

当 a,b,c,d,e 中有两数或三数等于 p,其余等于 q 时,等式就成立.

证法 2 由 Lagrange 恒等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=$$
$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2+\sum(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

得

$$(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e})=$$
$$25+\sum(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})^2 \quad (3)$$

当 $A,B\geqslant 1$ 时,$(A^2-1)(B^2-1)+(\frac{1}{A^2}-1)(\frac{1}{B^2}-1)\geqslant 0$,从而

$$(A-\frac{1}{A})^2+(B-\frac{1}{B})^2 \leqslant (AB-\frac{1}{AB})^2$$

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$,运用上式得

$$\left(\sqrt{\frac{e}{d}}-\sqrt{\frac{d}{e}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{d}{a}}-\sqrt{\frac{a}{d}}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{\frac{e}{a}}-\sqrt{\frac{a}{e}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{e}{c}}-\sqrt{\frac{c}{e}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{\frac{e}{a}}-\sqrt{\frac{a}{e}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{e}{b}}-\sqrt{\frac{b}{e}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{\frac{e}{a}}-\sqrt{\frac{a}{e}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{d}{c}}-\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}-\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{\frac{d}{b}}-\sqrt{\frac{b}{d}}\right)^2$$

从而式(3)右边 $\leqslant 25+6(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}})^2$. 等号当且仅当 a,b,c,d,e 中有两个或

三个取 q，其余取 p 时成立.

证法 3　用凸函数理论，令

$$F(a,b,c,d,e)=(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$$

那么当 a,b,c,d,e 中五个数固定时，$F(a,b,c,d,e)$ 是剩下的那个变量的下凸函数. 所以 $F(a,b,c,d,e)$ 是每个变量的下凸函数，于是 $F(a,b,c,d,e)$ 只有当 a,b,c,d,e 取极端值 p 和 q 时才能达到最大. 以下同证法 1.

以上三种证法都具有一般性，可以将试题 2 推广到一般情况：

设 $0<p\leqslant a_k\leqslant q,k=1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\leqslant n^2+\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

试题 3　若数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，其中 $0<a<b$. 证明不等式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$$

（1978 年第十二届全苏数学奥林匹克九年级题 7）

这就是 Schweitzer 不等式的简单变形.

§5　利用几何凸函数证明 Schweitzer 不等式

1992 年浙江电视大学海宁学院的张小明提出了几何凸函数的概念并借此给出了一个新证明.

我们先介绍控制的概念：

定义 1　设向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 中分量的递减重排，若对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，有

$$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\geqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]},\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum_{i=1}^{n}y_{[i]}$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 控制 $\boldsymbol{y}$，记为 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$.

再介绍几何凸概念：

定义 2　设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，有 $f(\sqrt{x_1x_2})\leqslant\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$，那么称 $f(x)$ 在 I 上是几何下凸的；若不等式反向，称 $f(x)$ 在 I 上是几何上凸的.

几何凸函数理论只有与控制不等式理论相结合，才能发挥巨大作用，为此

还需引入以下定义：

定义 3　设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E\subseteq R_+^n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E$，把 x,y 中的分量从大到小重排列后，记为 $(x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]})$ 和 $(y_{[1]},y_{[2]},\cdots,y_{[n]})$，若有

$$\begin{cases}\prod_{i=1}^{k}x_{[i]}\geqslant\prod_{i=1}^{k}y_{[i]}, & k=1,2,\cdots,n-1\\ x_1x_2\cdots x_n=y_1y_2\cdots y_n\end{cases}$$

此称 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对数控制 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记为 $\ln x\succ\ln y$.

为证明 Schweitzer 不等式我们先证一个引理：

引理　存在自然数 k_0，$1\leqslant k_0\leqslant n-1$，使得

$$\ln(\underbrace{M,\cdots,M}_{k_0\text{个}},\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}},m,\cdots,m)\succ\ln(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

证明　由于 $m^{n-1}M\leqslant s^n\leqslant mM^{n-1}$，$s^n$ 在递减数组 $\{m^{n-1}M,\cdots,m^{n-k}M^k,\cdots,mM^{n-1}\}$ 的两个数之间，设 $m^{n-k_0}M^{k_0}\leqslant s^n\leqslant m^{n-k_0-1}M^{k_0+1}$，往证

$$\ln(\underbrace{M,\cdots,M}_{k_0\text{个}},\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}},m,\cdots,m)\succ\ln(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

不妨设 $M=a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n=m>0$，当 $i\leqslant k_0$ 时，显然有

$$M^i\geqslant a_1\cdots a_i$$

当 $i=k_0+1$ 时，有

$$s^n=a_1\cdots a_{k_0+1}\cdots a_n$$

$$s^n\geqslant a_1\cdots a_{k_0+1}\cdots a_im^{n-i}$$

$$\underbrace{M\cdots M}_{k_0\text{个}}\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}\geqslant a_1\cdots a_{k_0+1}$$

当 $i>k_0+1$ 时，有

$$s^n=a_1\cdots a_{k_0+1}\cdots a_n$$

$$s^n\geqslant a_1\cdots a_{k_0+1}m^{n-i}$$

$$\underbrace{M\cdots M}_{k_0\text{个}}\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}m^{i-k_0-1}\geqslant a_1\cdots a_{k_0+1}\cdots a_i$$

至此引理得证.

下面我们来证明 Schweitzer 不等式.

设 $0<m\leqslant a_i\leqslant M$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

证明 不妨设 m,M 为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的最小值和最大值，因为 $a_i,\frac{1}{a_i}$, $i=1,2,\cdots,n$，都是几何凸函数，所以 $\sum_{i=1}^{n}a_i,\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ 为几何凸函数，$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ 为几何凸函数. 由引理知 $(\underbrace{M,\cdots,M}_{k_0个},\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}},m,\cdots,m)$ 对数控制 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，所以有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant\frac{1}{n^2}[k_0M+(n-k_0-1)m+\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}]\cdot[\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m}+\frac{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}{s^n}]$$

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant$$

$$\frac{1}{n^2}[k_0^2+(n-k_0-1)^2+1+k_0(n-k_0-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+$$

$$\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}(\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m}+\frac{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}{s^n})[k_0M+(n-k_0-1)m]$$

因 $f(t)=\frac{t}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}(\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m})+\frac{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}{t}[k_0M+(n-k_0-1)m]$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个极小值，所以对于 $f(s^n)$ 和 $m^{n-k_0}M^{k_0}\leqslant s^n\leqslant m^{n-k_0-1}M^{k_0+1}$，有

$$f(s^n)\leqslant f(m^{n-k_0}M^{k_0})=$$

$$m(\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m})+\frac{1}{m}[k_0M+(n-k_0-1)m]=$$

$$k_0(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2(n-k_0-1)$$

与

$$f(s^n)\leqslant f(m^{n-k_0-1}M^{k_0+1})=M(\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m})+$$

$$\frac{1}{M}[k_0M+(n-k_0-1)m]=(n-k_0-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2k_0$$

之一成立. 即有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant$$

$$\frac{1}{n^2}[k_0^2+(n-k_0-1)^2+1+k_0(n-k_0-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+$$

$$k_0(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2(n-k_0-1)] \tag{4}$$

与

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant$$
$$\frac{1}{n^2}[k_0^2+(n-k_0-1)^2+1+k_0(n-k_0-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+$$
$$(n-k_0-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2k_0] \tag{5}$$

之一成立. 对于式(4), 右边为 k_0 的一元二次多项式, 考虑其二次项系数 $-(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}-2)$ 和一次项系数 $n(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}-2)$; 对于式(5), 右边为 k_0 的一元二次多项式, 考虑其二次项系数 $-(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}-2)$ 和一次项系数 $(n-2)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}-2)$, 利用抛物线的极大值点的性质, 有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant$$
$$\frac{1}{n^2}[(\frac{n}{2})^2+(n-\frac{n}{2}-1)^2+1+\frac{n}{2}(n-\frac{n}{2}-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+$$
$$\frac{n}{2}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2(n-\frac{n}{2}-1)]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})=\frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

或

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant\frac{1}{n^2}[(\frac{n-2}{2})^2+(n-\frac{n-2}{2}-1)^2+1+$$
$$\frac{n-2}{2}(n-\frac{n-2}{2}-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+(n-\frac{n-2}{2}-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2\,\frac{n-2}{2}]=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})=\frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

这就证明了所言不等式. 我们还可以把 Schweitzer 不等式加强为:

定理 1 设 $0<m\leqslant a_i\leqslant M, i=1,2,\cdots,n$, 则当 n 为偶数时, 有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

当 n 为奇数时, 有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}-\frac{(M-m)^2}{4n^2Mm}$$

证明 分析一下式(4)和式(5), 当 n 为奇数时, 自然数 k_0 是取不到 $\frac{n}{2}$ 和 $\frac{n-2}{2}$, 只能在 $\frac{n-1}{2}$ 处取到最大值, 此时

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant\frac{1}{n^2}[(\frac{n-1}{2})^2+(n-\frac{n-1}{2}-1)^2+1+\frac{n-1}{2}(n-\frac{n-1}{2}-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+\frac{n-1}{2}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2(n-\frac{n-1}{2}-1)]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{4n^2}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})=\frac{(M+m)^2}{4Mm}-\frac{(M-m)^2}{4n^2Mm}$$

或

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant\frac{1}{n^2}[(\frac{n-1}{2})^2+(n-\frac{n-1}{2}-1)^2+1+\frac{n-1}{2}(n-\frac{n-1}{2}-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+(n-\frac{n-1}{2}-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2\,\frac{n-1}{2}]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{4n^2}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})=\frac{(M+m)^2}{4Mm}-\frac{(M-m)}{4n^2Mm}$$

命题得证.

§6 康托洛维奇不等式特例的证明

试题 4 已知 $0\leqslant a_1,0\leqslant a_2,0\leqslant a_3,a_1+a_2+a_3=1,0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$，求证：下面不等式成立

$$(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3)(\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\frac{a_3}{\lambda_3})\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3}$$

(1979 年北京市高中竞赛第二试试题 5)

此题为康托洛维奇不等式的 $n=3$ 时的特例，证明参见 §3，下面再介绍两种中学生更易于接受的证法.

证法 4 由 $a_1+a_2+a_3=1$ 得

$$a_2+a_3=1-a_1$$

$$a_1(a_2+a_3)=a_1(1-a_1)\leqslant\frac{1}{4}$$

所以

$$a_1a_2\leqslant\frac{1}{4}-a_3a_1$$

同理 $$a_2a_3 \leqslant \frac{1}{4} - a_3a_1$$

另一方面

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2 = (\lambda_3 - \lambda_1)(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3}) =$$

$$[(\lambda_3 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)][(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}) + (\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3})] \geqslant$$

$$(\lambda_3 - \lambda_2)(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3}) + (\lambda_2 - \lambda_1)(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})$$

所以 $$(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 2) + (\frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - 2) \leqslant (\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2)$$

于是 $$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3} - (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3)(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} + \frac{a_3}{\lambda_3}) =$$

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3} - [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) +$$

$$a_2a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}) + a_3a_1(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1})] =$$

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3} - [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_2a_3 + 2a_3a_1 +$$

$$a_1a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 2) + a_2a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - 2) + a_3a_1(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2)] =$$

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3} - (a_1 + a_2 + a_3)^2 - a_1a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 2) -$$

$$a_2a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - 2) - a_3a_1(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2) =$$

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3} - 1 - a_1a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 2) - a_2a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - 2) -$$

$$a_3a_1(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2) = \frac{1}{4}(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2) - a_1a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 2) -$$

$$a_2a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - 2) - a_3a_1(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2) \geqslant$$

$$(\frac{1}{4} - a_3a_1)(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2) - (\frac{1}{4} - a_3a_1) \times [(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 2) +$$

$$(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - 2)] \geqslant (\frac{1}{4} - a_3a_1)(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2) -$$

$$(\frac{1}{4} - a_3a_1)(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} - 2) = 0$$

所以有

$$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3)\left(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} + \frac{a_3}{\lambda_3}\right) \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3}$$

成立.

证法 4 是演绎推证的,不便于推广为一般形式的证明,我们再介绍利用数学归纳法的证明:

证法 5 (1) 当 $n = 2$ 时,$a_1 + a_2 = 1$,且 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2$,则

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)\left(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2}\right) = a_1^2 + a_2^2 + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2}a_1 a_2 =$$

$$(a_1 + a_2)^2 + a_1 a_2\left(\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2} - 2\right) = 1 + a_1 a_2\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2} \leqslant$$

$$1 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2}$$

其中,由于$(a_1 + a_2)^2 = 1$,$a_1^2 + a_2^2 \geqslant 2a_1a_2$,所以

$$0 < a_1 a_2 \leqslant \frac{1}{4}$$

即 $n = 2$ 时,命题成立.

假设 $n = k$ 时命题为真,今考虑 $n = k + 1$ 的情形,下面分两种情况考虑:

i) 若 $\lambda_{k+1} = \lambda_k$,注意到

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i}{\lambda_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_i + \lambda_k a_k + \lambda_{k+1}a_{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{a_i}{\lambda_i} + \frac{a_k}{\lambda_k} + \frac{a_{k+1}}{\lambda_{k+1}}\right) =$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_i + \lambda_k(a_k + a_{k+1})\right]\left[\sum_{i=1}^{k-1}\frac{a_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_k}(a_k + a_{k+1})\right]$$

显然化为 $n = k$ 的情形,只需注意到这时 $a'_k = a_k + a_{k+1}$ 即可.

ii) 若 $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ 且 $\lambda_k \neq \lambda_1$(否则可化为 i) 的情形),我们先来证明存在 x 满足

$$\lambda_k \leqslant \lambda_1 x + (1 - x)\lambda_{k+1} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\lambda_k} = \frac{x}{\lambda_1} + \frac{1 - x}{\lambda_{k+1}} \tag{7}$$

由式(7) 解得

$$x = \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\Big/\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_k}\cdot\frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_1}$$

又由式(6) 有 $x(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \geqslant \lambda_k - \lambda_{k+1}$,注意到 $\lambda_1 - \lambda_{k+1} < 0$,故有 $x \leqslant \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_{k+1}}$,因此$\frac{\lambda_1}{\lambda_k} < 1$,显然满足式(7) 的 x 必满足式(6).

下面我们回到命题的证明

$$(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i a_i)(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_i}{\lambda_i}) =$$

$$(\sum_{i=2}^{k-1}\lambda_i a_i+\lambda_1 a_1+\lambda_k a_k+\lambda_{k+1}a_{k+1})\cdot(\sum_{i=2}^{k-1}\frac{a_i}{\lambda_i}+\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_k}{\lambda_k}+\frac{a_{k+1}}{\lambda_{k+1}})\leqslant$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_i+\lambda_1 a_1+[\lambda_1 x+\lambda_{k+1}(1-x)]a_k+\lambda_{k+1}a_{k+1}\right\}\cdot$$

$$\left\{\sum_{i=2}^{k-1}\frac{a_i}{\lambda_i}+\frac{a_1}{\lambda_1}+\left[\frac{x}{\lambda_1}+\frac{1-x}{\lambda_{k+1}}\right]a_k+\frac{a_{k+1}}{\lambda_{k+1}}\right\}=$$

$$\left\{\sum_{i=2}^{k-1}\lambda_i a_i+\lambda_1(a_1+xa_k)+\lambda_{k+1}[(1-x)a_k+a_{k+1}]\right\}\cdot$$

$$\left\{\sum_{i=2}^{k-1}\frac{a_i}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_1}(a_1+xa_k)+\frac{1}{\lambda_{k+1}}[(1-x)a_k+a_{k+1}]\right\}$$

此时又可化为 $n = k$ 的情形.

综上，$n = k + 1$ 时命题亦真，根据归纳假设可知

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i})\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$$

成立.

为了强调数学各分支之间的联系，我们给出下面的几何证法：

证法6　如图1所示，在平面直角坐标系中，设点 A_i 的坐标为 $(\lambda_i,\frac{1}{\lambda_i})$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

又设 M 的坐标为 $(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i})$，由于 $\lambda_1\leqslant x_M=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\leqslant\lambda_n$，$\frac{1}{\lambda_1}\geqslant y_M=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\geqslant\frac{1}{\lambda_n}$，故 $M(x_M,y_M)$ 在各边平行于坐标轴的矩形 A_1BA_nC 内. 直线 A_1A_n 的方程是

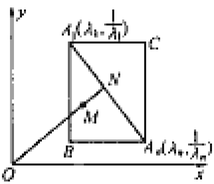


图 1

$$\frac{y-\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_1}}-\frac{x-\lambda_1}{\lambda_n-\lambda_1}=0$$

因为 $O(0,0)$，$M(x_M,y_M)$ 代入方程左边符号皆为正，故 O，M 在 A_1A_n 同侧，又 M 在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1BA_n$ 内，连接 OM 并延长交 A_1A_n 于 N，显然有 $x_My_M\leqslant x_Ny_N$，再命 $\frac{A_nN}{NA_1}=m$，则 $x_N=\frac{x_n+m\lambda_1}{1+m}$，$y_N=\frac{\frac{1}{\lambda_n}+\frac{m}{\lambda_1}}{1+m}$，故

$$x_N y_N=\frac{\lambda_n+m\lambda_1}{1+m}\cdot\frac{\frac{1}{\lambda_n}+\frac{m}{\lambda_1}}{1+m}=\frac{1}{\lambda_1\lambda_n(1+m)^2}(\lambda_n+m\lambda_1)(\lambda_1+m\lambda_n)\leqslant$$
$$\frac{1}{\lambda_1\lambda_n(1+m)^2}\left(\frac{\lambda_n+m\lambda_1+\lambda_1+m\lambda_n}{2}\right)^2=\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$$

由此得 $x_M y_M\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$.证毕.

另外在《数学实践与认识》(1985.4)上昆明师院的施恩伟还给出了一个初等证法.

§7 一个集训队试题

在§1中试题1的系数$\frac{17}{10}$是怎么求得的?它是最小的吗?其实早在1996年中国数学奥林匹克国家集训队试题中已解决了这个问题.

试题5 求最小正数 λ,使对任意 $n\geqslant 2$ 和 $a_i,b_i\in[1,2]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $b_1,\cdots,b_n$ 是 $a_1,\cdots,a_n$ 的一个排列,都有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

(1996年国家集训队试题)

解 由于$\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_i}{b_i}\leqslant 2$,从而

$$\left(\frac{1}{2}b_i-a_i\right)(2b_i-a_i)\leqslant 0\Rightarrow b_i^2+a_i^2\leqslant\frac{5}{2}a_ib_i\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\frac{2}{5}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)=\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{8}$$

由于 $a_i^2=\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}\cdot\sqrt{a_ib_i}$,且$\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}/\sqrt{a_ib_i}=\frac{a_i}{b_i}\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,利用式(6),仍有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}\cdot\sqrt{a_ib_i}\geqslant\frac{2}{5}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\geqslant$$
$$\frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{9}$$

当 $n=2k$ 时,取 $a_1=\cdots=a_k=1,a_{k+1}=\cdots=a_n=2,b_i=\frac{2}{a_i}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}=\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

于是当 $n=2k$ 时,所求的 $\lambda=\frac{17}{10}$.

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N})$ 时,不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,由排序不等式,不妨设

$$b_i=a_{n+1-i}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

由式(9)可得

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^3}{b_i}+\sum_{i=k+2}^{2k+1}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^2+\sum_{i=k+2}^{2k+1}a_i^2\right)$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^2+\sum_{i=k+2}^{2k+1}a_i^2\right)+a_{k+1}^2\tag{10}$$

原题转化为求 m,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant m\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2\qquad m\in\left(1,\frac{17}{10}\right)$$

由式(10),得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant m\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\left(\frac{17}{10}-m\right)\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^2+\sum_{i=k+2}^{2k+1}a_i^2\right)-(m-1)\cdot a_{k+1}^2\tag{11}$$

因为

$$a_{k+1}^2\geqslant\frac{1}{4}a_i^2\qquad 1\leqslant i\leqslant k$$

$$a_{k+1}^2\geqslant a_j^2\qquad k+2\leqslant j\leqslant n$$

所以
$$a_{k+1}^2\geqslant\frac{1}{5k}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^2+\sum_{i=k+2}^{2k+1}a_i^2\right)$$

代回式(11)得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant m\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\left(\frac{17}{10}-m-\frac{m-1}{5k}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^2+\sum_{i=k+2}^{n}a_i^2\right)$$

令 $\frac{17}{10}-m-\frac{m-1}{5k}=0$,得 $m=\frac{17k+2}{10k+2}$,故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17k+2}{10k+2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

当 $a_1=\cdots=a_{k+1}=1,a_{k+2}=\cdots=a_n=2,b_i=\frac{2}{a_i}$ 时取等号,即

$$\lambda_{\min}=\left(17\left[\frac{n}{2}\right]+1+(-1)^{n+1}\right)/\left(10\left[\frac{n}{2}\right]+1+(-1)^{n+1}\right)$$

$$n\geqslant 2\qquad n\in\mathbf{N}$$

§8　反向不等式的进一步加强与推广

邵剑波将反向不等式中 Pólya - Szegö 不等式进一步推广为：

邵剑波不等式　设 $0<m_1\leqslant a_i\leqslant M_1,0<m_2\leqslant b_i\leqslant M_2,i=1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\sqrt{\frac{m_2M_2}{m_1M_1}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)+\left(\sqrt{\frac{m_1M_1}{m_2M_2}}\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\leqslant\left(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \tag{12}$$

当且仅当有 k 个 a_i 与 m_1 重合，其余 $n-k$ 个 a_i 与 M_1 重合，而相应的 b_i 分别与 M_2,m_2 重合时，不等式取等号.

证明　因 $m_1\leqslant a_i\leqslant M_1,m_2\leqslant b_i\leqslant M_2$，所以$\frac{m_1}{M_2}\leqslant\frac{a_i}{b_i}\leqslant\frac{M_1}{m_2}(i=1,2,\cdots,n)$，于是有

$$\sum_{i=1}^{n}[m_2M_2a_i^2-(m_1m_2+M_1M_2)a_ib_i+m_1M_1b_i^2]=$$
$$\sum_{i=1}^{n}m_2M_2b_i^2\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{M_1}{m_2}\right)\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{m_1}{M_2}\right)\leqslant 0$$

即
$$m_2M_2\sum_{i=1}^{n}a_i^2+m_1M_1\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant(m_1m_2+M_1M_2)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

上式两边同除以$\sqrt{m_1m_2M_1M_2}$，即得式(12).

显然，当式(12)取等号时，有

$$\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{M_1}{m_2}\right)\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{m_1}{M_2}\right)=0\qquad i=1,2,\cdots,n$$

设有 k 个$\frac{a_i}{b_i}$与$\frac{m_1}{M_2}$重合，其余 $l=n-k$ 个与$\frac{M_1}{m_2}$重合，由$\frac{a_i}{b_i}=\frac{m_1}{M_2}$得 $1\leqslant\frac{a_i}{m_1}=\frac{b_i}{M_2}\leqslant 1$，故 $a_i=m_1,b_i=M_2$，即有 k 个 a_i 与 m_1 重合，k 个 b_i 与 M_2 重合，同样，其余 l 个 a_i 与 M_1 重合，l 个 b_i 与 m_2 重合.

反之，当有 k 个 a_i 与 m_1 重合，其余 $n-k$ 个 a_i 与 M_1 重合，而相应的 b_i 分别与 M_2,m_2 重合时，式(12)等号显然成立.

因为

$$2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\leqslant\sqrt{\frac{m_2M_2}{m_1M_1}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sqrt{\frac{m_1M_1}{m_2M_2}}\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

故由式(12)可得

$$2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\leqslant\left(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

上式两边平方并变形.

1963 年 J.B.Diaz 和 F.T.Metcalf 证明了:

Diaz – Metcalf 不等式 设 $a_i(\neq 0)$ 和 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数,且

$$m\leqslant\frac{b_i}{a_i}\leqslant M\qquad i=1,2,\cdots,n\tag{13}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}b_i^2+mM\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant(M+m)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\tag{14}$$

其中等号当且仅当式(13)中 n 个不等式的每一个至少有一边取等号时成立,即对每一个 i,或者 $b_i=ma_i$,或者 $b_i=Ma_i$.

证明 由式(13)知,$\left(\frac{b_i}{a_i}-m\right)\left(M-\frac{b_i}{a_i}\right)a_i^2\geqslant 0$.令 $i=1,2,\cdots,n$,然后得此 n 个不等式相加,得

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-ma_i)(Ma_i-b_i)\geqslant 0\tag{15}$$

即 $\sum_{i=1}^{n}[b_i^2-(M+m)a_ib_i+mMa_i^2]\leqslant 0$,由此即得式(14).

特别在式(14)中令 $m=\frac{m_2}{M_1}$,$M=\frac{M_2}{m_1}$(m_1,m_2,M_1,M_2 表示的意义与邵剑波不等式相同),得

$$\left(\frac{M_2}{m_1}+\frac{m_2}{M_1}\right)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_i^2+\frac{m_2}{M_1}\cdot\frac{M_2}{m_1}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

将此不等式与$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{m_2}{M_1}\cdot\frac{M_2}{m_1}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\geqslant 0$ 相加并整理,得

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2}\leqslant\frac{1}{4}\,\frac{M_1m_1}{M_2m_2}\left(\frac{M_1M_2+m_1m_2}{M_1m_1}\right)^2$$

由
$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right)^2=\frac{1}{4}\,\frac{M_1m_1}{M_2m_2}\left(\frac{M_1M_2+m_1m_2}{M_1m_1}\right)^2$$

故 Pólya – Szegö 不等式成立.

W.Specht 还证明了如下更一般的结论:

W.Specht 不等式 若记 $Mn^{(r)}(a,p)=\left(\sum_{k=1}^{n}p_ka_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$,其中 $\sum_{k=1}^{n}p_k=1$,则

$$\frac{Mn^{[s]}(a,p)}{Mn^{[r]}(a,p)} \leqslant \left(\frac{r}{q^r-1}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{q^s-1}{s}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{q^s-q^r}{s-r}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}$$

这里 $0 < m \leqslant a_k \leqslant M(k=1,\cdots,n)$，$q=\dfrac{M}{m}$，$s>r$，$sr\neq 0$，对 $s=1$ 和 $r=-1$，W. Specht 不等式变为康托洛维奇不等式.

1964 年 A. J. Goldman 从下面的不等式推出了 W. Specht 不等式.

A. J. Goldman 不等式　若 $sr<0$，则

$$(M^s-m^s)Mn^{[r]}(a,p)^r-(M^r-m^r)Mn^{[s]}(a,p)^s \leqslant M^s m^r - M^r m^s$$

对 $sr>0$，反向不等式成立.

1963 年 B. C. Rennie，1964 年 A. W. Marshall，I. Olkin 又分别证明了 A. J. Goldman 不等式.

当 $s=1$ 和 $r=-1$ 时，A. J. Goldman 不等式变成下列：

B. C. Rennie 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k + mM\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{a_k} \leqslant m+M$$

1964 年 F. T. Metcalf 证明了 B. C. Rennie 不等式等价于 J. B. Diaz - F. T. Metcalf 不等式.

§9　推广到复数和积分形式

1963 年 J. B. Diaz 和 F. T. Metcalf 证明了如下复数下的反向不等式：

定理 2　设 $a_k\neq 0$ 和 $b_k(k=1,\cdots,n)$ 是满足

$$m \leqslant \mathrm{Re}\frac{b_k}{a_k}+\mathrm{Im}\frac{b_k}{a_k} \leqslant M \qquad k=1,\cdots,n \tag{16}$$

$$m \leqslant \mathrm{Re}\frac{b_k}{a_k}-\mathrm{Im}\frac{b_k}{a_k} \leqslant M \qquad k=1,\cdots,n \tag{17}$$

的复数，则有

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2+mM\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \leqslant (M+m)\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}a_k\bar{b}_k \leqslant |M+m|\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\bar{b}_k\right|$$

定理 3　设复数 $a_k(\neq 0)$，$b_k(k=1,\cdots,n)$，m 和 M 满足

$$\mathrm{Re}\, m+\mathrm{Im}\, m \leqslant \mathrm{Re}\frac{b_k}{a_k}+\mathrm{Im}\frac{b_k}{a_k} \leqslant \mathrm{Re}\, M+\mathrm{Im}\, M$$

$$k=1,2,\cdots,n$$

$$\mathrm{Re}\, m-\mathrm{Im}\, m \leqslant \mathrm{Re}\frac{b_k}{a_k}-\mathrm{Im}\frac{b_k}{a_k} \leqslant \mathrm{Re}\, M-\mathrm{Im}\, M$$

$$k = 1,2,\cdots,n$$

则
$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 + (\mathrm{Re}(m\overline{M}))\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant$$
$$\mathrm{Re}((M+m)\sum_{k=1}^{n} a_k\bar{b}_k) \leqslant |M+m| |\sum_{k=1}^{n} a_k\bar{b}_k|$$

反向不等式大多伴随着积分形式,以下我们列举几个.

定理4　若函数 $x \mapsto f(x)$ 和 $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ 在$[a,b]$上可积,并在$[a,b]$上 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$,则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2$$

定理5　设f和g是$[a,b]$上的实值平方可积函数,假设对几乎处处的$x \in [a,b]$,有
$$m \leqslant \frac{g(x)}{f(x)} \leqslant M \qquad f(x) \neq 0$$
$$\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x + Mm\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \leqslant (M+m)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

定理6　设函数 $x \mapsto f(x)^p$ 和 $x \mapsto g(x)^q$(其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$)是$[a,b]$上可积的正函数,并设在$[a,b]$上有
$$0 < m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1 < +\infty$$
$$0 < m_2 \leqslant g(x) \leqslant M_2 < +\infty$$

则
$$\left(\int_a^b f(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g(x)^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_p\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

这里 $C_p = \dfrac{M_1^p M_2^q - m_1^p m_2^q}{(pm_2M_2(M_1M_2^{q-1} - m_1m_2^{q-1}))^{\frac{1}{p}}(qm_1M_1(M_2M_1^{p-1} - m_2m_1^{p-1}))^{\frac{1}{q}}}$.

Z.Nehari 不等式(1968年)　设$f_1,\cdots,f_n$是实区间$[a,b]$上的实值非负凹函数,若$p_k > 0, k = 1,\cdots,n$ 和$p_1^{-1} + \cdots + p_n^{-1} = 1$,则
$$\prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b f_k(x)^{p_k}\mathrm{d}x\right)^{p_k^{-1}} \leqslant C_n\int_a^b\left(\prod_{k=1}^{n} f_k(x)\right)\mathrm{d}x$$

这里
$$C_n = \frac{(n+1)!}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2\prod_{k=1}^{n}(p_k+1)^{1/p_k}}$$

其中等号成立,当且仅当对于$\left[\frac{n}{2}\right]$个下标 k, $f_k(x) = x$;对于其他下标 k, $f_k(x) = 1 - x$.

设 $f:(0,\infty)\to[0,1]$ 为单调减函数,满足 $I(f)=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,以 M 表示这类函数的集,由 $f,g\in M$,数性积 $(f,g)=I(fg)$ 收敛,Cauchy-Schwarz 不等式以及 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,推知

$$(f,g)\leqslant \min(I(f),I(g),(f,f)^{\frac{1}{2}},(g,g)^{\frac{1}{2}})\qquad f,g\in M$$

1977 年 D.Zagier 得到了反向不等式

$$(f,g)\geqslant\frac{(f,f)(g,g)}{\max(I(f),I(g))}\qquad f,g\in M$$

1995 年 10 期《美国数学月刊》发表了一个更为一般的结果

$$(f,g)\geqslant\frac{(f,F)(g,G)}{\max(I(F),I(G))}$$

其中 f 与 g 为 $[0,\infty)$ 上非负单调减函数,对任何可积函数(不必单调)函数,F,G 为任何可积函数(不必单调)$(0,\infty)\to[0,1]$.

这个不等式在经济学中用于已知两部分人的各自数量,平均收入及各自的 G_in_i 系数,要估计总体的 G_in_i 系数.

此外在 Hilbert 空间,Bunach 空间还有许多推广,已超出我们考虑的范围,不一一介绍.

关于 Kantorovič 不等式的一些有趣的推广可参见 1969 年 E.Beck 发表在《Monatsh.Math》上的文章 73,289 ~ 308.

参考文献

[1] SCHWEITZER P. An inequality Concerning the arithmetic mean (Hungarian)[J]. Math. phys. Lapok 23,1914:257-261.

[2] KANTOROVIC L V. Functional analysis and applied mathematics (Russian)[J]. Vspehi Mat. Nauk(N.S) 3.No.6(28):89-185.

[3] GREUB W, RHEINBOLDT W. On a gener alization of an inequality of L.V.Kantorovich[J]. proc. Amer. Math.Soc.,1959,10:407-415.

[4] MAKAI E. On generalization of an inequality due to Pólya and Szegö[J]. Acta. Math Sci., Hung 12,1961:189-191.

[5] HENRICI P.Two remarks on the kantorovich inequality[J]. Amer Math Monthly 68,1961: 904-906.

[6] SCHOPF A H. On the kantorowitsch inequality[J]. Numer Math 2,1960:344-346.

[7] RENNIE B C. An inequality which includes that of kantorovich[J]. Amer. Mach. Monthly, 1963,70:982.

[8] RENNIE B C. On a class of inequalities[J]. Austral. Math. Soc.3,1963:442-448.

[9] DIAZ J B, METCALF F T. Inequalities Complementary to Cauchyis inequality for sums of real

numbers[M]. New York-London: Inequalities, edited by O.Shisha, 1967:73-77.
[10] NEHARI Z. Invers Hölder inequalities[J]. Math. Anal. Appl, 21.1968:405-420.
[11] 福建师范大学数学系资料室编译.加拿大,美国历届中学生数学竞赛题解.福州:福建人民出版社:99-100.
[12] 梅向明主编.北京市中学生数学竞赛试题解析.北京:北京师范学院出版社:20-25.
[13] 裘宗沪主编.全国高中联赛试题详解[M].北京:开明出版社,2004:74.
[14] G.波利亚,G.舍贵著.数学分析中的问题和定理(第一卷)[M].上海:上海科学技术出版社,1981:272-273.
[15] 吴振奎.康托洛维奇不等式的一个初等证明[J].数学通讯.1980(4).
[16] 张小明著.几何凸函数[M].合肥:安徽大学出版社,2004.
[17] 施恩伟.康托洛维奇不等式的初等证法[J].数学的实践与认识.1985(4).

As long as algebra and geometry proceeded along separate paths, their advance was slow and their applications limited.

But when these sciences joined company, they drew from each other fresh vitality and thenceforward marched on at a rapid pace toward perfection.

——拉格朗日

一道冬令营试题与 Rudin 不等式

刘培杰

§0 引 言

第一次世界大战后，法国数学界因战争伤亡出现青黄不接的局面，老一辈数学家对当代数学所知甚少，年轻大学生求知欲得不到满足. 因此，1934 年至 1935 年的冬季，一些巴黎高等师范学校毕业的年轻数学家自发地组织起来成立了一个集体，借用一位法国将军尼古拉·布尔巴基的名字，人称布尔巴基学派. 他们准备将整个数学写成一套经过整理的专著. 这部历史上最浩繁的数学著作叫做《数学原理》①，自 1939 年刊行以来已陆续出版了近 40 卷，被译为英、日、俄等多种文字. 同时学派成员还发表了 500 多篇文章，综述当代数学各领域的重大成果，对现代数学的发展产生过较大影响. 在这部巨著中我们居然发现了我国数学冬令营试题的加强形式.

我国第一届中学生数学冬令营(中国数学奥林匹克)1986 年在天津举行. 命题组由五位中国著名数学家周性伟、俞文魮、张筑生、常庚哲、裘宗沪先生组成. 试题质量颇高. 其中第 3 题为：

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为复数，满足

$$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1$$

求证：上述几个复数中，必存在若干个复数，它们的和的模不小于 $\frac{1}{6}$.

---

① 布尔巴基学派从 1939 年起通过海曼出版社出版了 40 个分册的《科学和工业的现状》丛书. 数学原理是第一部分，书名叫做《分析的基本结构》，包括六篇：集合论、代数、一般拓扑、单实变函数、拓扑向量空间、积分学，共 35 卷. 1960 年开始出版第二部分，已出的有《李群》和《李代数》、《可换代数》、《可微流形》、《解析流形》、《谱论》等. 1965 年因作者与出版者打官司(因版权引起的)，停止由海曼出版社出版该书的以后各册，而改由托马松出版社出版.

§1　加强与证明

本节将加强此不等式，并用新的富有启发性的方法证明之，我们有如下的：

命题1　设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意复数，则必存在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个子集 M，使得

$$\left|\sum_{k\in M}z_k\right|\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

首先证明一个引理：设 $\alpha\in\mathbf{R}$，且 $0<\beta<\pi/2$，若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是满足

$$\alpha-\beta\leqslant\arg z_r\leqslant\alpha+\beta\qquad r=1,2,\cdots,n$$

的复数，则必有

$$\left|\sum_{r=1}^{n}z_r\right|\geqslant(\cos\beta)\sum_{r=1}^{n}|z_r|$$

事实上，有

$$\left|\sum_{r=1}^{n}z_r\right|=\left|e^{-i\alpha}\sum_{r=1}^{n}z_r\right|\geqslant\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\sum_{r=1}^{n}z_r\right)=$$

$$\sum_{r=1}^{n}|z_r|\cos(-\alpha+\arg z_r)\geqslant(\cos\beta)\sum_{r=1}^{n}|z_r|$$

故证.

下面对命题1进行证明：

首先将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 写成如下四个集合之并：$M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4$，其中

$$M_r=\left\{k\mid 1\leqslant k\leqslant n,(r-1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}<\arg z_k\leqslant(r-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$r=1,2,3,4$$

则由引理可知

$$\left|\sum_{k\in M_r}z_k\right|\geqslant\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k\in M_r}|z_k|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in M_r}|z_k|\qquad r=1,2,3,4$$

设 $\sum\limits_{k\in M_j}|z_k|=\max\left\{\sum\limits^{k\in M_1}|z_k|,\sum\limits^{k\in M_2}|z_k|,\sum\limits^{k\in M_3}|z_k|,\sum\limits^{k\in M_4}|z_k|\right\}$，

取 $M=M_j(1\leqslant j\leqslant 4)$，这意味着

$$\sum_{k\in M_r}|z_k|\leqslant\sum_{k\in M}|z_k|\qquad r=1,2,3,4$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k|=\sum_{r=1}^{4}\left(\sum_{k\in M_r}|z_k|\right)\leqslant 4\sum_{k\in M}|z_k|$$

故$\left|\sum_{k\in M} z_k\right| \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n} | z_k |$,得证.

§2 N.Bourbaki 的推广

命题 1 在复分析中的应用可见 Rudin. W:Real and Complex Analysis. New York-st Louis-San Francisco Toronto-London-Sydney 1966.p.119(有中译本)

我们知道法国布尔巴基学派的风格是高度的抽象(可参见《数学的建筑》,江苏教育出版社),所以命题 1 被其加强为:

命题 2 若 $\alpha_k \in E^n$,$(k = 1,\cdots,m)$,则存在$\{1,\cdots,m\}$的一个子集 I,使得

$$\left|\sum_{k\in I}\alpha_k\right| \geqslant \frac{1}{z_n k_n}\sum_{k=1}^{m} | \alpha_k | \tag{1}$$

其中

$$k_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta$$

即

$$k_{2r} = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\frac{\pi}{2} \qquad k_{2r+1} = \frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}$$

证明 对于单位向量 α,定义

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{m}(\alpha\alpha_k)^+ = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} r_k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m} r_k$$

因此存在数 θ 满足

$$f(\theta) \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m} | z_k |$$

若 $I = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant m,\cos(\theta - \theta_k) > 0\}$,则

$$\left|\sum_{k\in I} z_k\right| = \left|\mathrm{e}^{-i\theta}\sum_{k\in I} z_k\right| \geqslant \mathrm{Re}\sum_{k\in I}\mathrm{e}^{-i\theta}z_k =$$

$$\sum_{k\in I} r_k\cos(\theta - \theta_k) = \sum_{k=1}^{m} r_k(\cos(\theta - \theta_k))^+ = f(\theta)$$

故命题 2 成立.

若至少有一个 $z_k \neq 0$,则可以证明,我们在命题 3 中有严格不等式,常数$\frac{1}{\pi}$是最好的,这可以通过取

$$z_{k+1} = \exp\frac{2k\pi\mathrm{i}}{m} \qquad k = 0,1,\cdots,m-1$$

这个结果最早发表在 1955 年巴黎出版的布尔巴基《Topologie générale》上,1970 年由 W.W.Bledsoe 再次发表在《美国数学月刊》(77.180 - 182)上.

命题 2 的最佳常数是$\frac{1}{\pi}$,我们有如下:

命题 3　若 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 是复数，则存在 $\{1, \cdots, m\}$ 的子集 I，使得

$$\left|\sum_{k\in I} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m} |z_k|$$

证明　对于实数 x，我们记 $x^+ = \max(x, 0)$，设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k)$，$r_k = |z_k|, 0 \leqslant \theta_k < 2\pi$。我们定义

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{m} r_k(\cos(\theta - \theta_k))^+$$

取积分得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} r_k\int_0^{2\pi}(\cos(\theta - \theta_k))^+ \mathrm{d}\theta$$

这里对实数 x 我们记 $x^+ = \max(x, 0)$，取 E^n 中单位球 $|\alpha| = 1$ 上的积分，得到

$$\frac{1}{S_n(1)}\int f(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{S_n(1)}\sum_{k=1}^{m}\int f(\alpha a_k)^+ \mathrm{d}\alpha$$

其中 $S_n(1)$ 是单位球的表面积，因为 $S_n(r)$ 的表面积是

$$S_n(r) = n \cdot 2^n \cdot k_1 \cdots k_n r^{n-1}$$

得到

$$\frac{1}{S_n(1)}\int f(\alpha)\mathrm{d}\alpha =$$

$$\frac{1}{S_n(1)}\sum_{k=1}^{m} |a_k| \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)2^{n-1}k_1\cdots k_{n-1}\sin^{n-2}\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{z_n k_n}\sum_{k=1}^{m} |a_k|$$

所以存在 α 使得

$$f(\alpha) \geqslant \frac{1}{z_n k_n}\sum_{k=1}^{m} |a_k| \tag{2}$$

定义 $I = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant m; \alpha a_k > 0\}$，则

$$\left|\sum_{k\in I} a_k\right| \geqslant \sum_{k\in I}\alpha a_k = \sum_{k=1}^{m}(\alpha a_k)^+ = f(\alpha)$$

因此由(2) 可推出(1)。

§3　M. Petrovitch 不等式

1917 年，M. Petrovitch 证明了与试题形式相近的不等式。

命题 4　若 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是满足

$$0 \leqslant \arg z_r \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad r = 1, \cdots, n$$

的复数，则

$$\left|\sum_{r=1}^{n} z_r\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\sum_{r=1}^{n} |z_r|$$

1933 年，M. Petrovitch 又证明了它的一般形式.

命题 5 设 α 是实数，且 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，若 $z_1,\cdots,z_n$ 是满足

$$\alpha-\theta \leqslant \arg z_r \leqslant \alpha+\theta \qquad r=1,\cdots,n$$

的复数，则

$$\left|\sum_{r=1}^{n} z_r\right| \geqslant (\cos\theta)\sum_{r=1}^{n} |z_r|$$

证明 我们有

$$\left|\sum_{r=1}^{n} z_r\right| = \left|e^{-i\alpha}\sum_{r=1}^{n} z_r\right| \geqslant \operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\sum_{r=1}^{n} z_r\right) =$$

$$\sum_{r=1}^{n} |z_r|\cos(-\alpha+\arg z_r) \geqslant (\cos\theta)\sum_{r=1}^{n} |z_r|$$

当时 M. Petrovitch 是想用命题 5 来导出某些积分不等式.

在南斯拉夫数学家 J. Karamata 1949 年用塞尔维亚语写成的一本《斯梯吉①积分的理论与实践》(《Theory and Praxis of Stieltjes' Integral》) 我们找到了命题 5 的积分形式.

命题 6 若 f 是定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的复值可积函数，且

$$-\theta \leqslant \arg f(x) \leqslant \theta \qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

则

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \geqslant (\cos\theta)\int_a^b |f(x)|\,dx$$

在 1950 年 Karamata 用塞尔维亚语写了另一本著作《复数及其在初等几何中的应用》(《Complex Number with Application to Elementary Geometry》)，这一不等式再次出现. 1963 年 H. S. Wilf 在《美国数学月刊》中又再次发现了它.

§4 推广到希尔伯特空间和巴拿赫空间

1966 年两位美国数学家 J. B. Diaz 和 F. T. Metcali 发表了题为《一个希尔伯特空间和巴拿赫空间的互补三角不等式》的文章，他们在其中证明了在任意希尔伯特空间 H 中都成立的定理.

① 斯梯吉，荷兰数学家. 1877－1883 年在莱顿天文台工作. 1886 年在图卢兹大学任教授. 1894 年成为彼得堡科学院通讯院士.

命题 7 设 a 是 H 中的单位向量，假定向量 $x_1,\cdots,x_n(x_i\neq 0)$ 满足

$$0\leqslant r\leqslant\frac{\mathrm{Re}(x_i,a)}{|x_i|}\qquad i=1,\cdots,n$$

则

$$r(|x_1|+\cdots+|x_n|)\leqslant|x_1+\cdots+x_n|$$

其中等式成立，当且仅当

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r[|x_1|+\cdots+|x_n|]a$$

设 $a_1,\cdots,a_m$ 是 H 中的规范正交向量，假定向量 $x_1,\cdots,x_n(x_i\neq 0)$ 满足

$$0\leqslant r_k\leqslant\frac{\mathrm{Re}(x_i,a_k)}{|x_i|}\qquad i=1,\cdots,n\qquad k=1,\cdots,m$$

则 $$(r_1^2+\cdots+r_m^2)^{\frac{1}{2}}(|x_1|+\cdots+|x_n|)\leqslant|x_1+\cdots+x_n|$$

其中等式成立，当且仅当

$$x_1+\cdots+x_n=(|x_1|+\cdots+|x_n|)(r_1a_1+\cdots+r_ma_m)$$

对于命题 7 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时的特殊情况早在 1949 年就由 M. Marden 得到，他证明了：

命题 8 若每个复数 $z_r(r=1,\cdots,n)$ 具有性质

$$z_r\neq 0,\alpha\leqslant\arg z_r\leqslant\alpha+\pi$$

则它们的和 $z_1+\cdots+z_n$ 不能为零.

§5 丢番图逼近中的复不等式

如果将前述的复不等式进一步推广，可得到丢番图逼近中的一个重要不等式，这要谈到匈牙利著名数学家图兰帕尔(Turán Paul，1910—1976)，他是匈牙利科学院院士，主要贡献在数论和图论方面，1954 年，根据中匈文化协定，图兰帕尔来中国讲学，讲述的主要内容是他的专著《数学分析中的一个新方法及其应用》(Eine neue Methode in der Analysis and deren Anw endungen)，在中国期间他还特别宣读了《李善兰恒等式证明》一文，对我国古代的数学成就表示钦佩.

在丢番图逼近中一个最重要的定理就是所谓克朗内克(Kronecker)定理.

若有方程式

$$\theta_1u_1+\cdots+\theta_ku_k=0$$

其中诸 $u_j\in\mathbf{Q}$，即可得出

$$u_j=0\qquad j=1,\cdots,k$$

则我们称实数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 关于有理数域为线性无关，克朗内克定理可表述为：

命题 9 对于这些 $\theta_j(j=1,\cdots,k)$，对于任意的实数 $a_1,\cdots,a_k$ 以及任意小的正数 ε，我们可以找到一个实数 t 以及有理整数 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，使

$$|\theta_j t-a_j-b_j|\leqslant\varepsilon \qquad j=1,2,\cdots,k$$

现在我们给出具有线性无关的幅角的复数 $z_1,\cdots,z_k$ 以及任意的复系数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，我们研究"广义方幂和"

$$H(t)=\sum_{j=1}^{k}a_j z_j^t$$

其中 t 为实数.

图兰帕尔证明了如下：

命题 10
$$\max_{1\leqslant t\leqslant n^k}\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}a_j z_j^t\right|}{\sum\limits_{j=1}^{k}|a_j||z_j|^t}\geqslant\cos\frac{2\pi}{n}$$

这个定理在解析数论中有应用.

1931 年著名数学家 Hermann Weyl 在 10 月瑞士大学预科教师协会举办的夏季学习班上的讲演中指出：

事实上，漂亮的一般性的概念不可能从天而降，实际情形是：开始时总是一些确定的具体问题，它们具有整体的复杂性，研究者必定是靠蛮力来征服它们的，这时，主张公理化的人来了，他们说要进这扇大门本不必打破它还碰伤了双手，而只要造一把如此这般的魔钥匙，就能轻轻地启开这扇门，就好像它是自动地打开一样，然而，他们之所以能造出这把钥匙，完全是因为那次成功的破门而入使他们能前前后后，里里外外地研究这把锁，在我们能够进行一般化、形式化和公理化之前，必须首先存在数学的实质性内容.

编后语 法国诗人，小说家和剧作家鲍里斯维昂（Boris Vian，1920—1959）说"一个聪明人的不幸，就是他从来不曾聪明到不认自己是最聪明的程度."同样的道理也可以说"一道优秀的竞赛试题的不幸，就是它深刻到从来没发现比它更深刻的背景."一个优秀的竞赛专家是不会犯这种错误的，通过对这个试题背景的挖掘，我们强烈地感受到了竞赛数学深深地浓入到现代数学之中，使我们不"另类"，不孤单，这或许才是竞赛试题背景研究的真正目的.

一道 IMO 试题与希尔伯特问题

刘培杰

§1 试题及证明

1971 年在捷克和斯洛伐克举行的第 13 届 IMO 上，第一题是匈牙利提供的.

试题 设 $n(>2)$ 是自然数，证明下述论断仅对 $n=3$ 和 $n=5$ 成立：对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0$$

许多题解都给出了以下的解答.

解 当 $n=3$ 时，由于

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)=$$

$$\frac{1}{2}\{[(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)]+[(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)]+[(a_3-a_1)(a_3-a_2)+(a_1-a_3)(a_1-a_2)]\}=$$

$$\frac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2]\geqslant 0$$

因而论断成立.

当 $n=5$ 时，由于

$$(a_1-a_2)(a_1-a_2)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)+(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4) \quad (1)$$

是关于 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的对称式,故不妨假设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant a_5$,于是

$$a_1-a_2=-(a_2-a_1)\geqslant 0$$

$$a_1-a_3\geqslant a_2-a_3\geqslant 0$$

$$a_1-a_4\geqslant a_2-a_4\geqslant 0$$

$$a_1-a_5\geqslant a_2-a_5\geqslant 0$$

从而

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+\\(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geqslant 0 \qquad (2)$$

类似地,有

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+\\(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\geqslant 0 \qquad (3)$$

又因为

$$a_3-a_1\leqslant 0 \qquad a_3-a_2\leqslant 0$$

$$a_3-a_4\geqslant 0 \qquad a_3-a_5\geqslant 0$$

所以

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geqslant 0 \qquad (4)$$

将式(2)、(3)、(4)相加便可知式(1)非负,即对 $n=5$ 论断成立.

当 $n=4$ 时,取 $a_1=-1,a_2=a_3=a_4=0$,则有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)+\\(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)+(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=\\-1<0$$

即对 $n=4$ 论断不成立.

当 $n>5$ 时,取 $a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}=0;a_i=1;a_{i+1}=\cdots=a_n=2$.其中 $3\leqslant i\leqslant n-2$,则有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+\cdots+(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots\\(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})=\\(-1)^{n-i}$$

于是,当 $n(>5)$ 为奇数时,取 $i=n-3$,有

$$(-1)^{n-i}=(-1)^3=-1<0$$

当 $n(>5)$ 为偶数时,取 $i=3$,有

$$(-1)^{n-i}=(-1)^{n-3}=-1<0$$

因此,当 $n>5$ 时,论断不成立.

§2　$n=3,5$ 的确定

如果我们将试题换一种提法，改为：

设 $n\in\mathbf{N}$，$x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个变量，定义

$$A_n(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$$

试问对哪些 n 值，A_n 是正定的？

显然由前面的证明可知问题的答案为 $n=3$ 和 5，但这两个值是如何想到的呢？我们先来介绍几个多项式的概念．

定义 1　设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是实系数多项式，f 的每个单项式有形式 $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$，其中 a 为非零实数，我们称这个单项式的次数为 $r_1+r_2+\cdots+r_n$，而对于变量 x_i 的次数为 $r_i(1\leqslant i\leqslant n)$．多项式 f 的次数，同样地是 f 包含的所有单项式对 x_i 次数的最大值叫做 f 对 x_i 的次数．

例如 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^2+x_1x_2x_3^2$ 的次数为 4，而对 x_1,x_2,x_3 的次数分别为 3,3,2．

定义 2　若 f 中每个单项式的次数均为 m，则 f 叫做 m 次齐次多项式．

定义 3　一个多项式以 $a_1,\cdots,a_n$ 为实系数，若对任意实数 $x_1,\cdots,x_n$，则必有 $f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$，则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的．

我们可以证明以下定理．

定理 1　正定齐次多项式的次数必为偶数．

为此先证明一个引理．

引理 1　设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是实系数非零多项式，则必存在 n 个实数 $a_1,\cdots,a_n$，使得 $f(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$．

证明　我们用数学归纳法：

i) 当 $n=0$ 时，f 为常数 a，由假设知 $a\neq 0$，于是知此时引理成立．

ii) 当 $n=1$ 时，$f\triangleq f(x)$ 是非零多项式，它的实数根只有有限多个(由代数基本定理知其个数不超过 f 的次数)．因此除这有限多个实数外，一定存在一个实数 a_1，使得 $f(a_1)\neq 0$．

iii) 假设引理对 $n=k+1$ 时成立，往证 $n=k$ 时也成立．

令 $k=2$，如果 $f(x_1,\cdots,x_k)$ 中不出现 x_k，则可化为 $k-1$ 的情形，由归纳假设知引理成立．现设 f 中出现 x_k，于是可将 f 按 x_k 展开得

$$f=x_k^d g_d(x_1,\cdots,x_{k-1})+x_k^{d-1}g_{d-1}(x_1,\cdots,x_{k-1})+\cdots+$$

$$x_k g_1(x_1,\cdots,x_{k-1}) + g_0(x_1,\cdots,x_{k-1})$$

其中 $d \geqslant 1$, $g_d(x_1,\cdots,x_{k-1})$ 不恒为零,由归纳假设知,存在实数 $a_1,\cdots,a_{k-1}$,使得 $g_d(a_1,\cdots,a_{k-1}) \neq 0$,令 $c_i = g_i(a_1,\cdots,a_{k-1})$,则

$$f(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k) = c_d x_k^d + c_{d-1}x_k^{d-1} + \cdots + c_1 x_k + c_0$$

其中 $c_i \in \mathbf{R}$, $c_d \neq 0$. 于是这个多项式至多有 d 个实根,从而存在实数 a_n,使得 $f(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k) \neq 0$.(证毕)

现在我们来证明定理 1:

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 m 次齐次多项式,a 是任意实数,则由齐次多项式的定义可知有如下性质

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n) = \lambda^m f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

由引理知存在实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n) \neq 0$,由性质知

$$f(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n) = \lambda^m f(a_1,\cdots,a_n) \qquad (5)$$

$$f(-\lambda a_1,\cdots,-\lambda a_n) = (-\lambda)^m f(a_1,\cdots,a_n) \qquad (6)$$

若 m 为奇数,则 λ^m 和 $(-\lambda)^m$ 异号,进而推出 $f(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_k)$ 与 $f(-\lambda a_1,\cdots,-\lambda a_n)$ 异号,而这与 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的矛盾,故 m 一定是偶数,故定理 1 得证.

应用定理 1 我们对试题可分析如下,可将试题改述为:

设 n 为正整数,$a_1,\cdots,a_n$ 为 n 个实变量,定义

$$A_n(a_1,\cdots,a_n) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_j - x_i)$$

试问对哪些 n 值,A_n 是正定的.

由于 $A_n(a_1,\cdots,a_n)$ 是 $n-1$ 次齐次多项式,而由定理 1 正定齐次多项式的次数必为偶数,因此若 A_n 正定,则 n 必为奇数,进而若 n 为奇数并且 $n \geqslant 7$,取 $(a_1,\cdots,a_n) = (0,0,0,1,2,2,\cdots,2)$,容易计算

$$A_n(0,0,0,1,2,\cdots,2) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 4}}^{n}(a_4 - a_j) = (-1)^{n-4} = -1$$

因此若 A_n 正定,n 只能为 3 或 5.

§3　试题的推广与加强

由试题的证明过程可知,当 $n = 3$ 时,不等式

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2) \geqslant 0$$

如果令 $a_1 = x, a_2 = y, a_3 = z$,则不等式为

$$(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y) \geqslant 0 \tag{7}$$

式(7) 是著名的舒尔(Schur) 不等式的一个最简单的特例,即当 $\lambda = 0$ 时.

Schur 不等式　若 $x, y, z \in \mathbf{R}^+, \lambda \in \mathbf{R}$,则

$$x^\lambda(x-y)(x-z)+y^\lambda(y-z)(y-x)+z^\lambda(z-x)(z-y) \geqslant 0$$

其中等号当且仅当 $x = y = z$ 时成立.2005 年全国高中联赛试题二试第 2 题有一个用 Schur 不等式证明的简单解法.

我们不准备直接证明这个不等式,因为它可以在不等式方面的经典著作哈代(Hardy)、李特伍德(Littlewood) 及玻利亚(Pólya) 著的《不等式》中找到.下面证明一个它的推广形式 —— 戈汉(U.C.Guha) 不等式.

Guha 不等式　若 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$,且

$$a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}} \leqslant b^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

$$\alpha^{\frac{1}{p+1}} + \beta^{\frac{1}{p+1}} \geqslant \gamma^{\frac{1}{p+1}} \tag{9}$$

则 i) 若 $p > 0$,有

$$abc - \beta(a + \gamma ab) \geqslant 0 \tag{10}$$

ii) 若 $-1 < p < 0$,则不等式(9)、(10) 必须反向;

iii) 若 $p < -1$,则不等式(8)、(9) 必须反向.

不论 i)、ii)、iii) 哪种情况,都是当且仅当式(8)、(9) 中等式成立,且

$$\frac{a^{p+1}}{\alpha^p} = \frac{b^{p+1}}{\beta^p} = \frac{c^{p+1}}{\gamma^p}$$

时式(10) 中等号成立.

证明　我们仅证 $p > 0$ 时的情形,其他情形可类似地处理.

当 $p > 0$ 时,由赫德尔(Hölder) 不等式得

$$\left[a^{\frac{1}{p+1}}(ac)^{\frac{1}{p+1}} + c^{\frac{1}{p+1}}(\gamma a)^{\frac{1}{p+1}}\right]^{p+1} \leqslant (ac + \gamma a)\left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

亦即

$$ac\left(\alpha^{\frac{1}{p+1}} + \gamma^{\frac{1}{p+1}}\right)^{p+1} \leqslant (ac + \gamma a)\left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

再由式(8)、(9) 便可推出式(10),等式成立的条件完全可由 Hölder 不等式中等式成立的条件得到.(证毕)

在 Guha 不等式中设 $p = 1$,并不失一般性地假设 $0 \leqslant z \leqslant y \leqslant x$,令 $a = y - z, b = x - z, c = x - y, \alpha = x^\lambda, \beta = y^\lambda, \gamma = z^\lambda$.则式(10) 就变成了 Schur 不等式,式(8) 此时是等式,因为 $\alpha^{\frac{\lambda}{2}} \geqslant \beta^{\frac{\lambda}{2}}$,或 $\gamma^{\frac{\lambda}{2}} \geqslant \beta^{\frac{\lambda}{2}}$,分别当 $\lambda \geqslant 0$ 或 $\lambda \leqslant 0$ 时成立.所以式(9) 是成立的.

U·C 戈汉的结果是 1962 年发表的,在他一年以前 K·S 阿莫尔(K.S.Amur) 从另一个角度部分地推广了 Schur 不等式,1964 年由奥本海默(A.Oppenheim)

和维斯(Roy.O.Dar)进行了补充,其结果可合并成下述:

定理2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n(n>3)$ 个实常数,则对一切满足 $x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n$ 的实数 $x_1,\cdots,x_n$,不等式

$$\sum\nolimits_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_j-x_i)\geqslant 0 \tag{11}$$

成立的充分必要条件是:

i) 当 $n=3$ 时

$$a_1\geqslant 0 \qquad a_2\leqslant (a_1^{1/2}+a_3^{1/2})^2 \qquad a_3\geqslant 0$$

ii) 当 $n\geqslant 4$ 时

$$a_2\leqslant a_1 \qquad (-1)^n(a_{n-1}-a_n)\geqslant 0 \qquad (-1)^{k+1}a_k\geqslant 0 \tag{12}$$

这里 $1\leqslant k\leqslant n,k\neq 2,n-1$.

(对 $n=5,a_1=\cdots=a_5=1,x_4=x_5=0$,式(11)便成为 $\lambda=2$ 时的Schur不等式)

证明 先证 $n=3$ 时.

i) 充分性:我们可以直接由以下恒等式得到

$$\sum\nolimits_3=[a_1^{1/2}(x_1-x_2)-a_3^{1/2}(x_2-x_3)]^2+ \\ [(a_1^{1/2}+a_3^{1/2})^2-a_2](x_1-x_2)(x_2-x_3) \tag{13}$$

并由此可以看出式(11)中等式成立的条件.

注:如果取 $a_1=a_2=a_3=1$,则以上给出了试题当 $n=3$ 时的又一种证法.

ii) 必要性:设 $x_1>x_2=x_3$,或 $x_1=x_2>x_3$,则式(11)给出必要条件 $a_1\geqslant 0,a_3\geqslant 0$;在式(13)中选取 $(x_1-x_2):(x_2-x_3)=a_3^{1/2}:a_1^{1/2}$,从而得到另一条件.

再证 $n\geqslant 4$ 时.

i) 充分性:若条件满足,则 $\sum_n$ 中的前两项的和为

$$a_1(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)+a_2(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_n)= \\ (x_1-x_2)[a_1(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)-a_2(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)]$$

当 $a_1\geqslant 0\geqslant a_2$ 或 $a_1\geqslant a_2\geqslant 0$ 和 $x_1-x_3\geqslant x_2-x_3\geqslant 0,\cdots,x_1-x_n\geqslant x_2-x_n\geqslant 0$ 时上式是非负的,对 $\sum_n$ 的最后两项进行类似的论证;其他的每一项显然当式(12)成立时是非负的,因为 $(x_r-x_1)\cdots(x_r-x_n)$(其中不含 x_r-x_r),当 r 是奇数时 $\geqslant 0$,当 r 是偶数时 $\leqslant 0$,即它与 a_r 有相同的符号.

ii) 必要性:若由式(12)可推出式(11),则在式(11)再设 $x_1>x_2>x_3=\cdots=x_n$,再用 x_1-x_2 除,得

$$a_1(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)-a_2(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\geqslant 0$$

根据连续性,此式对 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 = \cdots = x_n$ 也成立.设 $x_1 > x_2 = x_3$ 就给出条件 $a_1 \geqslant 0$ 的必要性,而设 $x_1 = x_2 > x_3$,则给出条件 $a_1 \geqslant a_2$ 的必要性.可将类似的论证应用于 a_{n-1} 和 a_n;关于 $a_r(3 \leqslant r \leqslant n-2)$ 的条件只要设

$$x_1 = \cdots = x_{r-1} > x_r > x_{r+1} = \cdots = x_n$$

即可得到.

一个简单的推论是:

推论 $n(n \geqslant 3)$ 个实常数 $a_1, \cdots, a_n$ 使不等式(11)对所有实数 $x_1, \cdots, x_n$ 成立的充分必要条件是:

i) 当 $n = 3$ 时

$$0 \leqslant a_i \leqslant a_j^{1/2} + a_k^{1/2}, \text{对每个 } 1,2,3 \text{ 的排列 } i,j,k;$$

ii) 当 $n = 4$ 和 $n = 6$ 时

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

iii) 当 $n = 5$ 时

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_5 > 0$$

这一推论是对试题的部分加强.

§4 Lax 定理

从试题的证明中我们发现,证明 $n = 3$ 和 $n = 5$ 时的证法完全不同.首先可以用证明 $n = 5$ 的方法来证明 $n = 3$ 时的情形,但决不能反过来,尽管 $n = 3$ 时的证法很漂亮,换句话说是"非不为也,实不能也".

1978 年两位数学家 A.拉克(A.Lax)和 P.拉克(P.Lax)证了如下的:

定理 3 A_5 不能表成实系数多项式的平方和.

为证明此定理我们需证明以下三个引理.

引理 2 设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为 m 次实系数多项式,f 不恒为零,则 f 为正定的充要条件为:齐次多项式

$$F(x_0, \cdots, x_n) = x_0^m f(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x^n}{x_0})$$

为正定的.

引理 3 设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为 m 次实系数多项式,$m \geqslant 1$,则 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为实系数多项式平方和的充要条件是 $F(x_0, \cdots, x_0) = x_0^m f(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0})$ 为实系数多项式平方和.

引理4 设 $Q(x_1,\cdots,x_5)=\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant 5}c_{jk}x_jx_k$ 是实系数二次型，并且当变量 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 当中只要其中三个取相同值，而其余两个取相同值时，Q 均取值为零，则 Q 必恒为零.

引理2、引理3的证明是容易的，现在我们来证明引理4.

证明 设 $x_1=x_2=\alpha$，$x_3=x_4=x_5=\beta$，由条件知

$$Q(\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)=(c_{11}+c_{12}+c_{22})\alpha^2+(c_{13}+c_{14}+c_{15}+c_{23}+c_{24}+c_{25})\alpha\beta+(c_{33}+c_{44}+c_{55}+c_{34}+c_{35}+c_{45})\beta^2$$

由于上式对任意实数 α 和 β 均成立，于是右边关于 α^2，$\alpha\beta$，β^2 的系数必恒为零，即

$$c_{11}+c_{12}+c_{22}=0 \tag{14}$$

$$c_{13}+c_{14}+c_{15}+c_{23}+c_{24}+c_{25}=0 \tag{15}$$

$$c_{33}+c_{44}+c_{55}+c_{34}+c_{35}+c_{45}=0 \tag{16}$$

如果我们再设 $x_3=x_4=\alpha$，$x_1=x_2=x_3=\beta$，由条件知

$$Q=(\beta,\beta,\alpha,\alpha,\beta)=(c_{33}+c_{34}+c_{44})\alpha^2+(c_{31}+c_{32}+c_{35}+c_{41}+c_{42}+c_{45})\alpha\beta+(c_{11}+c_{22}+c_{55}+c_{12}+c_{15}+c_{24})\beta^2$$

同样可以得到类似的等式

$$c_{33}+c_{34}+c_{44}=0 \tag{17}$$

$$c_{31}+c_{32}+c_{35}+c_{41}+c_{42}+c_{45}=0 \tag{18}$$

$$c_{11}+c_{22}+c_{55}+c_{12}+c_{15}+c_{24}=0 \tag{19}$$

式(16) - (17)得：$c_{35}+c_{45}=-c_{55}$.

我们注意到在引理4条件中关于 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 是完全对称的，所以当我们对系数下标做任意置换的话当得到新的关系式，例如做 $\prod(1,2,3,4,5)=(1,3,2,4,5)$，便得到关系式($c_{25}+c_{45}=-c_{55}$)，于是可推出：$c_{25}=c_{35}$.

同理可以得到

$$c_{15}=c_{25}=c_{35}=c_{45} \tag{20}$$

再做适当的下标置换，又可得到

$$c_{15}=c_{12}=c_{13}=c_{14} \tag{21}$$

$$c_{12}=c_{23}=c_{24}=c_{25} \tag{22}$$

$$c_{13}=c_{23}=c_{34}=c_{35} \tag{23}$$

$$c_{14}=c_{24}=c_{34}=c_{45} \tag{24}$$

由式(20) - (24)可知，所有系数 $c_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 5)$ 均相同，设此公共值为 σ，

由式(15)知 $6\sigma=0\Rightarrow\sigma=0$，于是所有的 $c_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 5)$ 均为零，而由 $c_{55}=-(c_{35}+c_{45})=0$ 及对称性可知 $c_{ij}=0(1\leqslant i<j\leqslant 5)$，从而 Q 的所有系数均为零，故 $Q(x_1,\cdots,x_j)=0$.（证毕）

现在我们用反证法来证明定理 3：假设

$$A_5(x_1,\cdots,x_5)=Q_1(x_1,\cdots,x_5)^2+\cdots+Q_m(x_1,\cdots,x_5)^2$$

其中 $Q_1,\cdots,Q_m$ 均为实系数多项式，由于 A_5 为 4 次多项式，由引理 3 可知 $Q_1,\cdots,Q_m$ 的次数均不超过2，设 $P_i(x_1,\cdots,x_5)$ 为 $Q_i(x_1,\cdots,x_5)$ 的二次项全体，则因为 A_5 是四次齐次的，故必有 $A_5=P_1^2+\cdots+P_m^2$，由此我们可以在开始就假设 $Q_1,\cdots,Q_m$ 均是二次齐次的，即均为二次型，由 $A_5=P_1^2+\cdots+P_m^2$，由此我们可以在开始就假设 $Q_1,\cdots,Q_m$ 均是二次齐次的，即均为二次型，由 A_5 的表达式易知当 $x_1,\cdots,x_5$ 中三个值相同而另两个取值相同时，A_5 取值为零，从而这时必然有 $Q_1,\cdots,Q_m$ 均取值零，即 $Q_1,\cdots,Q_m$ 均是满足引理3的二次型，于是 $Q_1,\cdots,Q_m$ 均恒为零，而 A_5 不恒为零，产生矛盾，从而证明了 A_5 不是实系数多项式的平方和.

§5　希尔伯特第十七问题

就背景来说试题的背景是深刻的，如果我们将正定多项式一般化为正定有理函数的话，则为 1900 年希尔伯特在巴黎国际数学大会上提出的著名的二十三个数学问题中的——希尔伯特第十七问题.

关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的实系数正定有理函数是否一定可表成有限个关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的实系数有理函数的平方和？

这个问题的最简单情形是：将正定的有理函数取为正定的一元多项式 $f(x)$，则它可以表为有限个具体说是两个多项式的平方和，这一结果被当作第一届数学奥林匹克国家集训队训练题目，即：

定理 4　设 $f(x)$ 为实多项式，且对任何 $a\in\mathbf{R}$，$f(a)\geqslant 0$.（即 $f(x)$ 是正定的）.求证存在多项式 $g(x),h(x)$，使 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

证明　因实系数多项式的复根成对出现，故可设 $f(x)$ 的复根为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\overline{\beta_1},\overline{\beta_2},\cdots,\overline{\beta_s}$，则

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{t_1}(x-\alpha_2)^{t_2}\cdots(x-\alpha_r)^{t_r}u(x)\cdot\overline{u(x)}$$

其中
$$u(x)=(x-\beta_1)^{m_1}(x-\beta_2)^{m_2}\cdots(x-\beta_s)^{m_s}$$

及
$$\overline{u(x)}=(x-\overline{\beta_1})^{m_1}(x-\overline{\beta_2})^{m_2}\cdots(x-\overline{\beta_s})^{m_s}$$

为复多项式；$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 $f(x)$ 的实根，于是存在实多项式 $v(x),w(x)$，使

$u(x)=v(x)+\mathrm{i}w(x)$，所以

$$\overline{u}(x)\cdot\overline{u(x)}=[v(x)+\mathrm{i}w(x)][v(x)-\mathrm{i}w(x)]=v^2(x)+w^2(x)$$

因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 0$，且不存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使

$$\overline{u}(x)\cdot\overline{u(x)}=v^2(x)+w^2(x)=0$$

所以必有 $a_0>0$，且 e_i 均为偶数，$i=1,2,\cdots,t$（因为若某 e_j 为奇数，则 x 在 $a_j(j=1,2,\cdots,r)$ 附近左侧与右侧）取值时，$f(x)$ 的符号不同. 于是，令

$$p^2(x)=(x-a_1)^{e_1}(x-a_2)^{e_2}\cdots(x-a_r)^{e_r}$$

得

$$f(x)=a_0p^2(x)[v^2(x)+w^2(x)]=$$

$$[\sqrt{a_0}p(x)v(x)]^2+[\sqrt{a}p(x)w(x)]^2$$

这样，取 $g(x)=\sqrt{a_0}p(x)v(x)$，$h(x)=\sqrt{a}p(x)w(x)$ 即合要求.

如果避免使用复数，我们也可以证明定理 4，甚至还可以附带多证明两个结论.

利用类似的方法我们可以证明如下的：

定理 5 设 $f(x)$ 为实多项式，且对任何 $a\in\mathbf{R}$，$f(a)\geqslant 0$（即 $f(x)$ 是正定的），则存在实系数多项式 $A_r(x)$，$B_r(x)$ $(r=1,2,3)$ 满足

$$f(x)=A_1^2(x)+B_1^2(x)=A_2^2(x)+xB_2^2(x)=A_3^2(x)-xB_3^2(x)$$

证明 我们可设

$$f(x)=a(a-a_1)^{e_1}\cdots(x-a_s)^{e_s}(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_tx+q_t)$$

其中 $a,a_1,\cdots,a_s,p_1,\cdots,p_t,q_1,\cdots,q_t$ 都是实数，$e_1,\cdots,e_s$ 都是正整数（由定理 4 的证明知 e_i，$i=1,\cdots,s$ 都为偶数），并且 $p_r^2\leqslant 4q_r$ $(*)$ $(r=1,2,\cdots,t)$ 且 $a>0$，注意到由 $(*)$ 式得出 $q_r\geqslant 0$ 及 $2\sqrt{q_r}\geqslant p_r\geqslant -2\sqrt{q_r}$，所以

$$x^2+p_rx+q_r=(x+\frac{p_r}{2})^2+(\sqrt{q_r-\frac{p_r^2}{4}})^2=$$

$$(x-\sqrt{q_r})^2+x(\sqrt{p_r+2\sqrt{q_r}})^2=$$

$$(x+\sqrt{q_r})^2-x(\sqrt{-p_r+2\sqrt{q_r}})^2$$

其中 $x+\frac{p_r}{2}$，$\sqrt{q_r-\frac{p_r^2}{4}}$，$x-\sqrt{q_r}$，$\sqrt{p_r+2\sqrt{q_r}}$，$x+\sqrt{q_r}$，$\sqrt{-p_r+2\sqrt{q_r}}$ 都是实多项式.

由于 $[A^2(x)+B^2(x)][C^2(x)+D^2(x)]=$

$$[A(x)C(x)+B(x)D(x)]^2+[A(x)D(x)-B(x)C(x)]^2$$

$[A^2(x)\pm xB^2(x)][C^2(x)\pm xD^2(x)]=[A(x)C(x)+xB(x)D(x)]^2\pm x[A(x)D(x)-B(x)C(x)]^2$

而 $f(x)$ 的分解式中每个因式均可写成 $A^2(x)+B^2(x)$ 或 $A^2(x)\pm xB^2(x)$ 的形

式，所以 $f(x)$ 也可写出同样的形式.（证毕）

用同样的办法及数学归纳法可证明如下的：

定理6 如果实系数多项式 $p(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 只取非负的值，则它可表为

$$p(x) = Q_1^2(x) + \cdots + Q_n^2(x)$$

其中 $Q_1(x), \cdots, Q_n(x)$ 是实系数多项式.

这是匈牙利 1979 年提供给 IMO 的预选题.

我们还可以从变量的个数方面将其推广为：

定理 7 设 $F(x,y)$ 是 $2m$ 次正定齐次多项式，$F(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$，则 $F(x,y)$ 均可表示为两个实系数多项式的平方和.

对于 $n, m \geqslant 1$，我们以 $P_{n,2m}$ 表示 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的实系数正定 $2m$ 次齐次多项式全体，而以 $\Sigma_{n,2m}$ 表示可表成实系数多项式平方和的关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 $2m$ 次齐次多项式全体，由于可表为多项式平方和的多项式必然正定，从而 $\Sigma_{n,2m} \subseteq P_{n,2m}$. 希尔伯特早在 1888 年证明了：

定理 8 当 $(n,2m) = (n,2)(n \geqslant 1)$，$(2,2m)(m \geqslant 1)$ 和 $(3,4)$ 时 $\Sigma_{n,2m} = P_{n,2m}$，而对 $(n,2m)$ 的其他值，$\Sigma_{n,2m} \neq P_{n,2m}$，即对于 $(n,2m)$ 的其他值，均存在 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的实系数 $2m$ 次正定齐次多项式不为实系数多项式平方和.

希尔伯特的证明使用了复杂的代数几何方法，而且证明属于非构造性（即存在性证明），即并没有给出具体例子. Motzkin, Robinson, 蔡文端, 林节玄, Reznick 及冯克勤给出一批例子.

编后语 *我们感到虽然数学竞赛活动日益兴旺，但数学竞赛理论研究却似乎正处于一个缺乏活力的静止阶段，不是在走向令人激动的中盘，而像是收拾残局，它的题材越来越枯竭似乎只剩下命题与解题，涉猎也越来越狭窄只剩下方法与技巧，本文是一种尝试.*

Conceptual thinking is the salt of mathematics.

——波士顿

一道 IMO 试题与 Siegel 引理

刘培杰

§1 试题及推广

1976 年在奥地利举行的第十八届 IMO 上，荷兰提供了一道命题为：

考察 q 个未知量的 p 个方程（$q=2p$）

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1q}x_q=0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2q}x_q=0$$
$$\vdots$$
$$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pq}x_q=0$$

其中 $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$，$i=1,2,\cdots,p$；$j=1,2,\cdots,q$.

证明 这组方程存在一解 $(x_1,x_2,\cdots,x_q)$ 满足条件

i) $x_j(j=1,2,\cdots,q)$ 都是整数；

ii) $x_1,x_2,\cdots,x_q$ 不全为零；

iii) $|x_j|\leqslant q$，$(j=1,2,\cdots,q)$.

我们可以将此试题做如下的推广：

推广 I 设

$$y_k=a_{k1}x_1+\cdots+a_{kq}x_q\qquad k=1,\cdots,p\tag{1}$$

是 q 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_q$ 的具有有理整系数的 p 个线性型，其中 $0<p<q$，且设所有系数 a_{kl} 的绝对值都不大于一个给定的正有理整数 A；则存在 $y_1=0,\cdots,y_p=0$ 的一组不全为 0 的有理整数解：$x_1,\cdots,x_q$，适合条件

$$|x_k|<1+(qA)^{\frac{p}{q-p}}\qquad k=1,\cdots,q$$

证明 设 H 是一个正有理整数，在式(1)中用 $2H+1$ 个值 $0,\pm1,\cdots,\pm H$ 各自分别代替 $x_1,\cdots,x_q$，则得有整数坐标 $y_1,\cdots,y_p$ 的 $(2H+1)^q$ 个点，这些点都

在超立方体

$$-qAH \leqslant y_k \leqslant qAH \qquad k = 1,\cdots,p$$

中.因为在这个超立方体中恰好有$(2qAH+1)^p$个不同的有整数坐标的点,所以如果

$$(2qAH+1)^p < (2H+1)^q \tag{2}$$

则至少有两组不同的$x_1,\cdots,x_q$对应于同一个点$y_1,\cdots,y_p$.此时,把这两组不同的$x_1,\cdots,x_q$相减,即得$y_1=0,\cdots,y_p=0$的一组不全为0的有理整数解$x_1,\cdots,x_q$,且适合不等式

$$|x_k| \leqslant 2H \qquad k = 1,\cdots,q \tag{3}$$

现在选取$2H$为下面长度为2的区间中的偶数

$$(qA)^{\frac{p}{q-p}} - 1 \leqslant 2H \leqslant (qA)^{\frac{p}{q-p}} + 1$$

因为

$$(2qAH+1)^p < (qA)^p(2H+1)^p \leqslant (2H+1)^{q-p}(2H+1)^p = (2H+1)^q$$

所以式(2)成立,于是由式(3)知命题成立.

可以看出,当取$q=2p$,$A=1$时立即可得试题.

下面我们进一步将其推广为线性型的系数是代数数域k中的整数时的情形.

推广2　设p个线性型$y_k=a_{k1}x_1+\cdots+a_{kq}x_q$,$(k=1,\cdots,p;p<q)$的系数是代数数域$k$中的整数.且设$|\overline{a_{kl}}|\leqslant A$.(对于代数数域$k$中的任意一个数$\xi$,我们定义$|\overline{\xi}|=\max(|\xi^{(1)}|,\cdots,|\xi^{(n)}|)$,其中$\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(n)}$是$\xi$的$n$个共轭数),则存在$y_1=0,\cdots,y_p=0$的一组解$x_1,\cdots,x_q$,它们是$k$中的不全为0的整数,且适合

$$|\overline{x_k}| < c + c(cqA)^{\frac{p}{q-p}} \qquad k = 1,\cdots,q$$

其中c是一个只与k有关的常数.

证明　选取k中的所有整数对于有理数域的一个基底$b_1,\cdots,b_h$.于是k内的任一整数a可以表示为$a=g_1b_1+\cdots+g_hb_h$的形式,其中$g_1,\cdots,g_h$是有理整数.解出由a的h个共轭数所组成的h个齐次线性方程中的$g_1,\cdots,g_h$.可知$|g_k|<\gamma|\overline{a}|$,此处$\gamma_1$仅与基底的选择有关,现在写$x_k=x_{k1}b_1+\cdots+x_{kh}b_h$.其中$x_{k1},\cdots,x_{kh}$是有理整数;并把$pqh$个乘积$a_{kl}b_r$也都用基底的线性组合表示出来.于是关于$x_1,\cdots,x_q$的$p$个方程$y_1=0,\cdots,y_p=0$变为关于$qh$个有理整数$x_{11},\cdots,x_{qh}$的$ph$个齐次线性方程,其系数是绝对值$<\gamma_1\cdot\max|\overline{a_{kl}b_r}|<\gamma_2A$的有理整数.此处$\gamma_2$是一仅与基底有关的有理整数,应用推广1,我们便可以得到它的一组适合于

$$|x_{kL}| < 1 + (\gamma_2 hqA)^{\frac{p}{q-p}} \qquad k = 1, \cdots, q \qquad L = 1, \cdots, h$$

的不全为 0 的整数解 x_{kL}，由此可知，推广 2 成立.

此定理是德国数学家施奈德(Schneider Theodor)在其著作《超越数引论》给出的.推广 1 一般称为 Siegel 引理.最早在他的一本小册子《超越数》中出现(有中译本).

德国数学家西格尔(Siegel Carl Ludwig 1896－12－31—1981－4－5)1915 年进入柏林大学学习，1920 年在哥廷根大学获得博士学位，1940 年在美国普林斯顿大学工作，1951 年返回哥廷根大学任数学教授兼数学研究所所长，他同时为美国科学院院士、哥廷根科学院院士、奥斯陆科学院院士、瑞典皇家科学院院士、丹麦皇家科学院院士.1978 年以 82 岁高龄获首届沃尔夫(Wolf)奖.

他的主要贡献在解析数论和函数论上.

关于 Siegel 引理还有几个有用结论.

推广 3 设 $k = Q(\alpha)$ 是代数数域，$d = [k:Q]$，$N, M \in \mathbf{N}$，$b_{ij}(1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant M)$ 是 k 中的代数整数且不全为零，以 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 表示 k 到 C 的嵌入，若 $N \geqslant 2dM$，则方程组

$$\sum_{i=1}^{N} b_{ij} x_i = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant M$$

有不全为零的有理整数解 $x_1, \cdots, x_N$，使得

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant M} |x_i| \leqslant \sqrt{2} N \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant M} \prod_{k=1}^{N} \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant M} |\sigma_k(b_{ij})| \right) \right)^{\frac{1}{d}}$$

推广 4 设 k 是代数数域，$d = [k:Q]$，又设 $a_{ij}(1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant M)$ 是 k 中的一组不全为零的代数整数

$$\max_{i,j} |\overline{a_{ij}}| \leqslant A$$

若 $N > dM$，则存在不全为零的有理数 $x_1, \cdots, x_N$，使得

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i| \leqslant (\sqrt{2} NA)^{\frac{dM}{N-dM}} \qquad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_i = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant M$$

这两个结论在判定超越数中有用.

1900 年，Hilbert 在他提出的著名的二十三个数学问题中，问道"对于任意的代数数 $\alpha \neq 0$，及代数无理数 β，α^β 是否是超越数."而且他以 e^π，$(-1)^i$ 与 $2^{\sqrt{2}}$ 为具体例子.(称为 Hilbert 第七问题)

1929 年，А. О. Гельфонд 证明了：如果 $\alpha \neq 0, 1$ 是代数数，β 是虚二次无理数，则 α^β 是超越数，因此 e^π 是超越数.

1930 年 Кузьмин 将上述结论推广到 β 是实二次无理数的情形，从而得到 $2^{\sqrt{2}}$ 的超越性证明.

1934 年，A. O. Гельфонд 与 Th. Schneider 互相独立地证明了若 $\alpha \neq 0,1$ 是代数数，β 是代数无理数，则 α^{β} 是超越数，其中 Гельфонд 的证明就用到了推广 3.

Lehmer 问题：设 $\alpha \neq 0$ 是 d 次代数数，$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d$ 是 α 的最小多项式的全部零点. a_0 是 α 的最小多项式的首项系数. 记

$$M(\alpha) = |a_0| \cdot \sum_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)$$

若 α 是代数整数，则必有 $M(\alpha) \geqslant 1$；若 α 是单位根，则 $M(\alpha) = 1$.

1957 年，Kronecker 证明了：若 $M(\alpha) = 1$，则 α 必是单位根.

1933 年，D. H. Lehmer 提出这样的问题：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，是否存在非零的代数整数 α，使得 $1 < M(\alpha) < 1 + \varepsilon$.

应用 Schneider 创造的方法及推广 2 可以证明一个关于 Lehmer 问题的结果.

定理 若 α 是 $d(\geqslant d_0)$ 次代数整数，则当 d_0 充分大时，必有常数 $c_1 > 0$，使得当

$$M(\alpha) = 1 + \frac{c_1}{d \lg d}$$

时，α 是单位根.

§2 Minkowski 线性型定理

回到开始那道 IMO 试题，给出一个：

证明 考察适合条件 $|y_j| \leqslant p (j = 1,2,\cdots,q)$ 的所有整数组$(y_1, y_2, \cdots, y_q)$. 由于每一个位置上只能取 $-p, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, p$，这 $2p+1$ 个数中的一个，而又一共有 q 个位置，从而一共有$(2p+1)^q$ 个这样的数组，令

$$A_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{iq}y_q \qquad i = 1,2,\cdots,p$$

由于每个 a_{ij} 只能是 $-1,0,1$，所以每一个 A_i 也都是整数，并且

$$|A_i| \leqslant |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_q| \leqslant pq \qquad i = 1,2,\cdots,p$$

由此可知，由上述$(y_1, y_2, \cdots, y_q)$造出来的数组$(A_1, A_2, \cdots, A_p)$至多有$(2pq+1)^p = (4p^2+1)^p$ 种花样，可是，因为

$$(2p+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p > (4p^2+1)^p$$

因此一定有两组不同的$(y_1, y_2, \cdots, y_q)$与$(y'_1, y'_2, \cdots, y'_q)$，由它们所造出的$(A_1, A_2, \cdots, A_p)$与$(A'_1, A'_2, \cdots, A'_p)$是相同的，即

$$A_1 = A'_1, A_2 = A'_2, \cdots, A_p = A'_p$$

这说明

$$a_{i1}(y_1-y'_1)+a_{i2}(y_2-y'_2)+\cdots+a_{iq}(y_q-y'_q)=0\qquad i=1,2,\cdots,p$$

令 $x_1=y_1-y'_1, x_2=y_2-y'_2,\cdots,x_q=y_q-y'_q$ 它们都是整数,不全为零,并且适合

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{iq}x_q=0\qquad i=1,2,\cdots,p$$

而且,对于 $j=1,2,\cdots,q$ 有

$$|x_j|=|y_j-y'_j|\leqslant|y_j|+|y'_j|\leqslant 2p=q$$

这说明我们已经找到了一个解 $(x_1,x_2,\cdots,x_q)$,它适合题目的全部要求.

这一证明过程是典型的闵可夫斯基关于数的几何的证明手法,为了对比起见我们看一下关于线性型的闵可夫斯基定理的证明.

闵可夫斯基线性型定理 假定有 n 个线性齐次表达式

$$L_p(x)=\sum_{q=1}^{n}a_{pq}x_q\qquad p=1,2,\cdots,n$$

这里 $a_{pq}\in\mathbf{R}$, $(p=1,\cdots,n;q=1,\cdots,n)$ 及行列式 $D=|a_{pq}|\neq 0$,还有 n 个正实数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,它们满足

$$k_1k_2\cdots k_n\geqslant|D|$$

则恒存在 n 个不全为 0 的有理整数 $x_1,\cdots,x_n$ 满足

$$|L_p(x)|\leqslant k_p\qquad p=1,2,\cdots,n\tag{4}$$

证明 用反证法,假设 n 个不等式(4)没有有理整数解 $x_q\neq 0$,则关于 $k_1,\cdots,k_n$ 有 $\prod_{i=1}^{n}k_i<|D|$.

为此,我们考虑 n 维空间具有笛卡尔坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 的超平行多面体

$$|L_p(x)|\leqslant\frac{k_p}{2}\qquad p=1,2,\cdots,n$$

而且想象同样平行于它的超平行多面体使这一超平行多面体之中心点 $0,0,\cdots,0$ 对应于所有的格子点 $g_1,\cdots,g_n$,此处 g_i 经过所有有理整数,这样一来,我们有无穷多个超平行多面体 $\Pi_{g_1,\cdots,g_n}$ 如下

$$|L_p(x-g)|\leqslant\frac{k_p}{2}\qquad p=1,2,\cdots,n$$

若式(4)无解,则没有两个超平行多面体会有一个公共点,事实上,若点 (x) 属于两个超平行多面体 $\Pi_{g_1,\cdots,g_n}$ 与 $\Pi_{g'_1,\cdots,g'_n}$,则由

$$-\frac{k_p}{2}\leqslant L_p(x-g)\leqslant\frac{k_p}{2}$$

与

$$-\frac{k_p}{2}\leqslant L_p(x-g')\leqslant\frac{k_p}{2}$$

相减即得

$$|L_p(g-g')|\leqslant k_p$$

即式(4)有一个解 $x_q=g_q-g'_q$.

因此属于一个确定的超立方体 $|x_q|\leqslant L(q=1,2,\cdots,n)$ 的所有 Π 之体积必须小于超立方体之体积 $(2L)^n$,由此立即可以得到开始的断言,事实上,我们首先命 c 为一个数使初始图形 $\Pi_{0,\cdots,0}$ 之点的坐标的绝对值 $\leqslant c$,则所有满足

$$|g_q|\leqslant L\qquad q=1,2,\cdots,n$$

之 $\Pi_{g_1,\cdots,g_n}$ 均属于超立方体 $|x_q|\leqslant L+c$,这是由于从 $|L_p(x-g)|\leqslant\frac{k_p}{2}$ 与 $|g_q|\leqslant L$,可知 $|x_q|=|x_q-g_q+g_q|\leqslant|x_q-g_q|+|g_q|\leqslant c+L$,所以若 L 是一个正有理整数,则共有 $(2L+1)^n$ 个这种 $\Pi_{g_1,\cdots,g_n}$ 及它们的总体积为

$$(2L+1)^nJ\leqslant(2L+2c)^n$$

此处 J 为单个 Π 的体积,除以 L^n,并取极限 $L\to\infty$,则得 $J\leqslant 1$.

另一方面,有

$$J=\int_{|L_p(x)|\leqslant\frac{k_p}{2}}\cdots\int\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{1}{|D|}\int_{|y_p|\leqslant\frac{k_p}{2}}\cdots\int\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n=\frac{k_1k_2\cdots k_n}{|D|}$$

因此若这些不等式除 $0,\cdots,0$ 之外无整数解,则 $k_1\cdot k_2\cdot\cdots\cdot k_n\leqslant|D|$.在这一断言中,不等号 $<$ 必须成立.这是因为对于 $k_1,\cdots,k_n$ 无解.由连续性可知对 $k+\varepsilon$ 仍然无解,并且这些 k 的乘积仍 $\leqslant D$.所以原来的 k 的乘积必须 $<|D|$.

由此便证明了结论.

参考文献

[1] A.Baker. Transcendental number theory[M]. Cambridge University Press.

[2] 朱尧辰,徐广善著.超越数引论[M].北京:科学出版社,2003.

[3] 朱尧辰,王连祥著.丢番图逼近引论[M].北京:科学出版社,1993.

[4] C.L.SIEGEL 著,超越数[M].魏道政,译.北京:科学出版社,1958.

[5] E.赫克著.代数数理论讲义[M].王元,译.北京:科学出版社,2005.

关于一道候选试题的注记

刘培杰

1989 年印度提供给第 30 届 IMO 中有一题为：

设 $t(n)(n=3,4,5,\cdots)$ 表示互不全等的，边长为整数，周长为 n 的三角形的个数. 例如 $t(3)=1$，证明

$$t(2n-1)-t(2n)=\left[\frac{n}{6}\right] \text{或} \left[\frac{n}{6}\right]+1$$

具体有

$$t(2n-1)-t(2n)=\begin{cases}\left[\dfrac{n}{6}\right]+1, \text{若 } n=6k+2,6k+4,6k+5; \\ \left[\dfrac{n}{6}\right], \text{若 } n=6k,6k+1,6k+3.\end{cases}$$

这是一个老问题，早在 1956 年我国就有人研究过这个问题，得到如下结果

$$t(n)=\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\left[\frac{n-k-2\left[\frac{n-2k}{2}\right]}{2}\right]+\sum_{k=\left[\frac{n}{4}\right]+1}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\left(\left[\frac{n-k+1}{2}\right]-k\right)$$

但这一结果不便于应用，所以 1988 年杨之在《数学通讯》(第二期) 上又给出了下列结果

$$t(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{48}+\dfrac{1+(-1)^{\frac{n-6}{6}}}{8} & n=6k \\ \dfrac{(n+3)^2-16}{48}+\dfrac{1+(-1)^{\frac{n-7}{6}}}{8} & n=6k-1 \\ \dfrac{n^2-4}{48}-\dfrac{1+(-1)^{\frac{n+4}{6}}}{8} & n=6k+2 \\ \dfrac{(n+3)^2}{48}+\dfrac{1+(-1)^{\frac{n-3}{6}}}{8} & n=6k+3 \\ \dfrac{n^2-16}{48}+\dfrac{1+(-1)^{\frac{n+2}{6}}}{8} & n=6k+4 \\ \dfrac{(n+3)^2-4}{48}-\dfrac{1+(-1)^{\frac{n-5}{6}}}{8} & n=6k+5\end{cases}$$

利用此表达式不难验证上述试题的结论正确.

等分布数列问题

刘培杰

一位准备参加1999中国数学奥林匹克(CMO)的选手与笔者(他的指导教师)曾有如下的的对话.

§1　是神来之笔吗?

学生:老师,我最近做了这样一道题:

试题1　已给实数 $\alpha>1$,试构造一个无穷有界数列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$,使得对每一对不同的非负整数 i,j 都有 $|x_i+x_j||i-j|^{\alpha}\geqslant 1$.

老师:这是一道第二十九届IMO试题,并且已发表的解答就有好几种.

学生:解答我倒是能看懂,但很难理解他们是如何想到的,也就是"知其然而不知其所以然",并且许多资料都注明某一解法是由两届IMO满分金牌的得主,一位咱们哈尔滨的选手罗炜①给出的,作为中学生我感到惊奇,这个解法可否称为"神来之笔",只能出自天才的头脑.

老师:没有什么天才,华罗庚这位举世公认的"天才"早就说过"天才出自勤奋".首先试题1并不是一个新题,它的一个更强的形式即 $\alpha=1$ 曾作为苏联1978年中学数学竞赛试题出现过,即如下的:

试题2　证明:存在无穷有界数列 x_n,使对不同的 m 和 k,不等式 $|x_m-x_k|\geqslant\dfrac{1}{|m-k|}$ 成立.

这一点南京师范大学的单墫教授早已发现.

学生:老师,能讲一下这道题的证明吗?

老师:可以,先指出满足此题要求的数列是 $4\{n\sqrt{2}\}$,其中 $\{x\}=x-[x]$ 是

① 罗炜,菲尔兹奖得主,丘成桐先生博士生.研究方向为微分几何,现为浙江大学博士后.

x 的小数部分($n=1,2,3,\cdots$)

事实上,如果 $p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{N},p<(4-\sqrt{2})q$,则

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|pq^2-p^2|}{q(q\sqrt{2}+p)}>\frac{1}{4q^2}$$

因此,当 $n>k\geqslant 1$ 时

$$|\{m\sqrt{2}\}-\{k\sqrt{2}\}|=|(m-k)\sqrt{2}-l|>\frac{1}{4(m-k)}$$

其中

$$l=[m\sqrt{2}]-[k\sqrt{2}]<m\sqrt{2}-k\sqrt{2}+1\leqslant$$
$$(m-k)(\sqrt{2}+1)<(4-\sqrt{2})(m-k)$$

学生:这个数列 $4\{n\sqrt{2}\}$ 是怎样想出来的?数列的形式很多,为什么偏偏选择 $\{n\sqrt{2}\}$ 型的,有什么线索可寻吗?

老师:因为从题中要求条件 $|x_i-x_j|\geqslant\frac{1}{|i-j|}$ 可知,数列 $\{x_i\}$ 的项与项之间不可能太"拥挤",因为第 n 项与第 $n+1$ 项之间距离就大于等于 1,但这个数列又不能是单调的,因为单调数列两项之间距离大于 1,就会是一个发散的,不能满足有界性,所以这个数列应是具有往复性.由于区间的长短并不是本质的,因为我们可以将数列 $\{x_i\}$ 乘以一个调节常数,使其振幅不宜过大,所以我们可以在 $[0,1]$ 内考虑这个问题,熟悉无理数性质的读者可能想到对任意一个无理数 α,$n\alpha$ 的小数部分 $\{n\alpha\}=n\alpha-[n\alpha]$ 恰好具有这样的往复性.

对话

为了增加点感性认识,我们可以用袖珍计算器计算 $\{n\sqrt{2}\}$,$n=1,2,\cdots,30$ 精确到小数点后三位,观察其变化规律:

$n=1$　0.414;　$n=11$　0.556;　$n=21$　0.698;

$n=2$　0.829;　$n=12$　0.971;　$n=22$　0.113;

$n=3$　0.243;　$n=13$　0.385;　$n=23$　0.530;

$n=4$　0.525;　$n=14$　0.799;　$n=24$　0.941;

$n=5$　0.071;　$n=15$　0.213;　$n=25$　0.355;

$n=6$　0.485;　$n=16$　0.627;　$n=26$　0.770;

$n=7$　0.899;　$n=17$　0.042;　$n=27$　0.184;

$n=8$　0.314;　$n=18$　0.456;　$n=28$　0.598;

$n=9$　0.728;　$n=19$　0.870;　$n=29$　0.012;

$n=10$　0.142;　$n=20$　0.284;　$n=30$　0.426.

从以上数据可以看出,$\{n\sqrt{2}\}$ 在 $(0,1)$ 内左右"摇摆"不定,不爱"扎堆",而这正是我们所希望看到的.

学生:老师,既然 $\{n\sqrt{2}\}$ 有这么有趣的性质,为什么在以前的各类竞赛中没

有体现呢?

老师:其实,竞赛关注一切有趣的初等数学课题,可谓"疏而不漏",只不过是你没有留意罢了,例如在 1979 年 IMO 中罗马尼亚曾提供了一个候选试题,恰好说明了$\{n\alpha\}$的这一特性.

试题 3 证明:对任意 $n \in \mathbf{N}$,有

$$\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$$

且对任意 $\varepsilon > 0$,总可以找到 $n \in \mathbf{N}$,使得

$$\{n\sqrt{2}\} < \frac{1+\varepsilon}{2+\sqrt{2}}$$

你能证明吗?

学生:我试试看吧,应该不会太困难.

对给定的 $n \in \mathbf{N}$,记 $m = [n\sqrt{2}]$,因为 $m \neq n\sqrt{2}$(否则,会导致$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ 为有理数的矛盾),所以有 $m < n\sqrt{2} \Rightarrow m^2 < 2n^2 \Rightarrow 1 \leqslant 2n^2 - m^2 = (n\sqrt{2} - m) \times (n\sqrt{2} + m) = \{n\sqrt{2}\}(n\sqrt{2} + m) < \{n\sqrt{2}\}2n\sqrt{2} \Rightarrow \{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$.第二个不等式不知如何证明?

老师:先要构造两个数列$\{n_i\}$,$\{m_i\}$,$n_1 = m_1 = 1$,$n_{i+1} = 3n_i + 2m_i$,$m_{i+1} = 4n_i + 3m_i$,$i \in \mathbf{N}$,并证明如下一个引理:

对所有 $i \in \mathbf{N}$,有 $2n_i^2 - m_i^2 = 1$.

学生:这个引理我来证明.对 i 用数学归纳法.当 $i = 1$ 时,显然成立,即 $2n_1^2 - m_1^2 = 1$.

假设对 $i = k$ 时,命题成立,即 $2n_k^2 - m_k^2 = 1$,可证明对 $i = k + 1$ 也成立.

注意到 $2n_{k+1}^2 - m_{k+1}^2 = 2(9n_k^2 + 12n_km_k + 4m_k^2) - (16n_k^2 + 24n_km_k + 9m_k^2) = 2n_k^2 - m_k^2 = 1$.

故由归纳法原理知,引理成立.

老师:现在来证明题目 3,现在给定 $\varepsilon > 0$,因为数列$\{n_i\}$是递增的,故存在 $n = n_{i_0}$,使得 $n > \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \frac{1}{\varepsilon})$.于是

$$\varepsilon(2n\sqrt{2} - 1) > 1 \qquad (1+\varepsilon)(2n\sqrt{2} - 1) > 2n\sqrt{2}$$

因为
$$0 < n\sqrt{2} - m = \frac{1}{2\sqrt{2} + m} < 1$$

所以由上述不等式和等式 $2n_{i_0}^2 - m_{i_0}^2 = 1$,得到

$$\frac{1+\varepsilon}{2m\sqrt{2}} > \frac{1}{2n\sqrt{2}-1} > \frac{1}{n\sqrt{2}+m} = n\sqrt{2}-m = \{n\sqrt{2}\}$$

§2　稠密与等分布数列

学生:在题目1的有些解答中,并没有用$\sqrt{2}$,而是用$\frac{\sqrt{2}}{2}$,是不是任何无理数α都可以用来构造$[n\alpha]$呢?

老师:要回答这个问题,先要介绍一个著名定理.1907年德国天才数论专家闵可夫斯基证明了一个定理:如果α是无理数,β是实数,但不等于$m\alpha+n(m,n\in\mathbf{Z})$,那么存在无穷多个整数$q$,满足不等式

$$\| q\alpha-\beta \| < \frac{1}{4|q|}$$

(其中记号$\|\theta\| = \min|\theta-z|$),对任意实数,即$\theta$到距它最近的整数的距离.这个定理告诉我们:当$\alpha\notin\mathbf{Q}$,$\beta$已知,存在$q\in\mathbf{Z}$,使$\|q\alpha-\beta\|$充分小,由此可知,$\{n\alpha\}$,当$n$充分大时,可以任意接近区间$[0,1]$中的任意一个给定的实数$\beta$,亦称$\{n\alpha\}$在$[0,1]$中是处处稠密的.

学生:我在一本杂志上看到了一个等分布的概念,它与这个问题有没有什么联系呢?

老师:问得好,我正想说如果进一步,我们还可以得到$\{n\alpha\}$(α是无理数)的下列重要性质:对任何$a<b$,满足$a\leqslant\{n\alpha\}<b$,$1\leqslant n\leqslant Q$的n的个数与n的总数Q的比渐近地与区间$[a,b)$的长度相等.这表明$\{n\alpha\}$在$[0,1)$中是"均匀"地分布的,我们称这种数列为"等分布数列"(亦称一致分布点列)它不仅是数论中的一个重要课题,而且在概率中也是重要的,近数十年来它被应用到数值分析中,特别是1960年赫尔顿(Halton.J.H)借助于孙子定理推广了范·得·高柏(Van der Corput)J.G点列,利用r进值小数定义了高维空间的等分布点列,同年华罗庚与王元利用实分圆域的独立单位组来构造高维空间等分布点列思维进行近似分析.

学生:刚才对等分布数列的定义是描述性的,那么能不能有一个解析的判别法呢?

老师:1914年德国数学家韦尔(Hermann Weyl ,1885—1955)用解析方法作为有效手段,得到了等分布的充要条件:

数列$x_1,x_2,\cdots$为等分布点列的充要条件是对任一整数$h\neq 0$,总有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i h x_n}\right| = 0$$

学生：我们能对$\{n\alpha\}$试用一下韦尔定理吗？

老师：可以，令$x_n = n\alpha - [n\alpha]$，$\alpha \notin \mathbf{Q}$，则对任一$h \in \mathbf{Z}$，$h \neq 0$有

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{e^{2\pi i h x_n}\}\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n\alpha}\right| = \frac{|e^{2\pi i h N\alpha} - 1|}{N(e^{2\pi i h\alpha} - 1)} \leqslant \frac{1}{N|\sin\pi h\alpha|}$$

这种手法在解析数论中会遇到([13]).

故

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0$$

所以用韦尔判别法知$\{n\alpha\}$为等分布点列.

学生：用韦尔判别法$\{n\alpha\}$的等分布性，当然简洁，但对高中生来说似乎有些难以理解，能否给出一个直观又通俗而且是非描述性的判别法？

老师：这当然可以，下面这个判别法有一点概率的味道.

数列$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$在$[0,1]$上等分布的充要条件是：$x_n$落在$[0,1]$的某一子区间中的"概率"等于这个子区间的长度. 更确切地说，就是该序列具有下述性质：设$[\alpha, \beta]$是$[0,1]$的任一子区间，$\gamma_n(\alpha, \beta)$表示$x_1, x_2, \cdots, x_n$含在$[\alpha, \beta]$中的个数，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n(\alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha$$

学生：现在我很有兴趣知道如何用此判断法来判断$\{n\alpha\}$的等分布性.

老师：那我们还需要借助一个著名的德国数学家赫维茨(Adolf Hurwitz 1859—1919)，提出的定理：若α为无理数，必有无穷多个有理数$\frac{p}{q}$，满足$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$，现在我们可以证明$\{n\alpha\}$的等分布性了，令$\alpha = \theta$为无理数.

设(a, b)为$(0,1)$内的任一小区间，由赫维茨定理，我们有无穷多对整数p, q. 其中$q > 0$，p使

$$\theta = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \qquad |\delta| < 1, (p, q) = 1$$

命$u, v \in \mathbf{Z}$，使$\frac{u-1}{q} < a \leqslant \frac{u}{q} < \frac{v}{q} \leqslant b < \frac{u+1}{q}$.

又设$n = rq + s, 0 \leqslant s < q, j \in \mathbf{Z}, 0 \leqslant j < r$，我们观察完全剩余系：$jq, jq+1, \cdots, jq+q-1$，显然

$$\{(jq+k)\theta\} = \left\{\frac{kp}{q} + \frac{j\delta}{q} + \frac{k\delta}{q^2}\right\} = \left\{\frac{kp + [j\delta]}{q} + \frac{\delta'}{q}\right\} \qquad |\delta'| < \alpha$$

因$[j\delta]$与k无关，故当$k = 0, 1, 2, \cdots, q-1$时，$pk + [j\delta]$也跑过一完全剩余系，故q个数$\{(jq+k)\theta\}$中，其落入(a, b)中的多于$v - u - 4$个而少于$v - u + 6$个. 因此，$\{n\theta\}(n = 1, 2, \cdots, u)$中，落入$(a, b)$中的，多于

$$r(v-u-4)=\frac{n}{q}(v-u-4)-\frac{s}{q}(v-u-4)\geqslant$$

$$n(b-a)-\frac{\delta}{q}n-\frac{v-u-4}{q}n$$

个，设 $\varepsilon>0$ 为任意给定的数，满足够大的 q 使 $\frac{\theta}{q}<\frac{\varepsilon}{2}$，再取 n，使 $\frac{q+\theta}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$，则得

$$n(b-a)-n\varepsilon\leqslant N_n(a,b)\leqslant n(b-a)+n\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(a,b)}{n}=b-a$$

学生：除了 $\{n\alpha\}$ 以外还有其他形式的等分布数列吗？它们都有什么特征？

老师：等分布数列有许多种，比如从德国数学家普吕弗（Heinz Ernsf Paul Prüfer 1896—1934）的通信中，我们知道早在 1914 中韦尔曾证明了如下定理：

设多项式 $p(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r$ 至少有一个无理数的系数，那么数列 $p(n)-[p(n)]$ 在 $[0,1]$ 上是等分布的.

显然当 $r=1$ 时，$p(n)$ 即为 $n\alpha$.

更一般的结果是 1931 年由 J. G. randre Corput 给出的：如果对于任意的自然数 h，函数 $g(n)-[g(n)]$ 是 $[0,1]$ 内等分布的，其中 $g(x)=f(x+h)+f(x)$，则 $f(n)$ 也是 $[0,1]$ 内等分布的.

学生：除了这些还存在其他形式的等分布数列吗？

老师：当然，为了找出更大一类等分布数列，匈牙利现代数学之父费耶尔（Leapolt Fejer 1880—1959）还专门证明了一个刻划定理：

设函数 $g(t)$ 对 $t\geqslant 1$ 有以下性质：

i) $g(t)$ 是连续可微的；

ii) 当 $t\to\infty$ 时，$g(t)$ 单调增加到 ∞；

iii) 当 $t\to\infty$ 时，$g'(t)$ 单调减少到 0；

iv) 当 $t\to\infty$ 时，$tg'(t)$ 趋于 ∞.

那么，数列 $x_n=g(n)-[g(n)]$，$n=1,2,3,\cdots$，在区间 $[0,1]$ 上是等分布的.

学生：可以举两个例子吗？

老师：可以，比如设 $a>0,0<\sigma<1$，则数列 $x_n=an^\sigma-[an^\sigma]$ 在区间 $[0,1]$ 上是等分布的.

再比如，设 $a>0,\sigma>1$，则数列 $x_n=a(\lg n)^\sigma-[a(\lg n)^\sigma]$ 在 $[0,1]$ 上是等分布的.

§3 等分布数列的应用

学生:老师,刚才听您介绍那么多世界大牌数学家都研究过等分布数列,它究竟有什么用呢?

老师:最常用的就是用来计算积分值,你也学过一点微积分,回想一下我们如何计算函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的积分,我们是把 $[0,1]$ 分成 n 等分,取分点的函数值的算术平均值用来作为 $f(x)$ 的积分的近似值(矩形公式),这就是化连续为离散的方法. 本来对一重积分来说,用这种方法已臻于至善,因为能够导出最精密的误差(指误差的阶),但当积分不是一重时,便遇到了困难,固定分点的个数,则当积分的重数增加时,误差也随之迅速增加,换句话说,当要求有一定的精密度时,则所需分点的数目随着积分重数的增加而迅速增加,因此用这一方法来处理高维空间的数值积分,计算量十分巨大,因而难以实现,所以近些年发展了蒙特·卡罗(Monte Carlo)方法,即随机地取 n 个点 $(x_1^{(k)},\cdots,x_s^{(k)})(k=1,2,\cdots)$,然后用这 n 个点的函数值的算术平均来逼近积分,所谓"随机"的意思是指取每一点的概率都是相等的,收敛速度较快,但缺点是得到的误差不是真正的误差而是概率误差. 为了克服这一缺点,基于数论的等分布数列方法出现了,它所得到的误差不再是概率的,而是肯定的,不仅如此,这些肯定的误差要比概率误差还要好,而且可以证明,对于某些函数类来说,这种逼近的误差的主阶与单重积分一样.

另外利用等分布点列还可以求多元函数的最大值,即如果求 k 个变数 $(x_1,\cdots,x_k)=x$ 的函数 $f(x)$ 的最大值,其定义域是 $D:\xi_i\leqslant x_i\leqslant y_i(i=1,2,\cdots,k)$. 在区域 D 中取一个等分布的点列 $x^{(j)}(j=1,2,3,\cdots)$,由于等分布点法在求数值积分上已取得了较好的成效,所以可以把求极值问题看成某一带参数的积分的极限,即

$$\max|f|=\lim_{p\to\infty}\left(\int_0^1\cdots\int_0^1|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

学生:在有些书中将 $\{\cdot\}$ 记为(mod 1),这容易使人想到等分布的概念可否推广到 mod P 上.

老师:它确定可以推广到剩余环上序列.

设 m 是一正整数,$\{a_n\}$ 是一整数序列,定义 $\{a_n\}$ 关于模 m 的分布函数为

$$F_m(k)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left|\{a_n\mid n\leqslant x,a_n\equiv k(\mathrm{mod}\ m)\}\right|$$

即是说,$F_m(k)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中满足 $n\leqslant x,a_n\equiv k(\mathrm{mod}\ m)$ 的 a_n 的个数.

如果 $F_m(k)$ 是一有限的常数，即

$$F_m(1)=F_m(2)=\cdots=F_m(m)$$

从 $\sum_{i=1}^{m}F_m(i)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left|\{a_n\mid n\leqslant x\}\right|=1$，得

$$F_m(1)=F_m(2)=\cdots=F_m(m)=\frac{1}{m}$$

此时称序列模 m 是等分布的.

如果序列 $\{a_n\}$ 满足：

i) $\{a_n\mid(a_n,m)=1\}$ 是无限集；

ii) 对 $1\leqslant j\leqslant m,(j,m)=1$，恒有

$$F_m^*(j)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\{a_n\mid n\leqslant x,a_m\equiv j(\bmod m)\}\right|}{\left|\{a_n\mid n\leqslant x,(a_n,m)=1\}\right|}=\frac{1}{\varphi(m)}$$

则称序列 $\{a_n\}$ 是模 m 弱等分布的.

1984 年 Narkiewicz 证明了如下：

定理　设 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$，$m=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$ 是 m 的标准分解式.

i) 序列 $\{f(n)\mid n=1,2,\cdots\}$ 是模 m 的等分布序列，当且仅当多项式 $f(x)$ 是模 m 的置换多项式；

ii) 序列 $\{f(n)\mid n=1,2,\cdots\}$ 是模 m 的弱等分布序列，当且仅当多项式 $f(x)$ 是模 $p_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的正则置换多项式.

学生：置换多项式和正则置换多项式是什么意思？

老师：设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，如果当 x 过模 m 的一个完全剩余系时，$f(x)$ 也过模 m 的一个完全剩余系，则称 $f(x)$ 是模 m 的置换多项式，若多项式 $f(x)$ 满足 $f'(x)\equiv 0(\bmod m)$ 无解，则称 $f(x)$ 是模 m 的正则多项式.

在模 m 的等分布论中，有两个重要的量：$M(f)$ 和 $M^*(f)$，其中

$$M(f)=\{m\mid\{f(n)\}\text{ 是模 }m\text{ 的等分布}\}$$

$$M^*(f)=\{m\mid\{f(n)\}\text{ 是模 }m\text{ 的弱等分布}\}$$

对此，Zame 证明了：设 M 是由正整数组成的一个集，则存在一个函数 f 使 $M(f)=M$ 当且仅当 M 具有下述性质："如果 $n\in M^*$，$d\mid n$，则 $d\in M^*$."

目前一个没有解决的猜想是关于对应于 $M^*(f)$ 是否有类似的结果，即：

猜想　设 M^* 是由正整数组成的一个集，则存在一个函数 f 使 $M^*(f)=M^*$，当且仅当 M^* 具有下述性质："如果 $n\in M^*$，$d\mid n$，d 被 n 的所有素因子整除，则 $d\in M^*$".

这个猜想的必要性是容易证明的，但充分性则是困难的. 到目前为止，最好的结果是由罗索丘维兹(Rose chowicz)女士得到的，她证明了：当 M^* 不含偶数

时,上述猜想成立.

学生:能否考虑在剩余类环上构造一个满足题目 1 条件的序列?

老师:应该是不太困难的.

§4　再论稠密和等分布

学生:刚才我们讨论的有些远了,其实我们不一定要求等分布,只要稠密就已经具有单墫教授要求的往返性了.

老师:对于稠密,费耶尔也给出了如下的刻划定理:

当 $t \geqslant 1$ 时,函数 $g(t)$ 有如下性质:

i) $g(t)$ 是连续可微的;

ii) 当 $t \to \infty$ 时,$g(t)$ 单调地增加到 ∞;

iii) 当 $t \to \infty$ 时,$g'(t)$ 单调地减少到 0;

iv) 当 $t \to \infty$ 时,$tg'(t) \to 0$.

这时,数列 $x_n = g(n) - [g(n)]$,$n = 1,2,3,\cdots$ 在区间$[0,1]$中处处稠密,但它们不是等分布的,利用这一判断定理,我们可得如下两个特例:

例 1　对 $0 < \sigma < 1$,数列 $x_n = a(\lg n)^{\sigma} - [a(\lg n)]^{\sigma}$,$n = 1,2,3,\cdots$ 在区间$[0,1]$上处处稠密,但不是等分布的.

例 2　设将自然数 $1,2,3,4,\cdots$ 的常用对数的平方根一个接一个地排成一个无限阵列,考虑第 $j(j \geqslant 1)$ 位小数(从小数点往右数)的数码,令 $v_j(n)$ 表示在前 n 个整数 k 中,其$\sqrt{\lg k}$ 的第 j 位小数是 g 的个数,则数列 $f(n) = \frac{v_j(n)}{n}$,$n = 1,2,3,\cdots$ 在$[0,1]$内处处稠密.

显然这是一个有理数列,可以以此回答潘承彪教授的一个提问.潘教授在文献 2 中指出:"对 $a = 1$ 时,是否能构造出一个满足条件的有理数列呢?"我还不知道,可能回答是否定的.

学生:既然对任意的无理数 α,$x_n = n\alpha - [n\alpha]$都满足试题 1 的要求,那么对于一个特殊的无理数 e(自然对数的底),$x_n = n\mathrm{e} - [n\mathrm{e}]$当然也可以,但是 $x_n = n!\mathrm{e} - [n!\mathrm{e}]$ 也可以吗?

老师:回答是否定的,因为此时 $x_n = n!\mathrm{e} - [n!\mathrm{e}]$已经不具有往返性了,它以 0 作为它的惟一聚点.

事实上,由泰勒(Taylor B. 1685—1731) 定理知

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta_n}}{(n+1)!} \qquad 0 < \theta_n < 1$$

于是
$$n!e = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 + \frac{e^{\theta_n}}{n+1}$$

当 $n \geq 2$ 时，有
$$\frac{e^{\theta_n}}{n+1} < \frac{1}{n+1} < 1$$

所以
$$n!e - [n!e] < \frac{e^{\theta_n}}{n+1} < \frac{e}{n+1}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}(n!e - [n!e]) = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1} = 0$$

与此类似利特伍德（Littlewood. J. E. 1885—1977）曾提出猜想：$x_n = e^n - [e^n]$ 是否以 0 为惟一聚点，这个问题目前还没有解决.

另一个未解决的问题涉及 $x_n = \alpha\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left[\alpha\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$，在区间 $(0,1)$ 上的往返性. 1968 年马赫（Mahler）曾问：是否存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得 $0 \leqslant \alpha\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left[\alpha\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] < \frac{1}{2}$ 对所有 n 成立？对这个问题人们倾向于否定，马赫自己证明了在每对相邻整数中至多存在一个.

学生：老师，能不能再介绍点更初等的等分布问题给我？

老师：这方面的趣味问题很多，例如波兰数学家斯坦因豪斯（Steinhaus H. D. 1881—1971）曾提出这样的问题：

试构造 n 个这样的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 x_1 这个数在 $[0,1]$ 区间内；使 x_1，x_2 这两个数中的一个数在二等分区间的第一个等分内，另一个数在该区间的第二个等分内；使 x_1, x_2, x_3 三个数中的某个数在 $[0,1]$ 区间三等分的第一个等分内，其余两个分别在第二、第三个两个等分内，…，依此类推，最后，使 x_1，$x_2, \cdots, x_n$ n 个数中的某个数在 $[0,1]$ 区间 n 等分的第一等分内，其余 $n-1$ 个分别在该区间的另外 $n-1$ 个等分内.

这个数列显然要具有往复性，但它要求更高，$\{\sqrt{2}n\}$ 显然满足不了（可见前 30 个 $\{n\sqrt{2}\}$ 的值），你能对 $n = 10$ 时构造出满足条件的数列吗？

学生：试试看吧！你看这两个数列是否可以：

0.95, 0.05, 0.34, 0.74, 0.58, 0.17, 0.45, 0.87, 0.26, 0.66;

0.06, 0.55, 0.77, 0.39, 0.96, 0.28, 0.64, 0.13, 0.88, 0.48.

老师：这两个数列都可以，你能再构造一个 $n = 14$ 时满足条件的数列吗？

学生：这只需在第二个数列后面补充上 4 个数就可以得到：0.06, 0.55, 0.77, 0.39, 0.96, 0.28, 0.64, 0.13, 0.88, 0.48, 0.19, 0.71, 0.35, 0.82.

老师：这个数列很有趣，因为对它进行调整次序后仍然满足要求：0.19, 0.96, 0.55, 0.39, 0.77, 0.06, 0.64, 0.28, 0.88, 0.48, 0.13, 0.71, 0.35, 0.82.

学生：我有一个疑问，这种数列可以无限制地构造下去吗？

老师：不能，波兰数论专家 A. 辛采尔曾用初等方法证明了：$n = 75$ 时无解. 几年以后，另一位数论专家 M. 瓦尔木斯证明了满足要求的 n 的最大值为 $n = 17$.

学生：能介绍一下这两个证明吗？

老师：A. 辛采尔用反证法的证明十分简单而又巧妙，不妨介绍一下.

假设 $x_1, x_2, \cdots, x_{75}$ 各数能满足规定的条件，则有

$$\frac{7}{35} < x_i < \frac{8}{35} \qquad \frac{9}{35} < x_j < \frac{10}{35} \tag{1}$$

其中，$i, j \leqslant 35$. 由此可得

$$\frac{1}{x_j - x_i} + \frac{1}{x_i} < \frac{1}{\frac{9}{35} - \frac{8}{35}} + \frac{1}{\frac{7}{35}} = 40 \tag{2}$$

和

$$\frac{x_j - x_i}{x_i} + x_j < \frac{\frac{10}{36} - \frac{7}{35}}{\frac{7}{35}} + \frac{10}{35} = \frac{5}{7} \tag{2'}$$

设：$k = \left[35(x_j - x_i) + \frac{5}{7}\right]$，$l = -\left[-\frac{(k + 2/17)x_i}{x_j - x_i}\right]$，$m = -\left[-\frac{l}{x_i}\right]$，（$[\cdot]$ 为高斯符号）即

$$35(x_j - x_i) - \frac{2}{7} < k \leqslant 35(x_j - x_i) + \frac{5}{7} \tag{3}$$

$$\frac{(k + \frac{2}{7})x_i}{x_j - x_i} \leqslant l < \frac{(k + \frac{2}{7})x_i}{x_j - x_i} + 1 \tag{4}$$

$$\frac{1}{x_i} \leqslant m < \frac{1}{x_i} + 1 \tag{5}$$

由式(3) 和式(4) 得

$$35x_i < l < \frac{\{35(x_j + x_i) + 1\}x_i}{x_j - x_i} + 1 = 35x_i - \frac{x_i}{x_j - x_i} + 1$$

再由式(5) 和式(2') 得

$$35 < m < 35 + \frac{1}{x_j - x_i} + \frac{1}{x_i} + 1 < 76$$

或

$$36 \leqslant m \leqslant 75 \tag{6}$$

由不等式(5) 还可推出 $(m - 1)x_i < l \leqslant mx_i$，由此

$$[(m - 1)x_i] < [mx_i] \tag{7}$$

从另一方面，由式(5)，(4) 和(1) 可知

$$(m - 1)x_j \geqslant (\frac{l}{x_i} - 1)x_j = l\frac{x_j}{x_i} - x_j = l + l\frac{x_j - x_i}{x_i} - x_j \geqslant$$

$$l + \frac{(k+\frac{2}{7})x_i}{x_j - x_i}\cdot\frac{x_j - x_i}{x_i} - x_j = 1 + k + \frac{2}{7} - x_j > l + k$$

同理,由式(2)得

$$mx_j < (\frac{l}{x_j} + 1)x_j = l\frac{x_j}{x_i} + x_j = l + \frac{x_j - x_i}{x_i} + x_j <$$

$$l + [\frac{(k+\frac{7}{2})x_i}{x_j - x_i} + 1]\frac{x_j - x_i}{x_i} + x_i =$$

$$l + k + \frac{2}{7} + \frac{x_j - x_i}{x_i} + x_j < l + k$$

综合以上几个不等式可得

$$l + k < (m-1)x_j < mx_j < l + k + 1$$

由此
$$[(m-1)x_j] = [mx_i] \tag{8}$$

由式(7)和(8)得

$$N_{m-1} = [(m-1)x_j] - [(m-1)x_i] > [mx_j] - [mx_i] = N_m$$

由题设的条件以及不等式(6)可知,只要简单地调换一下 $0,1,\cdots,(m-2)$ 这$(m-1)$个数的排列次序即可得出$[(m-1)x_1]$, $[(m-1)x_2]$,…, $[(m-1)x_{n-1}]$这列数.同理$[mx_1]$,$[mx_2]$,…,$[mx_n]$这一列数也可由调换0,1,…,$(m-1)$这列数的位置而得到.

因 $i,j \leqslant 35 \leqslant m+1$,所以 N_{m-1} 是 $t \leqslant m$ 时该不等式的解的数目,因此 $N_{m-7} \leqslant N_m$,这与不等式(9)矛盾,这表明 $n = 75$ 时无解.

学生:在我前面给出的两个数列时,苦于没有可供遵循的一般性构造方法,明显有"硬凑"的痕迹,那么是否存在一个有规律性的方法呢?

老师:我们想或随意取一个无理数 α,作 $x_n = n\alpha - [n\alpha]$,看看是否可行,如取 $\alpha = \sqrt{2}$,则由前面的计算知,对 $n = 10$ 时是不满足要求的,于是我们想到具有"优良品质"的无理数 ω,即黄金分割数 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$,对前10个 $x_n = n\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \left[n\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ 计算得

n	x_n	n	x_n
1	0.6180	6	0.7082
2	0.2361	7	0.3262
3	0.8541	8	0.9443
4	0.4721	9	0.5623
5	0.0902	10	0.1803

我们列下表检验一下：

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.6180	2	2	3	4	4	5	5	6	7
0.2361	1	1	1	2	2	2	2	2	3
0.8541		3	4	5	6	7	7	8	9
0.4721			2	3	3	4	4	4	5
0.0902				1	1	1	1	1	1
0.7082					5	6	7	7	8
0.3262						3	3	3	4
0.9443							8	9	10
0.5623								5	6
0.1803									2

表内的数字表示这列数在该区间各种等分中的分布. 表中的数据正确与否很容易校对，因为只有在栏内数字的数目等于该栏上方标注的数字，而且同一栏内的数字不同时，才符合条件.

计算这种令人惊讶的等分布性，一直到 52 等分也只有三个例外，并且再稍加观察我们还会发现，x_n 的小数点后第二、三、四位也呈现出惊人的规律性，小数点后第二位遍历了 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 10 个数，小数点后第三位为 8,6,4,2,0,8,6,4,2,0，第四位为 0,1,1,1,2,2,2,3,3,3.

学生：这些是巧和还是有某种规律性？这些规律都被证明了吗？

老师：这些都没有被证明，并且斯坦因豪斯还发现了这样一个有趣的性质：

考虑数偶$(n, nz-[nz])$，这里 $z=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，然后将这些数偶按第二个分量 $nz-[nz]$ 从小到大排列：$(n_1, n_1z-[n_1z])$，$(n_2, n_2z-[n_2z])$，$\cdots$，$(n_m, n_mz-[n_mz])$，即使$\{n_jz-[n_jz]\}$形成一个增列，则此时任何相应的相邻两第一分量之差，即 n_j-n_{j+1} 至多只取三个值.

由前面知，当 $m=10$ 时：$n_1=5, n_2=10, n_3=2, n_4=7, n_5=4, n_6=9, n_7=1, n_8=6, n_9=3, n_{10}=8$，则 n_j-n_{j+1} 形成的数列为：5，-8，5，-3，5，-8，5，-3，5，并且在 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 中去掉所有比任意指定的某个数大的数，或者，去掉所有比任意指定的某个数小的数，或者，去掉任意两个数之间的数时，上述性质仍然保留.

比如在 5,10,2,7,4,9,1,6,3,8 中去掉 5 和 8 之间的数 6,7，余下的数为：5，10,2,4,9,1,3,8，则 n_j-n_{j+1} 为：5，-8，2，5，-8，2，5.

学生：今天，从这道 IMO 试题中我学到了很多知识，改天我还想就试题 1 的

解答中的一个不等式：如果 $p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}, p < (4-\sqrt{2})q$，则 $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{4q^2}$ 请教您.

老师：这也是丢番图逼近论中的一个重要结论，咱们下次再谈，再见！

参考文献

[1] 湘普.第32届IMO试题解答《数学竞赛》11期[M].长沙：湖南教育出版社.

[2] 潘承彪.乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋[M].北京：北京大学出版社：286.

[3] 单墫.32届IMO试题的背景[J].数理天地，1992，5.

[4] 华罗庚.数论导引[M].北京：科学出版社，1957：293-300.

[5] 华罗庚，王元.数论在近似分析中的应用[M].北京：科学出版社，1978：48-51.

[6] 华罗庚.优选学[M].北京：科学出版社，1981：152.

[7] 华罗庚，王元.有限与无穷，离散与连续[J].科学通报，1963(11).

[8] [波]史坦因豪斯.数学万花镜[M].上海：上海教育出版社，1981：32.

[9] [波]史坦因豪斯.一百个数学问题[M].上海：上海教育出版社，1980.

[10] [波]史坦因豪斯.又一百个数学问题[M].上海：上海教育出版社，1980.

[11] R.P布恩.数论入门[M].北京：高等教育出版社，1990：282-302.

[12] 朱尧辰，王连祥.丢番图逼近论[M].北京：科学出版社，1997：132-134.

[13] 潘承洞，潘承彪.解析数论基础[M].北京：科学出版社，1991：320-335.

[14] 孙琦，万大庆.置换多项式及其应用[M].沈阳：辽宁教育出版社，1987：41-46.

[15] 曹珍富.数论中的问题与结果[M].哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1996：207.

[16] 日本数学会.数学百科全书[M].北京：科学出版社，1984：351.

[17] Weyl Nachr H. Acad Wiss Goettingen [J]. Math Ann，1914，77：313-315.

[18] Klambaner C. PROBIEMS AND PROPOSITIC In ANALYSIS[M]. New york：MARCEL DEKKER INC. 1979.

[19] Narkiewicz W. Un. form Disterbution of Sequences of Integers in Residue Classes Lecture[J]. Notes in Math Springer-Verlag，1984，1087.

[20] Mahler K. An unsolved problem on the powers of 3/2.J.Austral[J]. Math Soc 8，1968：313-312.

关于 Thue-Siegel-Roth 定理

刘培杰

§1 引子

学生：老师，上次我们讨论了关于一道第二十九届 IMO 试题的解法中点列 $\{x_n\}$ 在单位区间的分布问题. 最近我又看到了一个解法，它是北京大学潘承彪教授给出的，开始时他利用了一个结论：

对任给的实二次无理数 α（即实数 α 不是有理数，且是某个二次整系数多项式的根），一定存在一个正常数 c（和 α 可以有关），使得对任意整数 $p\neq 0$ 及 q，必有

$$\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|\geqslant\frac{c}{p^2}\tag{1}$$

然后再取 $x_i=c^{-1}(\alpha\cdot i-[\alpha\cdot i])\quad i=0,1,2,\cdots$

显然有 $0\leqslant x_i<c^{-1}$，所以 $\{x_i\}$ 是有界数列，若式(1) 成立，则有

$$|x_i-x_j|=c^{-1}|\alpha(i-j)-([\alpha\cdot i]-[\alpha\cdot j])|\geqslant|i-j|^{-1}\qquad i\neq j$$

最后证明，当 $\alpha=\sqrt{2}$，$c=(2+\sqrt{2})^{-1}$ 时，对任意整数 $p\neq 0$ 及 q，(1) 式成立. 这样 $\{x_i\}$ 就被具体化为 $x_i=(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}\cdot i-[\sqrt{2}\cdot i])$，$i=0,1,2$.

我的问题是：式(1) 是一个著名的定理吗？否则为什么首先会想到它.

老师：你的猜测是对的，它可以视为是柳维尔①定理的一个推论. 即当 α 的次数 $d=2$ 时，存在常数 $c=c(\alpha)>0$，使得对任何有理数 $\frac{p}{q}$ 有

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>cq^{-2}\tag{2}$$

学生：对于 $\sqrt[3]{2}$ 有没有类似的结论？

---

① 柳维尔(1809—1882，Liouville，Joseph) 法国数学家.

老师：对于次数大于等于 3 的代数数（满足有理系数方程的根）并不满足(2)，甚至没发现一个，因此朗(S. Lang)①在 1965 年猜测：对于次数不低于 3 的代数数 α，不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\lg q)^k}$$

当 $k>1$ 或 $k>k_0(\alpha)$ 时，只有有限多个解 $\frac{p}{q}$，但这个猜想目前还没有被证明。

学生：类似的问题在竞赛中曾多次出现，但有时并不以式(1)、(2) 的形式直接出现，如第九届普特南数学竞赛（1949 年 3 月 26 日举行）的下午试题 B－1.

试题 1　开区间(0,1)的每一个有理数 $\frac{p}{q}$（p,q 是互素的正整数）由长度为 $\frac{1}{2q^2}$ 中心中 $\frac{p}{q}$ 的区间所覆盖，证明：$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 不被上述的闭区间中的任何一个所覆盖.

老师：这个问题可改述为如下丢番图逼近的形式，若 p 及 q 为整数，则

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{4q^2}\tag{3}$$

是不能成立的.

你能证明这个转换后的命题吗？

学生：这并不难，只要分两种情况就可以：

i) 设 p,q 是整数，$0<p<q$，则

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{p}{q}<2$$

所以，若(3) 式成立，则有

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{p^2}{q^2}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{p}{q}\right|\cdot\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2}\Rightarrow|q^2-2p^2|<1$$

注意到 q^2-2p^2 是整数，所以 $q^2-2p^2=0\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ 矛盾.

ii) 对于整数 $p\geqslant q>0$ 时，$\left|\frac{1}{2}-\frac{p^2}{q^2}\right|<\frac{1}{2q^2}$ 显然不成立.

综合 i)、ii) 知结论正确.

---

① 朗(1927—Lang Serge)，美国数学家，1927 年 5 月 19 日生于巴黎，现任哥伦比亚大学教授，他是为数不多的布尔巴基学派的非法国成员之一，数论方面著作有《丢番图逼近论导引》、《代数数论》(1976) 影响很大.

§2　罗斯定理与菲尔兹奖

学生：老师，据您以前的观点，一道好的竞赛题一般都具有深刻的背景，对现代数学的发展有着某种微型展示作用，对此试题来说这种观点是否也成立呢？

老师：当然，从这一问题可以引导到一项获得菲尔兹（Fields）奖的重要工作．英籍德国数学家克劳斯·费里德里·罗斯（Klaus Friedrich Roth 1925—）于1958年获菲尔兹奖的工作之一，即所谓瑟厄－西格尔－罗斯（Thue-Siegel-Roth）定理．

学生：您能不能介绍得通俗一点．

老师：可以．我们在初中时就知道，如果用一个有理数$\frac{p}{q}$去逼近一个无理数α，如果不加任何限制，那么这种逼近的精确度$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$可以无限地好（即$\varepsilon$可以无限地小，但$\varepsilon>0$），如果将$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\varepsilon$中的$\varepsilon$与$q$联系起来，则问题就难得多，并且有些具有重大意义的问题出现：如若要求能有无穷多个有理数$\frac{p}{q}$满足$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{\mu}}$（其中$\mu$是常数），那么这个$\mu$应该满足什么条件？

我们用抽屉原理可证明：当$\mu=2$时确有无数多个$\frac{p}{q}$可满足$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2}}$．

当μ再大时，情况会怎样呢？从趋势看，由于μ越大，导致$\frac{1}{x^{\mu}}$越小．因此能有无限多个有理数$\frac{p}{q}$满足$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{x^{\mu}}$的可能性就越小．所以人们自然会猜想：$\mu$不应该无限大，应该有一个上界．于是人们把能有无数个$\frac{p}{q}$满足$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{x^{\mu}}$的那些$\mu$的上界记作$\mu(\theta)$，于是产生了一个重大问题：$\mu(\theta)$是什么？这个问题很复杂，应当区分不同类型的无理数来研究．人们发现，一类无理数即代数数（有理系多项式方程之根），恰好具有最佳逼近$\mu(\theta)=2$，但这一结果的得到花费了人类足足一个世纪的时间．

1）1849年法国数学家柳维尔证明了$\mu(\theta)\leqslant d$（其中d为α的次数）．

2)1909 年，挪威数学家瑟厄(Thue) 证明了 $\mu(\theta) > \frac{d}{2} + 1$.

3)1921 年，数学家西格尔(L.Siegel) 证明了 $\mu(\theta) > 2\sqrt{d}$.(这一定理使西格尔在数学界开始崭露头角.直到 1978 年他以 82 岁高龄荣获沃尔夫奖)

4)1947 年迪桑(F.J.Dyson)，次年苏联的 A.O.Гелъфонд 各自独立的证明了 $\mu(\theta) > \sqrt{2}d$.

5)1955 年，罗斯在剑桥学派数论大师达文波特主编的《数学》第二卷的头版上发表了一篇二十页的论文《对代数数的有理逼近》(Rati onal approximations to algebraic numbers).具体地说罗斯证明了：如果 α 是次数 $d \geqslant \alpha$ 的实代数数，则对任何 $\epsilon > 0$，不等式

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

只有有限多个解.

学生：这个定理是否像其他数论定理一样是“孤立”的？

老师：这个定理与其他定理有着许多联系，可以说是即重要又“有用”.因为它即可以改进著名的华林问题的结论，又可以证明一些不定方程的解数有限.如我国著名数论专家柯召①就曾利用罗斯定理证明了一个著名结果：设 p、q 是不同的奇素数，在 $q > 2(p-1)$ 或 $p > 2(q-1)$ 时，不定方程 $x^p - y^q = 1$ 只有有限组整数解 (x, y).

学生：这么有用的定理是不是会有许多推广？

老师：是的，数学家就愿锦上添花.有很多数学家们将罗斯定理作出了各种各样的推广，其中最重要的一项是由施米特(W.M.Schmidt) 作出的.

为了了解施米特的工作，我们介绍一个记号：$\|\theta\|$.

对任意实数 θ，记 $\|\theta\| = \min\limits_{z\in\mathbf{Z}} |\theta - z|$ 称为 θ 的差，即 θ 到距它最近的整数的距离.一般我们常用 $\|q\theta\|$ 来代替 $|\theta - \frac{p}{q}|$ 进行研究.

1970 年施米特得到：

定理 1 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是实代数数，$1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \theta$ 线性无关，则对任何 $\epsilon > 0$，不等式

$$\|q\alpha_1\| \cdots \|q\alpha_n\| q^{1+\epsilon} < 1$$

只有有限多个整数解 $q > 0$.

定理 2 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 如定理 1 所述，则对任何 $\epsilon > 0$，不等式

$$\|q_1\alpha_1 + \cdots + q_n\alpha_n\| \, |q_1 + \cdots + q_n|^{1+\epsilon} < 1$$

---

① 柯召，中国著名数学家，1937 年获英国曼彻斯特大学博士学位，四川大学前任校长.

只有有限多组解.

其实这两个定理是等价的,并且当 $n=1$ 时都成为罗斯定理.

学生:可不可以这样说,历史上著名的数论大家多多少少都有一些此方面的工作.

老师:可以这样说,因为丢番图逼近论毕竟是数论的一个重要分支.

比如俄国著名数学家切比雪夫在 1866 年的论文"一个算术问题"中证明了:存在无穷多对整数 x,y,满足不等式

$$|x-ay-b|<\frac{1}{2|y|}$$

法国著名数学家 Hermite Charles(1822-12-29—1901-1-14)改进了切比雪夫的上述结论:得到

$$|x-ay-b|\leq\sqrt{\frac{2}{27}}\cdot\frac{1}{|y|}$$

德国数学家闵可夫斯基在他的《丢番图逼近》(Diophantische Approximationen, Leipzig,1907)一书中进一步证明了存在无穷多对整数 x,y,满足不等式

$$|(\alpha x+\beta y-\xi_0)(\gamma x-\delta y-\eta_0)|<\frac{1}{4}$$

此外 ξ_0,η_0 为任意给定的数值,$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实数.

§3 几个重要无理数的逼近

学生:对于用有理数逼近无理数,我们常见 $\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$ 等,对一些重要的无理数,结果怎样呢?如 π.

老师:π 作为单位圆的周长是一个常数,人们大约花了二千五百年研究它的性质,但令人吃惊的是我们还是了解得如此之少.

我们知道的重要事实有:

1771 年,拉姆贝特(Lambert)证明了 π 是无理数.

1882 年,林德曼(Lindemann)证明了 π 是超越数(不是任何有理系数多项式方程之根)

1953 年,马赫证明了 π 不是柳维尔数.所谓一个无理数 β 是柳维尔数,如果对于任一个 $n\in\mathbf{N}$,都存在整数 p 和 q,使得

$$0<\left|\beta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^n}$$

柳维尔指出:这些 β 都是超越数.

关于 π 被有理数的逼近情况有如下结果:

i)K.Mahler(1934,1935):对于任何整数 $q \geqslant 0$

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-42}$$

ii)K.Mahler(1953):对于 $|q| \geqslant q_0$

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-30}$$

iii)Wirsing:对于任何整数 $q \geqslant 2$

$$\left|\pi - \frac{r}{q}\right| > |q|^{-21}$$

iv)M.Mignotte(1976):对于 $|q| \geqslant q_1$

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-20}$$

v)D.V.Chudnorshy 和 G.V.Chudnorsky(1984):当 p,q 为整数,q 充分大时

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{14.65}}$$

当然还不是最好的可能,合理是 14.65 应被 $\alpha + \epsilon$ 所代替,其中 ϵ 为大于 0 的任意数,几乎所有超越数都满足这样的不等式.

学生:老师,关于另一个重要常数 e 有什么结果?

老师:与 e^x 有关的一些数的有理逼近的结果有:

i)E.Borel(1899)

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-c\lg\lg|q|} \quad c > 0$$

ii)J.Popken(1928)

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-2} \cdot |q|^{-\frac{\lambda}{\lg\lg|q|}} \quad \lambda > 0$$

iii)K.Maher(1932):对于有理数 $r \neq 0$ 和 $c = c(r) > 0$

$$\left|e^r - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-2} \cdot |q|^{-\frac{c}{\lg\lg|q|}}$$

iv)C.V.Chudnovsky(1979):对于整数 p、q,我们有

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-2}\frac{\lg\lg|q|}{\lg|q|} \qquad |q| > q_0$$

$$\left|e^{\frac{1}{n}} - \frac{p}{q}\right| > c_1(n) \cdot |q|^{-2}\frac{\lg\lg|q|}{\lg|q|}$$

学生:有许多无理数都是 $\lg\alpha$ 型,对于这类数即 $\lg\alpha$(α 是代数数且 $\alpha \neq 0$),有什么逼近结果?

老师：有以下几个结果：

i)J. Popken 证明了：对于代数数 $\alpha \neq 0,1$ 以及 $c_2 = c_2(\alpha) > 0$

$$\left|\lg\alpha - \frac{p}{q}\right| > e^{-c_2|q|}$$

ii)K. Mahler(1934) 证明了

$$\left|\lg\alpha - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-c_3(\alpha)} \qquad \alpha \neq 0,1$$

其中 $c_3(\alpha)$ 不仅依赖于 α 的次数，而且还依赖于高度，例如

$$\left|\lg r - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-c_4\lg H(\alpha)}$$

$r \in \mathbf{Q}, r \neq 1$ 且 $c_4 \leqslant 70$.

iii)Baker 对于 $c_5 > 0$

$$\left|\lg\alpha - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-c_5 d^2 \lg H(\alpha)}$$

其中 $d = d(\alpha)$ 是 α 的次数，$\lg H(\alpha)$ 是 α 的高度.

另外，人们还研究了所谓的二重对数 $L_2(x)$ 也得到类似的结果：

如果 n 是整数，$n \geqslant n_0(\epsilon), \epsilon > 0$，则

$$\left|L_2\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-1+\epsilon}$$

对于任意 k 重对数，也有同样类型的结果：

如果 $\epsilon > 0, n$ 是一个整数，$n \geqslant c(k,\epsilon), k \geqslant 1$，则

$$\left|L_k\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-(k+1)(1-\epsilon)}$$

§4 推广到复数域后

学生：法国著名数学家哈达玛曾说过"两个实域真理之间的最短路径是通过复域". 但不等式这类问题却不是都能过渡到复域，因为虚数无法比较大小，我们所讨论的这类逼近问题也可推广到复数域中吗？

老师：可以，但那时已不再是绝对值而是复数的模，其实从更高的观点看，它们都是统一的.

学生：怎样定义复有理数和复无理数呢？

老师：这要从复整数开始，高斯曾最先研究过复整数. 记 $\mathbf{Z}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$，通常把数 $a + bi$ 叫做复整数，一个复数如果能表示成两个复整数的商，就称此复数为复有理数. 全体复有理数可记为

$$\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\left\{\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}, a+b\mathrm{i}\in\mathbf{Z}(\mathrm{i}), c+d\mathrm{i}\in\mathbf{Z}[\mathrm{i}], c+d\mathrm{i}\neq 0\right\}$$

不是复有理数的复数，叫做复无理数.

将 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ 也可表示成 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，比较容易证明的结论有：

定理 3 任给一个复无理数，都至少存在一个复有理数 $\frac{u}{v}$，$(u,v)=1$，使得下式成立

$$\left|\alpha-\frac{u}{v}\right|<\frac{\alpha}{|v|^2}$$

学生：怎样证明呢？

老师：这要用到抽屉原则，考虑由 $(n+1)^2$ 个复整数组成的集合

$$I=\{v=a+b\mathrm{i}\mid 0\leqslant a\leqslant n, 0\leqslant b\leqslant n\}$$

由于 $\alpha\notin\mathbf{Q}(\mathrm{i})$，故不存在 $\beta_1,\beta_2\in I_1$，$\beta_1=\beta_2$.

我们将复平面上的边长为 1 的正方形（其四个顶点在 $0,1,1+\mathrm{i},\mathrm{i}$ 处）划分为边长为 $\frac{1}{n}$ 的 n^2 个子正方形，那么 I_1 中 $(n+1)^2$ 个复数所表示的点均包含在上述边长为 1 的正方形中，由抽屉原则，至少存在 $\gamma_1,\gamma_2\in I$，在某一个小正方形中，且不能同时在对角顶点上，即有 $\alpha v_1-u_1,\alpha v_2-u_2\in I_1$，满足

$$|(\alpha v_1-u_1)-(\alpha v_2-u_2)|<\frac{\sqrt{2}}{n} \tag{4}$$

设 $v_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$v_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，$v_1\neq v_2$，故

$$|v_1-v_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}\leqslant n\sqrt{2}$$

由此，由式(4) 得

$$\left|\alpha-\frac{u_1-u_2}{v_1-v_2}\right|<\frac{\sqrt{2}}{n|v_1-v_2|}\leqslant\frac{2}{|v_1-v_2|^2} \tag{5}$$

设 $v=v_1-v_2$，$u=u_1-u_2$，代入式(5) 中得定理正确.

其实，再稍加推导，便可证出实际这样的复有理数有无限多个.

福德(Ford) 于 1925 年加强了上述结果，得到如下的：

定理 4 任给一个复无理数 α，存在无限多个复有理数 $\frac{u}{v}$，$(u,v)=1$，使得下式成立

$$\left|\alpha-\frac{u}{v}\right|<\frac{1}{\sqrt{3}|v|^2}$$

这样这里的 $\sqrt{3}$ 已不能改进了.

另外，对于复整数，还可将上述定理 4 推广到两个变数的情形，有如下结论：

对话

任给 $\varepsilon > 0$，有复数 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$，且 $\Delta = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$，则存在无限多个复整数 h,k 满足

$$|\alpha_1 k + \beta_1 h||\alpha_2 k + \beta_2 h| < \frac{\Delta}{\sqrt{3}} + \varepsilon$$

§5 分形几何学的逼近问题

学生：有人说数论是由一门零散的结果组成的分支，它与其他数学分支的联系不大，是这样吗？

老师：完全不是.数论特别是代数数论早已进入现代数学的主流，与许多分支的概念与方法产生了千丝万缕的联系.1995 年英国数学家怀尔斯证明了困扰国际数学界长达 350 年的费马大定理，应用了几乎所有的现代数论主流方法和结果，不仅如此，现在不同分支产生交叉和渗透的速度越来越快，许多新产生的分支很快就与最古老的分支数论建立了联系，如近年来由于分形几何学的兴起，豪斯道夫维数（Hausdorff dimension 简记为 dim）成为热门概念，我们刚才谈论的逼近问题，就已经与它有了联系.

学生：这两个分支相去甚远，怎样联系呢？

老师：其实也挺自然，从形式上说，达到某一特定精度的有理数逼近的数集的豪斯道夫维数不会太大.1931 年捷克数学家卡尔洛大学教授加尼克（Jarnik Woitech 1897—1970）证明了如下定理：

定理 5　取 $\alpha > 0$ 和一个正数序列 $n_1,n_2,\cdots$ 使得

$$n_{j+1} \geqslant n_j^j \tag{6}$$

这种数列称为急速递增序列.

i) 设 F 是满足

$$\| n_j x \| \leqslant n_j^{-\alpha} \qquad j = 1,2,\cdots \tag{7}$$

的实数 x 的集合，则 $\dim F = \frac{1}{1+\alpha}$.

ii) 设 E 是满足

$$\| n_j x \|, \| n_j y \| \leqslant n_j^{-\alpha} \qquad j = 1,2,\cdots$$

的点 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ 的集合，则 $\dim E = \frac{2}{1+\alpha}$.

这个定理的证明有相当的技巧，由 Jarnik(1931)，Besicoritch(1934)，Eggleston(1952)，Kaufman(1971，1981) 给出.

§6　与逼近有关的竞赛问题

学生：老师，我们刚才的讨论对我来说确实很有收获，但我们目前仍是应试教育占上风，所以解题与考试是学生最关心的问题，能否再介绍几个与逼近有关的竞赛问题。

老师：可以，首先介绍第一届（1987 年）美国数学奥林匹克第 4 题：

令 R 为非负有理数，试确定一组整数 a,b,c,d,e,f，使得对于 R 的每种选择，都有

$$\left|\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|<\left|R-\sqrt[3]{2}\right| \tag{8}$$

你能证明吗？

学生：试试吧！

令 R 通过一列非负有理数（例如$\sqrt[3]{2}$的不足近似值）趋近于$\sqrt[3]{2}$时，(8) 右边趋向于零，故当 R 代入$\sqrt[3]{2}$时，右边应为 0，即应有

$$a\cdot 2^{\frac{2}{3}}+b\cdot 2^{\frac{1}{3}}+c=2d+e\cdot 2^{\frac{2}{3}}+f\cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

取 $a=e,b=f,c=2d$，则

$$\left|\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|=\left|\frac{aR^2+bR+2d}{dR^2+aR+b}-\sqrt[3]{2}\right|=$$

$$\left|\frac{aR(R-\sqrt[3]{2})+b(R-\sqrt[3]{2})-d\sqrt[3]{2}(R^2-\sqrt[3]{2})^2}{dR^2+aR+b}\right|=$$

$$\left|R-\sqrt[3]{2}\right|\cdot\left|\frac{aR^2+b-d\sqrt[3]{2}(R+\sqrt[3]{2})}{dR^2+aR+b}\right|$$

在 $a>d\sqrt[3]{2},b>d\sqrt[3]{4}$ 时

$$0<\frac{aR+b-d\sqrt[3]{2}(R+\sqrt[3]{2})}{dR^2+aR+b}<\frac{aR+b}{aR+b}=1$$

所以取 $d=1,a=b=c=e=f=2$，则(8) 式成立。

老师：此题告诉我们：用"结构复杂"的有理数去逼近无理数要比"结构简单"的效果更好，再举一个例子，是罗马尼亚 1978 年数学奥林匹克试题。

试题 2　证明：如果 $m,n\in\mathbf{N}$，满足

$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$$

则

$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$$

对话

你试着证一下!

学生:只需证明,由 $n\sqrt{7}-m>0$ 可以推出 $n\sqrt{7}-m>\dfrac{1}{m}$,其中 $m,n\in\mathbf{N}$.

如果 $n\sqrt{7}-m=1$,则 $\sqrt{7}=\dfrac{1+m}{n}\in\mathbf{Q}$,矛盾.可设 $0<n\sqrt{7}-m<1$,注意到 $m^2\not\equiv 6,5\pmod 7$.事实上

$$(7k^2)\not\equiv 6,5\pmod 7$$
$$(7k\pm 1)^2\equiv 0\pmod 7$$
$$(7k\pm 1)^2\equiv 1\pmod 7$$
$$(7k\pm 2)^2\equiv 4\pmod 7$$
$$(7k\pm 3)^2\equiv 2\pmod 7$$

老师:在美国和加拿大流行一本为准备普特南数学竞赛而出版的《红皮书》(《THE RED BOOK》,1988)中有这样一题:

试题 3 设 ε 为一实数,$0<\varepsilon<1$,求证:存在无限多个整数 n,满足

$$\cos n\geqslant 1-\varepsilon \tag{9}$$

学生:这个问题似乎与逼近论中的胡尔维兹定理有关,由于 π 是无理数,故由胡氏定理知,存在无限多个有理数 $\dfrac{n}{k}$,$k>0$,$(n,k)=1$,使得

$$\left|2\pi-\frac{n}{k}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}k^2}$$

可得

$$|2k\pi-n|<\frac{1}{\sqrt{5}k} \tag{10}$$

令 $0<\varepsilon<1$,考虑那些满足式(10)且 $k>\dfrac{1}{\sqrt{5}\varepsilon}$ 有整数 n 和 k,显然有限多个这样的正整数 k,且对每一个如此的 k,有一个整数 n 满足

$$|2\pi k-n|<\varepsilon$$

对这样的整数对 (n,k),有

$$1-\cos n\leqslant|1-\cos n|=2\left|\sin\left(k\pi+\frac{n}{2}\right)\right|\left|\sin\left(k\pi-\frac{n}{2}\right)\right|=$$
$$2\left|\sin\left(k\pi-\frac{n}{2}\right)\right|\leqslant 2\left|k\pi-\frac{n}{2}\right|=|2k\pi-n|<\varepsilon$$

式(9)对无限多整数 n 成立.

老师:其实对于某些竞赛题目,逼近只是其中的一个步骤,但往往是关键的步骤,如下的普特南竞赛培训题:

试题 4 令 $p\equiv 1\pmod 4$ 为一素数,则存在惟一整数 $=\omega(p)$ 使得 $w^2\equiv -1\pmod p$,$0<w<p/2$,求证:存在满足 $ad-bc=1$ 的整数 a,b,c,d,得

$$pz^2+2wz\bar{y}+\frac{(w^2+1)}{p}\bar{y}^2=(az-b\bar{y})^2+(cz+d\bar{y})^2$$

学生：我看不出要用到什么逼近的结果.

老师：解决这个问题要用到这样一个事实，如果 $r\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}$，则存在 $\frac{h}{k}$ 满足

$$\left|r-\frac{h}{k}\right|\leqslant\frac{1}{k(n+1)}\qquad 1\leqslant k\leqslant n,(h,k)=1\tag{11}$$

$r=-\frac{w(p)}{p},n=[\sqrt{p}]$，于是存在 $a,e\in\mathbf{Z}$，使得

$$\left|-\frac{w(p)}{p}-\frac{e}{a}\right|<\frac{1}{a\sqrt{p}}\qquad 1\leqslant a<\sqrt{p}\tag{12}$$

$c=w(p)a+pe$，由式(12)有 $|c|<\sqrt{p}$，从而 $0<a^2+c^2<2p$，然而 $c\equiv wa(\bmod p)$，故有 $a^2+c^2\equiv a^2(1+w^2)\equiv 0(\bmod p)$，这表明

$$p=a^2+c^2\tag{13}$$

因 p 是素数，由式(13)知 $(a,c)=1$，因此由斐蜀定理知可选取整数 s,t 使其满足

$$at-cs=1\tag{14}$$

且

$$\begin{aligned}(as+ct-w)(as+ct+w)=(aw+ct)^2-w^2=\\(a^2+c^2)(s^2+t^2)-(at-cs)^2-w^2=\\p(s^2+t^2)-(1+w^2)\equiv 0(\bmod p)\end{aligned}$$

有

$$as+ct\equiv fw(\bmod p)\qquad f=\pm 1\tag{15}$$

故存在 $g\in\mathbf{Z}$，使得

$$as+ct=fw+gp\tag{16}$$

令

$$b=s-ag\qquad d=t-cg\tag{17}$$

则由式(13)、(14)、(16)及(17)得

$$ab+cd=fw\qquad ad-bc=1\tag{18}$$

现在 $p(a^2+b^2)=(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2+(ad-bc)^2=w^2+1$，所以

$$b^2+d^2=\frac{w^2+1}{p}\tag{19}$$

再由式(13)、(18)及(19)，我们有

$$(az+b\bar{y})^2+(cz+d\bar{y})^2=pz^2+afwz\bar{y}+\frac{w^2+1}{p}\bar{y}^2\tag{20}$$

如果 $f=1$，则式(20)就是所要求证的恒等式；如果 $f=-1$，用 $-b,-c,-\bar{y}$ 分别代替 b,c,z 则也得所要求的结果.

试题5 设 f：设 $R\to R$ 是一实函数，它定义为：若 x 是无理数，则 $f(x)=0$；若 p,q 为整数，$q>0$，且 $\frac{p}{q}$ 不可约，则

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q^2}$$

证明：f 在每一个无理点 $x_0=\sqrt{k}$（k 为自然数）处有导数.

这是 1979 年罗马尼亚数学竞赛决赛试题.

证明　我们证明在无理点 $\sqrt{k}$ 处，$f(x)$ 以 0 为它的导数值.

显然，当 x 的值取无理数而趋近 $\sqrt{k}$ 时

$$\frac{f(x)-f(\sqrt{k})}{x-\sqrt{k}}=0$$

因此只要证明当 x 值取有理数 $\frac{p}{q}$ 而趋近于 $\sqrt{k}$ 时

$$\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)-f(\sqrt{k})}{\frac{p}{q}-\sqrt{k}}\to 0$$

即

$$\frac{1}{q^3\left(\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right)}\to 0 \tag{21}$$

易知，对每个 $q>0$，在 $\sqrt{k}$ 的邻域 $(0,\sqrt{k}+1)$ 中只有有限多个分母 $\leqslant q$ 的有理数 $\frac{p}{q}$，因此，在 $\sqrt{k}$ 的充分小的邻域中，一切有理数 $\frac{p}{q}$ 的分母均大于 q，换句话说，当 $\frac{p}{q}\to\sqrt{k}$ 时，$q\to+\infty$.

设 $F(x)=x^2$，由拉格朗日中值定理

$$\left|F\left(\frac{p}{q}\right)-F(\sqrt{k})\right|=|F'(\zeta)|\cdot\left|\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right|$$

即

$$\left|\frac{p^2}{q^2}-k\right|=2\xi\left|\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right| \tag{22}$$

其中 $\frac{p}{q}<\xi<\sqrt{k}$ 或 $\sqrt{k}<\xi<\frac{p}{q}$. 由于 $\frac{p}{q}\to\sqrt{k}$，故不妨设

$$0<\xi<\sqrt{k}+1 \tag{23}$$

由式(22)、(23)用逼近的方法有

$$q^3\left|\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right|=\frac{q^3\left|\frac{p^2}{q^2}-k\right|}{2\xi}>\frac{q\,|p^2-kq^2|}{2(\sqrt{k}+1)}\geqslant\frac{q}{2(\sqrt{k}+1)} \tag{24}$$

（因为 $\sqrt{k}$ 为无理数，所以 $p^2-kq^2\neq 0$，从而 $|p^2-kq^2|\geqslant 1$）. 由于 $q\to+\infty$，故由式(24)得知式(21)成立.

§7　几个未解决问题

学生：记得胡适先生曾对即将毕业的大学生寄语：应随身带几个未解决的问题供平时思考，能否介绍几个未解决的问题供以后思考？

老师：关于丢番图逼近有许多未解决的问题，下面介绍几个.

(1) 对每个无理数 α 及每个 $\varepsilon > 0$，是否都存在无穷多个素数 p, q，使得 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-2+\varepsilon}$？

(2) 设 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_n^{-2}(n \geqslant 1)$，记 $G(n) = 2n + \frac{1}{2}\lg n - a_n^2, \lim\limits_{n\to\infty} G(n) = c$.

猜想：i) c 是超越数；

ii) $\left|c - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{10n^2}$；

iii) 任给 $\varepsilon > 0$，存在无穷多对素数 p, q，使得 $\left|c - \frac{p}{q}\right| < q^{-2+\varepsilon}$.

(3) 1891 年胡尔维兹(A. Hurwitz)用连分数理论证明了：

对任一无理数 α，存在无限多个分数 $\frac{m}{n}$，使

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}n^2}$$

式中系数 $\sqrt{5}$ 是最佳的.

由这个不等式可以看出，任一无理数 α，都存在无限多个有理数 $\frac{m}{n}$ 作为它的近似值，并且可以达到 $\frac{1}{n^2}$ 的精确度！反之，若存在 $\delta < 0$ 及有理数列 $r_n = \frac{p_n}{q_n}$，使 $\left|\alpha - \frac{p^n}{q^n}\right| < q^{-1(1+\delta)}$，则 α 必为无理数. 1978 年，法国数学家阿贝瑞由此证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 为无理数，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(2k+1)}(k \geqslant 2)$ 是否为无理数仍未解决.

另外，还可以做一些平移工作，将一些有关实数的结果平移到复数上去，如联立逼近不等式：对于任意 n 个实数 $a_1, \cdots, a_n$，都存在不同时为零的整数 $k_1, \cdots, k_n$ 及自然数 m，使得

$$\left|a_j - \frac{k_j}{m}\right| \leqslant \frac{n}{n+1} \cdot m^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

平移到复数域中即为：

若 $\alpha_k=\beta_k+\mathrm{i}\gamma_k$ 是 n 个复数，则存在 $n+1$ 个复数 $z_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 和 w，使得

$$\left|\alpha_k-\frac{z_k}{w}\right|\leqslant\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{2n}}\cdot\frac{1}{|w|^{1+\frac{1}{n}}}$$

好，今天我们就谈到这里，祝你早日成才，为中国数学的发展做出贡献.

Some teachers demand that students solve mathematics problems only by the method taught in class. This process can thwart initiative, compound frustration, and promote avoidance.

——达雅妮

一道 USAMO 的积分证法

曲全美①

1983 年第 12 届美国数学奥林匹克(USAMO) 试题的第一题为:

在给定的圆周上随机地选择 A,B,C,D,E,F 6 点,这些点的选择是独立的,对于弧长而言是等可能的,求 ABC,DEF 这两个三角形不相交(即没有公共点)的概率.

使用初等方法,需要一点技巧但比较简洁.

设圆周上给定 6 个点,从这 6 点中取 3 个点作为 $\triangle ABC$ 的顶点,有 $C_6^3=20$ 种方法,其中 3 个点相邻的有 6 种(确定第 1 个顶点后,依顺时针次序另两个点也随之确定),因此所求概率为 $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

如果将此题视为一般的几何概率题目,那么就有一般的方法处理,不需要过多的技巧,仅仅需要一点积分的计算.

因为如果将此圆的直径视为 1,周长则为 π,注意到对称性,可设 A 为圆周上的定点,规定一个走向,计 $\overset{\frown}{AB}=x$,$\overset{\frown}{AC}=y$,则 B,C 落在此圆周上某两个已知点邻域内的概率为 $\frac{dx}{\pi}\cdot\frac{dy}{\pi}$,要想使 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 不相交,当且仅当 D,E,F 同时落在 A,B,C 两个相邻的某一段弧上.

所以,当 $y<x$ 时和 $y>x$ 时两三角形不相交的概率分别是

$$\frac{dx}{\pi}\cdot\frac{dy}{\pi}\left[\left(\frac{y}{\pi}\right)^3+\left(\frac{x-y}{\pi}\right)^3+\left(\frac{\pi-x}{\pi}\right)^3\right]$$

和

$$\frac{dx}{\pi}\cdot\frac{dy}{\pi}\left[\left(\frac{x}{\pi}\right)^3+\left(\frac{y-x}{\pi}\right)^3+\left(\frac{\pi-y}{\pi}\right)^3\right]$$

由于 B,C 的选择相对于弧长是等可能的,因而所求的概率为

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{x}[y^3+(x-y)^3+(\pi-x)^3]dy+\int_0^{\pi}[x^3+(y-x)^3+(\pi-y)^3dt]\right\}dx$$

① 曲全美(女),任职于哈尔滨市第五中学.

经简单计算得$\frac{3}{10}$.

所以有时一个题目在较高的一个层次上看可能是平凡的,它的解答具有固定的思路,剩下的仅是一些繁杂的计算,但如果限定方法从较低的层次去解,则会是一道充满技巧及趣味的竞赛题.

What, in fact, is mathematical discovery? It does not consist in making new combinations with mathematical entities that are already know. That can be done by anyone, and the combinations that could be so formed would be infinite in number, and the greater part of them would be absolutely devoid of interest. Discovery consists precisely in not constructing useless combinations, but in constructing those which are useful, which are an infinitely small minority. Discovery is discernment, selection.

Mathematical facts worthy of being studied are those which, by their analogy with other facts, are capable of leading us to the knowledge of a mathematical law, in the same way that experimental facts lead us to the knowledge of a physical law. They are those which reveal unsuspected relations between other facts, long since known, but wrongly believed to be unrelated to each other.

——庞加莱

Möbius 问题

刘培杰　　田廷彦①

§1　引言

一个给定的凸五边形 $ABCDE$（图 1）具有如下性质：5 个三角形 ABC，BCD，CDE，DEA，EAB 中的每一个面积都等于 1. 求证：每个具有上述性质的五边形都有相同的面积，计算这个面积，并且有无限多个不全等的具有上述性质的五边形.

这个问题是 1972 年美国数学竞赛题，我们给出两种证法.

证法 1　因为

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle EAB}=1$$

所以 $AB\parallel EC$，类似地有 $BD\parallel AE$，故 $ABPE$ 是平行四边形，其中 P 是 BD 和 CE 的交点，$S_{\triangle BPE}=S_{\triangle EAB}=1$.

令 $S_{\triangle BCP}=x$，那么 $S_{\triangle EPD}=x$，$S_{\triangle CDP}=1-x$. 因为

$$\frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle CDP}}=\frac{BP}{PD}=\frac{S_{\triangle BPE}}{S_{\triangle PDE}}$$

所以 $$\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}\qquad x^2+x-1=0\qquad x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

于是五边形 $ABCDE$ 的面积为

$$S_{\triangle CDE}+2S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BCP}=3+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

任意作一个 $\triangle BCP$，使得 $S_{\triangle BCP}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，延长 CP 到 E，BP 到 D，使得 $S_{\triangle BPE}=S_{\triangle BCD}=1$，于是

---

① 田廷彦，任职于上海科学技术出版社，《科学》编辑部.

$$\frac{CP}{PE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{DP}{PB}=\frac{DB-PB}{PB}=\frac{DB}{PB}-1=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

所以 $$\frac{CP}{PE}=\frac{DP}{PB}$$

从而 $BE\parallel CD$，$S_{\triangle CDE}=S_{\triangle BCD}=1$.

作 $EA\parallel BD$，$AB\parallel EC$，它们的交点为 A，那么 $S_{\triangle DEA}=S_{\triangle EAB}=S_{\triangle BPE}=1$，同理 $S_{\triangle ABC}=1$.

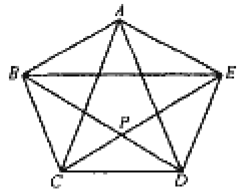


图 1

因为可作无数多个不全等的面积为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的 $\triangle BCP$，所以如上所得的无数多个不全等的五边形具有上述性质.

证法 2　以凸五边形 $ABCDE$ 的边 AB 为 x 轴，以 A 为原点建立直角坐标系，且设 $AB=a$，因 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}=1$，故 C，E 两点的纵坐标为 $\frac{2}{a}$，设 C，E 点的横坐标为 b，c，D 点的坐标为 (d,e). 那么这 5 个点的坐标就是

$$A(0,0),B(a,0),C\left(b,\frac{2}{a}\right),D(d,e),E\left(c,\frac{2}{a}\right)$$

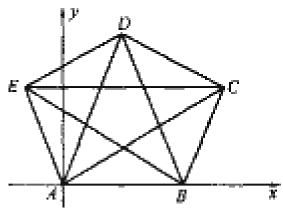


图 2

如图 2 所示

$$S_{ABCDE}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}=2+\frac{1}{2}ae$$

因为 $DE\parallel AC$，所以 $\frac{2}{a}:b=\left(e-\frac{2}{a}\right):(d-c)$，类似地，由 $EA\parallel BD$，$BC\parallel DA$ 可得

$$e:(d-a)=\frac{2}{a}:c\qquad e:d=\frac{2}{a}:(b-a)$$

将它们分别整理后得

$$aeb+2(c-d-b)=0\tag{1}$$

$$aec+2(a-d)=0\tag{2}$$

$$ae(a-b)+2d=0\tag{3}$$

式(1) + 式(3)，式(2) + 式(3) 分别可得

$$a^2e+2(c-b)=0 \tag{4}$$

$$ae+e(c-b)+2=0 \tag{5}$$

从式(4),式(5)中消去 $c-b$,得

$$a^2e^2-2ae-4=0$$

解得
$$ae=\sqrt{5}+1(\text{负值舍去})$$

所以
$$S_{ABCDE}=2+\frac{1}{2}ae=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

因此具有题述性质的凸五边形的面积都相同.

将上面的 a,b 设为任意给定的正实数,那么

$$e=\frac{\sqrt{5}+1}{a} \qquad d=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a) \qquad c=b-\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

$$A(0,0) \qquad B(a,0) \qquad C(b,\frac{2}{a})$$

$$D(\frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a),\frac{\sqrt{5}+1}{a}) \qquad E(b-\frac{\sqrt{5}+1}{2}a,\frac{2}{a}).$$

以上述5个点为顶点的五边形 $ABCDE$ 对应于不同的正实数 a 与 b,在直角坐标系里凸五边形 $ABCDE$ 具有无限多个且互不全等.因此我们只需证明以 A,B,C,D,E 为顶点的凸五边形具有题述性质.

显然
$$AB \parallel CE$$

$$(b-a):\frac{2}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a):\frac{\sqrt{5}+1}{a}$$

所以 $BC \parallel DA$,类似地可证 $CD \parallel EB$,$DE \parallel AC$,$EA \parallel BD$,且

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{a}=1$$

由上述所得

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}=S_{\triangle DEA}=S_{\triangle EAB}=1$$

所以具有题述性质的凸五边形 $ABCDE$ 有无限多个.

§2 Möbius 命题

上述题的一种特殊解法依赖于两个征解问题(1988年王振、陈计.1989上海刘启铭、浙江陈计).

已知平面凸五边形 $ABCDE$,求证

$$\max\{S_{\triangle EAB},S_{\triangle ABC},S_{\triangle BCD},S_{\triangle CDE},S_{\triangle DEA}\}\geqslant\frac{2}{5+\sqrt{5}}S_{ABCDE} \tag{6}$$

$$\min\{S_{\triangle EAB},S_{\triangle ABC},S_{\triangle BCD},S_{\triangle CDE},S_{\triangle DEA}\}\geqslant\frac{2}{5+\sqrt{5}}S_{ABCDE}\qquad(7)$$

上述试题是 1923 年 Shumacher 在《Astronomische Nachrichten》(no42. Norember,1823:61.)提出的一个 Möbius 命题:

设 $ABCDE$ 是平面上任意五点,若 $\triangle EAB,\triangle ABC,\triangle BCD,\triangle CDE,\triangle DEA$ 的面积分别为 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$,则五边形 $ABCDE$ 的面积确定.

1880 年 Gauss 给出一个证明(Gauss Carl Friedrich Gauss Werke Vol 4.2ter Abdruck, 1880:406-407.)

它推导出了一个五边形 A 所满足的方程

$$A^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)A+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\epsilon+\epsilon\alpha)=0\qquad(8)$$

利用它可以统一地证明式(6)、式(7).下面我们用向量的语言证明它.

Möbius 定理　在凸五边形 $ABCDE$ 中,$\triangle ABC,\triangle BCD,\triangle CDE,\triangle DEA$, $\triangle EAB$ 的面积分别等于 a,b,c,d,e,以 S 表示五边形的面积,试证

$$S^2-S(a+b+c+d+e)+(ab+bc+cd+de+ea)=0$$

证明　设 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$,那么

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{x}]=x_2[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2],[\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2]=x_1[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2],\text{因此}$$

$$\boldsymbol{x}=\frac{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2]}{[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]}\boldsymbol{e}_1+\frac{[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{x}]}{[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]}\boldsymbol{e}_2$$

因此

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2]\cdot[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{y}]+[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{x}]\cdot[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{y}]+[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1][\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=0\qquad(9)$$

对任意平面向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 成立.

设 $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{AC},\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AD},\boldsymbol{y}=\overrightarrow{AE}$,那么

$$S=a+\frac{1}{2}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2]+d=c+\frac{1}{2}[\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_2]+a=d+\frac{1}{2}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1]+b$$

即

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2]=2(S-a-d)$$
$$[\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_2]=2(S-c-a)$$
$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1]=2(S-d-b)$$

把这些量代入等式(9),就得

$$-2(S-a-d)\cdot 2e+2(S-c-a)\cdot 2(S-d-b)-2a\cdot 2d=0$$

即　$$S^2-S(a+b+c+d+e)+(ab+bc+cd+de+ea)=0$$

Möbius(August Ferdinand,1790-11-17—1868-9-26)是德国数学家、天文学家,三岁丧父后由叔父抚养成人,自幼偏爱数学.1809 年入莱比锡大学学习法律,后改为理科,专修数学、物理学和天文学;1913 年曾跟随 Gauss 学习天文和数学;1816 年成为副教授;1829 年成为教授;1829 年当选为柏林科学院通讯院

士;1848 年任莱比锡大学天文台台长. Möbius 在数学方面的贡献主要是在几何学和拓扑学领域,1858 年他发现了单侧曲面,其中著名的为 Möbius 带,1840 年他最先提出了四色猜想.

§3 一个加强命题

设 A,B,C,D,E 平面上任意 5 点,若记 $\triangle EAB$,$\triangle ABC$,$\triangle BCD$,$\triangle CDE$ 和 $\triangle DEA$ 的面积分别为 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$,则五边形 $ABCDE$ 的面积 A(此外不要与点 A 混淆)满足 Mobius-Gauss 公式

$$A^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)A+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\epsilon+\epsilon\alpha)=0 \quad (10)$$

以此可证明

$$\min\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\}\leqslant\frac{2A}{5+\sqrt{5}}\leqslant\max\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\} \quad (11)$$

最后,又有人提出如下猜想

$$\sqrt[5]{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\leqslant\frac{2A}{5+\sqrt{5}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{5}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\epsilon^2)} \quad (12)$$

式(12)显然是式(11)的加强,证明自然更为困难,匡继昌先生在《常用不等式》(第二版)中把上述猜测列在"100 个未解决的问题"中的第 3 个问题.

这里给出熊斌(华东师范大学数学系)、田延彦(上海科技出版社)对于式(12)的证明.

定理 1 设五边形 $ABCDE$ 的面积为 A,$\triangle EAB$,$\triangle ABC$,$\triangle BCD$,$\triangle CDE$ 和 $\triangle DEA$ 的面积分别为 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 和 ϵ,则有

$$\frac{2A}{5+\sqrt{5}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{5}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\epsilon^2)}$$

其中等号当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\epsilon$ 时成立.

证明 先引进一个二次函数

$$f(x)=x^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)x+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\epsilon+\epsilon\alpha)$$

易知 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)$,又由式(1)知,$A$ 是 $f(x)$ 的根.

若 A 取 $f(x)=0$ 的小根,则

$$A\leqslant\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)$$

所以

$$\frac{2A}{5+\sqrt{5}}\leqslant\frac{1}{5+\sqrt{5}}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)<\frac{1}{5}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)\leqslant$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)}$$

最后一步是算术平均——平方平均不等式.

若 A 取 $f(x)=0$ 的大根,由抛物线的性质知,欲证定理 1,只需证明

$$f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{1}{5}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)}\right)\geqslant 0$$

即可.

下面用配方法来证明上式.

欲证 $$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)}\right)\geqslant 0$$

即证 $$\frac{3+\sqrt{5}}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)}\cdot$$
$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha)\geqslant 0$$

将上式左边配方,得

$$\begin{aligned}\text{左边}=&\frac{1+\sqrt{5}}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha)-\\&\frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)^2+\\&\frac{25+5\sqrt{5}}{4}\left[\sqrt{\frac{1}{5}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)}-\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon}{5}\right]^2=\\&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varepsilon-\frac{\sqrt{5}+1}{4}(\beta+\gamma)+\frac{\sqrt{5}-1}{4}(\alpha+\delta)\right]^2+\\&\frac{25+5\sqrt{5}}{4}\left[\sqrt{\frac{1}{5}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)}-\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon}{5}\right]^2+\\&\frac{\sqrt{5}-1}{8}(\beta^2+\gamma^2)+\frac{\sqrt{5}+1}{8}(\alpha^2+\delta^2)-\\&\frac{\sqrt{5}-1}{4}\beta\gamma-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\alpha\delta+\frac{1}{2}(\alpha\beta+\gamma\delta)-\frac{1}{2}(\alpha\gamma+\beta\delta)=\\&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varepsilon-\frac{\sqrt{5}+1}{4}(\beta+\gamma)+\frac{\sqrt{5}-1}{4}(\alpha+\delta)\right]^2+\\&\frac{\sqrt{5}-1}{8}\left[(\beta-\gamma)+\frac{\sqrt{5}+1}{2}(\alpha-\delta)\right]^2+\\&\frac{25+5\sqrt{5}}{4}\left[\sqrt{\frac{1}{5}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)}-\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon}{5}\right]^2\geqslant 0\end{aligned}$$

要使该式等于 0,则每个平方项均为零.事实上,最后一式为零,即有 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon$,定理 1 证毕.

雅致问题

刘培杰

§0 引言

问题 1 设 $\triangle ABC$ 三边 $AB = c, BC = a, CA = b$, 延长 AB 到 A'', 使 $BA'' = a$, 反向延长到 B', 使 $AB' = b$. 类似得 A'、C'、B''、C''(图 1). 证明 $\frac{S_{A'A''B'B''C'C''}}{S_{\triangle ABC}} \geqslant 13$.

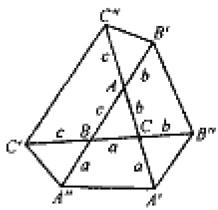


图 1

这是一道 1993 年德国数学奥林匹克试题.

证明 由全等三角形知 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'C''} = S_{\triangle BA'C'} = S_{\triangle CB''A'}$, 于是

$$S_{A'A''B'B''C'C''} = S_{\triangle AA'A''} + S_{\triangle BB'B''} + S_{\triangle CC'C''} + S_{\triangle ABC}$$

又 $S_{\triangle AA'A''} = \frac{1}{2}AA' \cdot AA'' \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}(c+a)(b+a)\sin\angle BAC$

$$S_{\triangle BB'B''} = \frac{1}{2}(a+b)(c+b)\sin\angle ABC$$

$$S_{\triangle CC'C''} = \frac{1}{2}(b+c)(a+c)\sin\angle ACB$$

R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径, 应用正弦定理 $\sin\angle BAC = \frac{a}{2R}$, $\sin\angle ABC = \frac{b}{2R}$,

$\sin \angle ACB = \frac{c}{2R}$. 故只需证

$$\frac{1}{2}(c+a)(b+a)\frac{a}{2R}+\frac{1}{2}(a+b)(c+d)\frac{b}{2R}+$$
$$\frac{1}{2}(b+c)(a+c)\frac{c}{2R} \geqslant 12 \cdot \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R}$$

即 $$a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \geqslant 9abc$$

而这是显然的. 当我们把这个六边形问题变为五边形时, 难度就增大了.

§1 雅致问题

日本《数学二十一世纪》为纪念其创办30周年, 曾向读者募集"雅致问题". 其中下面一个问题由于未获解决而定为试脑奖问题. 这一问题也被《朝日新闻》(周刊)转载了.

问题 2 设平面上凸五边形的面积为 S, 由其对角线构成的小五边形的面积为 S', 试求面积比 S'/S 的最大值(图2).

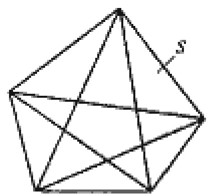


图 2

针对这一问题很多读者寄来了答案, 多数人认为, 取最大值的是正五边形(及其仿射变换). 东京工业大学理学部数学科的增田一男和宍倉光広两人给出了完整的证明, 在这里介绍一下一松信的综述.

至于边数不小于6的情形, 由于有退化图形使面积比 S'/S 任意接近1(图3), 因而这一问题似乎是五边形所独有的.

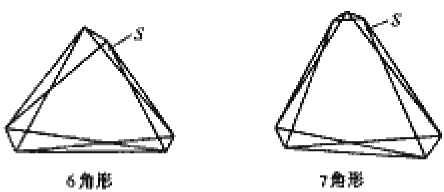


图 3

§2 存在最大值的证明

增田和宍倉两位的证明分为两部分，前半部分证明实际取最大值的五边形是存在的，后半部分证明取最大值的五边形是正五边形.

根据仿射变换，不妨记五边形的三个顶点固定为 $A(0,1)$，$B(0,0)$，$C(1,0)$，其余两顶点作为动点记为 $P(a,b)$，$Q(c,d)$. 面积比 $\varphi(a,b,c,d)=S'/S$ 是4个变量（或者两点 P，Q）的连续函数. 取包括使五边形退化的极限点的闭集合 Ω 作为该函数的定义域（图4）.

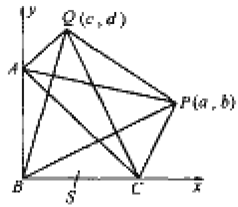


图4

由于 $S'S \leqslant 1$，其上界存在. 证明的要点在于，当变量趋近 Ω 的边界时，论证 φ 不趋近其上界. 这一点并不"难"，但必须把 $|BP| \to \infty$，$|BQ| \to \infty$（一方及双方），一个内角 $\to 180°$，一条边 $\to$ 一点等诸多退化情形一一研究清楚，因而非常繁杂. 已经验证所有情形全部正确并无一遗漏，这里略去细节.

这一要点确立以后，φ 的取值范围应当考虑限定在 Ω 内的有界闭的集合（紧集），由 φ 的连续性，φ 在某处实际达到最大值.

最大值的存在性明了后，根据繁杂的计算知，惟有正五边形给出极大值，由此立即得出结论，那极大值乃是最大值. 然而增田等巧妙地给出更简单的证明.

设取最大值的五边形为 $ABCPQ$，内部的五边形为 $DEFGH$（图5），令

$$PF=a \qquad FG=b \qquad AG=c \qquad PE=d$$

$$DE=e \qquad BD=f \qquad CE=g \qquad EF=h$$

$$FQ=j \qquad \angle PFE=\alpha \qquad \angle PEF=\beta \qquad \angle EPF=\gamma$$

如果将 P 沿 BP 的延长线延长到 P'（$PP'=t$），则 φ 一定减小. 相应于 P' 的量 a，b，c 加上一撇，且令 $\angle PAP'=\theta$，此时外侧和内部的两个五边形的面积的增量 ΔS 和 $\Delta S'$ 分别为

$$\Delta S=\frac{g+h+j}{2}t\sin\beta$$

和
$$\Delta S'=\frac{(b+c)(b'+c')-cc'}{2}\sin\theta$$

对 $\triangle APP'$ 应用正弦定理得到

$$(a+b+c)\sin\theta=t\sin(\gamma-\theta)$$

由于 P 为极大点，有

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{S'+\Delta S'}{S+\Delta S}\right)_{\theta=0}=\frac{1}{S^2}\left(\frac{\mathrm{d}\Delta S'}{\mathrm{d}\theta}\cdot S-\frac{\mathrm{d}\Delta S}{\mathrm{d}\theta}\cdot S'\right)_{\theta=0}$$

由 L'Hopital 定理得

$$\frac{S'}{S}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\Delta S'}{\Delta S}=\frac{(b+c)^2-c^2}{(g+h+j)\sin\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{a+b+c}=\frac{b(b+2c)h}{a(a+b+c)(g+h+j)} \tag{1}$$

同样地，将 P 沿 AP 延长线移动得到

$$\text{式(1)}=\frac{e(e+2f)h}{d(d+e+f)(g+h+j)} \tag{2}$$

于是得到

$$\frac{a(a+b+c)}{b(b+2c)}=\frac{d(d+e+f)}{e(e+2f)}\triangleq p \tag{3}$$

及同样地让 A 移动变分得到

$$\frac{c(a+b+c)}{b(b+2a)}=\frac{k(k+l+m)}{l(l+2m)}\triangleq q \tag{4}$$

假定 p,q 可知，由式(3)、(4) 求 $a:b:c$，不妨考虑 $b=1$，因而 $a/b,c/b$ 成为 a,c，用 p,a 表示 c 代入式(4)，得到有关 a 的 2 次方程. 设 $1+p=4r^2,1+4q=s^2$，最终得到

$$a:b:c=s(r^2-1):2(r+s):r(s^2-1) \tag{5}$$

同样地能够得到如下表示

$$l:m:n=v(u^2-1):2(u+v):u(v^2-1) \tag{6}$$

由式(1) 得

$$S'/S=\frac{8}{(r^2-1)(uv-1)} \tag{7}$$

这里 r,s,u,v 等是有关星形五角形各边的量，且可按凸五边形各顶点的顺序依次记为 $a_1,\cdots,a_5(a_6=a_1)$，则式(7) 意味着 $a_1>a(i=1,\cdots,5)$ 及

$$(a_{i+1}^2-1)(a_ia_{i+2}+1)=\text{常数} \tag{8}$$

下面证明式(8) 中的 $a_1,\cdots,a_5$ 全部相等，如果这一证明成立，则使用前面的记号从 $r=s=u=v$，有 $a=c,a:(b+c)=j:(h+g)$，于是得到 $PQ\parallel AC$. 由于这一结论对各边都成立，必是仿射变换映射于正五边形，证毕(图 6).

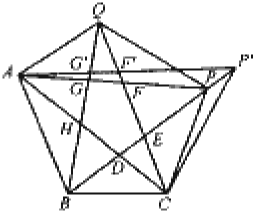


图 5

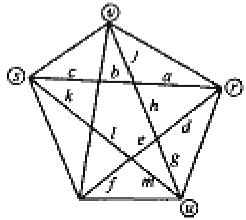


图 6

设式(8)中的常数为 m^4-1，记 $a_i/m=\beta_i$，将 β_1,β_2,β_3 记为 x,y,z，则得到

$$z=\frac{m^2-y^2}{x(m^2y^2-1)}>0$$

且 $m^{-1}<\beta_i<m$，在 (ξ,η) 平面上记 $(\beta_i,\beta_{i+1})=B_i$ 并将点 B_i 打出，再由 $\xi=1,\eta=1,\xi\eta=1$ 把 $m^{-1}\leqslant\xi,\eta\leqslant m$ 划分开来，如图 7 所示，经简单计算可得

$$B_1\in D_1\to B_2\in D_5\to B_3\in D_2\to B_3\in D_5$$

$$B_5\in D_4\to B_4\in D_6\to B_3\in D_3\to B_2\in D_6$$

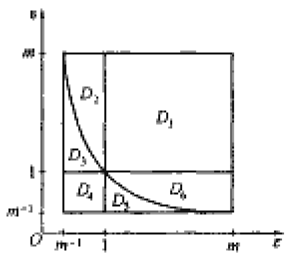


图 7

于是 $D_5\cup D_6$ 中必包含点 B_i，设 $B_i\in D_5$，则由 $\beta_i\beta_{i+1}\leqslant1,\beta_{i+1}\beta_{i+2}\geqslant1,\beta_{i+2}\beta_{i+3}\leqslant1$ 对 i 周期性地成立(周期 5)知 $\beta_i\beta_{i+1}=1,\beta_i=1$ 成立. $B_i\in D_6$ 时亦同样，所以无论在何种情形 β_i，从而 a_i，一定与 i 无关，证明结束.

§4　一组练习题

练习题　设 $ABCDE$ 是任一凸五边形(图 8)，我们可以编一组可供练习的

题目

$$S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{DEA}=S_{EAB}$$

(其中 S_{ABC} 表示 $\triangle ABC$ 的面积,其余类推.)

(1) 求证:任何两条相交的对角线相互黄金分割.

(2) 设 $S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{DEA}=S_{EAB}=1$,试分别求五边形 $ABCDE$ 的面积,五角星 $ACEBD$ 及五边形 $FGHIJ$ 的面积.

(3) 求证一凸五边形,使 $S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{DEA}=S_{EAB}=1$.

证明 (1) 如图 9,因 $S_{AED}=S_{CDE}$,又这两三角形同底 ED,于是它们在 ED 边上的高相等,所以 $AC\parallel DE$. 同理

$$BE\parallel CD \qquad BD\parallel AE \qquad CE\parallel AB \qquad BD\parallel AE$$

又
$$S_{AEF}=S_{ABE}-S_{ABF}=S_{ABC}-S_{ABF}=S_{BCF}$$

再由 $CDEF$ 是平行四边形,得

$$S_{CEF}=S_{CDE}=S_{ABC}$$

所以
$$\frac{S_{ABF}}{S_{BCF}}=\frac{AF}{CF}=\frac{S_{AEF}}{S_{CEF}}=\frac{S_{BCF}}{S_{ABC}}=\frac{CF}{AC}$$

即证得 F 点分 AC 成黄金分割.类似地可证得其他相交的对角线相互分成黄金分割.

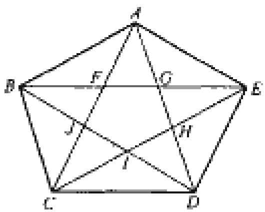


图 8

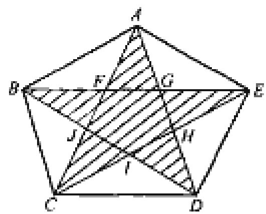


图 9

(2) 求 S_{ABCDE}

$$S_{ABCDE}=S_{BCDG}+S_{ADE}+S_{ABG}=3+S_{ABG}$$

而
$$\frac{S_{ABG}}{S_{ABE}}=\frac{BG}{BE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$S_{ABG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

所以
$$S_{ABCDE}=3+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\approx 3.618$$

求 $S_{五角星ACEBD}$ 及 S_{FGHIJ}

$$S_{ACEBD}=S_{CEF}+S_{AFC}+S_{BFJ}+S_{DHI}$$

而 $$FG=BG+EF-BE=\left(2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}-1\right)BE=(\sqrt{5}-2)BE$$

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABE}}=\frac{FG}{BE}=\sqrt{5}-2,S_{AFG}=\sqrt{5}-2$$

同理 $$S_{BFJ}=S_{DHI}=\sqrt{5}-2$$

所以 $$S_{ACEBD}=1+3(\sqrt{5}-2)=3\sqrt{5}-5$$

$$S_{FGHIJ}=S_{ACEBD}-5S_{AFG}=5-2\sqrt{5}$$

(3) 由(1)中的分析,可得如下作法:

① 作任意 $\triangle ABE$,使 $S_{ABE}=1$.

② 作点 F,G 分线段 BE 成中外比,即

$$\frac{EF}{BE}=\frac{BF}{EF}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\qquad\frac{BG}{BE}=\frac{GE}{BG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(3) 过 B 作 $BD\parallel AE$ 交 AG 的延长线于 D.

(4) 过 E 作 $EC\parallel AB$ 交 AF 的延长线于 C,则 $ABCDE$ 为所求凸五边形,由作法步骤①可见,满足要求的凸五边形不是惟一的.

证明 因为 $AE\parallel BD$,那么 $\triangle AGE\backsim\triangle BGD$,所以

$$\frac{AG}{GD}=\frac{GE}{BG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

于是 $$\frac{S_{AGE}}{S_{GED}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

而 $$\frac{S_{AGE}}{S_{ABG}}=\frac{GE}{BG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

所以 $$S_{GED}=S_{ABG}$$

所以 $$S_{AED}=S_{AGE}+S_{GED}=S_{AGE}+S_{ABG}=S_{ABE}=1$$

同理 $$S_{ABC}=1$$

从作图可知 $BF=GE$,于是

$$S_{ABF}=S_{AGE}=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\qquad S_{BCF}=S_{GED}$$

所以 $BE\parallel CD$,由此可知

$$S_{BCD}=S_{CDE}$$

一道 USAMO 试题与 Vandermonde 行列式

刘培杰

§1 Vandermonde 其人

Vandermonde Alexandre - Théophile(1735 - 2 - 28—1796 - 1 - 1)是法国数学家，曾学习过音乐，后来才从事数学研究.1771 年 Vandermonde 被选为巴黎科学院院士；1782 年担任国立工艺博物馆指导；1795 年他被提名为国家研究院院士.

Vandermonde 一生写的论文不多，只有 4 篇，都是在 1771 ~ 1772 年向巴黎科学院提交的.现在以 Vandermonde 命名的行列式是一种特殊的行列式，关于这一命名，数学界有不同的看法，因为这一行列式并未出现在他的论文中.

§2 Vandermonde 行列式与竞赛试题

在美国第六届(1977)年中学生数学竞赛试题中有如下题目：

试题 1 设 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 及 $S(x)$ 都是多项式，且满足 $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$，试证：$x-1$ 是 $p(x)$ 的一个因式.

此题证法很多，这些证法中虽有的颇为巧妙，精致，但都较繁琐，而且不利于推广.我们可以将此题推广至一般情形，再利用 Vandermonde 行列式给出一个简洁的证明.

设 $Q_1(x)$，$Q_2(x)$，$\cdots$，$Q_{n-1}(x)$，$Q(x)$ 是 n 个多项式，且满足

$$\sum_{i=1}^{n-1} x^{i-1} Q_i(x^n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x^i\right) Q(x) \tag{1}$$

则 $$Q_1(1)=Q_2(1)=\cdots=Q_{n-1}(1)=0$$

证明　令 $w=e^{i\frac{2\pi}{n}}$，于是 $w^n=1$，且 $\sum\limits_{j=1}^{n-1}w^j=0$ 依次将 $x=w,w^2,\cdots,w^{n-1}$ 代入式(1)中得

$$\begin{cases}Q_1(1)+wQ_2(1)+\cdots+w^{n-2}Q_{n-1}(1)=0\\Q_1(1)+w^2Q_2(1)+\cdots+w^{2(n-2)}Q_{n-1}(1)=0\\\quad\vdots\\Q_1(1)+w^{n-1}Q_2(1)+\cdots+w^{(n-1)(n-2)}Q_{n-1}(1)=0\end{cases}$$

这是一个关于 $Q_1(1),Q_2(1),\cdots,Q_{n-1}(1)$ 的齐次线性方程组. 其系数行列式为

$$\Delta^2=\begin{vmatrix}1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-2}\\1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-2)}\\1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-2)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\w & w^2 & \cdots & w^{(n-1)}\\w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\w^{n-2} & w^{2(n-2)} & \cdots & w^{(n-1)(n-2)}\end{vmatrix}$$

此即 $n-1$ 阶 Vandermonde 行列式，故

$$\Delta=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-1}^{n}(w^i-w^j)$$

而 $$w^i\neq w^j\quad 1\leqslant j<i\leqslant n-1$$

故 $$\Delta\neq 0$$

从而方程组(1)只有零解，即

$$Q_1(1)=Q_2(1)=\cdots=Q_{n-1}(1)=0$$

证毕.

显然题目只是上述推广当 $n=5,Q_4(x)=0$ 时的特例.

§3　切伯塔廖夫定理

1925 年 H.T.切伯塔廖夫居留哥廷根期间，根据 Ostrowski 的提议证明了由 p 次单位根(p 是素数)所组成的 Vandermode 行列式中任何子式都不等于零. 这个证明被收进了 Ostrowski 的论文(Jahresber. DMV, 1926(35):269 ~ 280)里.

证明的要点是：设

$$\Delta=|\varepsilon^{\alpha_i\beta_j}|$$

而 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{p}}$；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 是取自数串 $0,1,\cdots,p-1$ 的两组数. 令

$\varepsilon=1+\pi$ 并把 Δ 依 π 的幂展开，就得到用 π 的最小方次除得尽的一项，其形状为

$$\Delta=\frac{\pi(\alpha_\mu-\alpha_\gamma)\cdot\pi(\beta_\mu-\beta_\gamma)}{1!2!\cdots(k-1)!}\pi^{\frac{k(k+1)}{2}}+\cdots$$

因为 π^{p-1} 正好被 p 除尽，而这些系数却不被 p 除尽，因此 Δ 不为零.

后来 A.M.丹尼列夫斯基简化了这个证明.

这个问题的提出最初是由于研究某些解析函数论的一些问题的需要. 具体可见《1917－1957 40 年来的苏联数学—般代数学，域和多项式，线性代数，李群论》，B.M.格鲁什柯夫，A.T.库罗什，πk 法捷也夫，E.G.邓肯，科学出版社.

§4　重积分的计算

§1 中 Vandermonde 行列式的计算还可以帮助我们计算多重积分的值.

如果我们用两种方法计算下面行列式的绝对值的平方

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1}\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)(n-2)}\end{vmatrix}\qquad(\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}})$$

就可以计算出

$$\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant\pi}\lg|\sin(x-y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的值为 $-\frac{\pi^2}{2}\lg 2$.

将上面的行列式与它的复共轭逐行相乘，得

$$|1+\varepsilon^{\lambda-\mu}+\varepsilon^{2(\lambda-\mu)}+\cdots+\varepsilon^{(n-1)(\lambda-\mu)}|_{\lambda,\mu}=0,1,\cdots,n-1=n^n$$

另一方面，我们由 Vandermonde 行列式有

$$\prod_{j<k}^{1,1,\cdots,n-1}|\varepsilon^j-\varepsilon^k|^2=\prod_{j<k}^{0,1,\cdots,n-1}(2\sin\frac{j-k}{n}\pi)^2$$

因此，通过比较得出

$$\sum_{j<k}^{0,1,\cdots,n-1}\frac{\pi^2}{n^2}\lg\left|\sin\left(\frac{j\pi}{n}-\frac{k\pi}{n}\right)\right|=\frac{\pi^2}{2n}\lg n-(1-\frac{1}{n})\frac{\pi^2}{2}\lg 2$$

再利用如下结论即可得所需结论.

若 $f(x)$ 单调增加，则

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})}{n}\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

需要指出的是行列式值的第一种算法也可从一道竞赛题的结论中推出.

试题 2 设 $x_1,\cdots,x_n$ 表示 n 次单位根,计算 $\prod\limits_{i<j}^{n}(x_i-x_j)^2$(1948 年第 8 届 putnam 竞赛题 A_5).

解法如下:

因为
$$t^n-1=(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n) \tag{2}$$
可见
$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^{n-1} \tag{3}$$
微分式(2) 便有
$$nt^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}(t-x_1)\cdots(t-x_{i-1})(t-x_{i+1})\cdots(t-x_n)$$
对 $t=x_1,x_2,\cdots,x_n$ 求值,则得
$$nx_1^{n-1}=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)$$
$$nx_2^{n-1}=(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)$$
$$nx_3^{n-1}=(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_3-x_{n-1})(x_3-x_n)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$nx_n^{n-1}=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})$$
将这些等式相乘即得
$$n^n(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1}=\prod_{i<j}[-(x_i-x_j)^2]=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$$
再应用式(3) 便得
$$\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2=n^n(-1)^{(n-1)^2}\cdot(-1)^{-\frac{n(n-1)}{2}}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^n$$
两边再取模即得
$$\prod_{i<j}|x_i-x_j|^2=n^n$$

§5 Vandermonde 行列式的推广

通常的 Vandermonde 行列式为

$$|V(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)|=\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)\cdots(\lambda_n-\lambda_2)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})$$

式中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 通常是互不相等的数.在数学、力学和其他应用科学中都有重要的应用，在自动控制理论基础中，常会遇到 Vandermonde 行列式的推广形式，为了介绍清楚起见，我们引入下列记号：

设 m 维行向量 $F(\lambda;m)=(1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{m-1})$

则它对 λ 的一阶导数是指

$$F'(\lambda;m)=(0,1,2\lambda,\cdots,(m-1)\lambda^{m-2})$$

它是 $F(\lambda;m)$ 各分量对 λ 求一阶导数所组成的 m 维向量.同样可定义 $F(\lambda;m)$ 对 λ 的 k 阶导数 $F^{(k)}(\lambda;m)$，当向量 $F(\lambda;m)$ 中的 λ 用具体数 λ_i 代替时就记为 $F(\lambda_i;m)$.同样可定义 $F^{(k)}(\lambda_i;m)$ 为 $F^{(k)}(\lambda;m)$ 中 λ 用 λ_i 代替后的结果，显然，当 $k\geqslant m$ 时，$F^{(k)}(\lambda;m)$ 是零向量，令

$$F(\lambda;d;m)=\begin{bmatrix}F(\lambda,m)\\ \frac{1}{1!}F'(\lambda;m)\\ \vdots\\ \frac{1}{(d-1)!}F^{(d-1)}(\lambda;m)\end{bmatrix}$$

它是一个 $d\times m$ 矩阵，考虑下面的 Vandermonde 型的 $(d_1+d_2+\cdots+d_t)\times m$ 阶矩阵

$$V(\lambda_1,\cdots,\lambda_t;d_1,\cdots,d_t;m)=\begin{bmatrix}F(\lambda_1;d_1;m)\\ F(\lambda_2;d_2;m)\\ \vdots\\ F(\lambda_t;d_t;m)\end{bmatrix}$$

此处 $d_i>0,i=1,2,\cdots,t$.

当 $d_1+d_2+\cdots+d_t=m$ 时，$V(\lambda_1,\cdots,\lambda_t;d_1,\cdots,d_t;m)$ 是 m 阶方阵.此时 m 也可以省略不写，再约定：当 λ_i 在式中不出现时，相当于是 $d_i=0$ 仍可写为

$$V(\lambda_1,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_t;d_1,\cdots,d_{i-1},d_{i+1},\cdots,d_t;m)=V(\lambda_1,\cdots,\lambda_t;d_1,\cdots,d_{i-1},v,d_{i+1},\cdots,d_t;m)$$

显然，行列式 $|V(\lambda_1,\cdots,\lambda_t;d_1,\cdots,d_t)|$ 通常是 Vandermonde 行列式的一种推广，即当 $d_1=d_2=\cdots=d_t=1$ 时

$$|V(\lambda_1,\cdots,\lambda_t;d_1,\cdots,d_t)|=|V(\lambda_1,\cdots,\lambda_t)|$$

1984 年南开大学王厦生等得到如下结果：

定理 1 设 $d_1 \geqslant 1, d_2 \geqslant 1, \cdots, d_l \geqslant 1$,且 $\sum_{i=1}^{l} d_i = m$,则

$$|V(\lambda_1, \cdots, \lambda_l; d_1, \cdots, d_l)| = [(\lambda_2 - \lambda_1)^{d_2}(\lambda_3 - \lambda_1)^{d_3}\cdots(\lambda_l - \lambda_1)^{d_l}]^{d_1} \times [(\lambda_3 - \lambda_2)^{d_3}\cdots(\lambda_l - \lambda_2)^{d_l}]^{d_2}\cdots \times [(\lambda_l - \lambda_{l-1})^{d_l}]^{d_{l-1}}$$

§6 在控制论中的应用

在控制论中经常要计算 e^{At},而计算 e^{At} 是很麻烦的,如在须田信英的《自动控制中的矩阵论》中及 K. Ogatu 的著作中均有叙述,王厦生给出了一个利用推广的 Vandermonde 行列式的简单方法.

设 A 是 n 阶方阵,A 的最小多项式记为 $\varphi(\lambda)$,它在 C 上的分解式为

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda - \lambda_l)^{d_l}$$

其中 $\lambda_i \neq \lambda_j (1 \leqslant i < j \leqslant l)$ 且 $\sum_{i=1}^{l} d_i = m \leqslant n$.

我们知道,对每一个 t,矩阵 e^{At} 可用 $I, A, \cdots, A^{m-1}$ 线性表示.因此,e^{At} 可表示为

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A + \cdots + a_{m-1}(t)A^{m-1} = [I, A, \cdots, A^{m-1}]\alpha(t)$$

特别地,可知

$$e^{\lambda_i t} = F(\lambda_i; m)\alpha(t)$$

$$te^{\lambda_i t} = F'(\lambda_i; m)\alpha(t)$$

$$\vdots$$

$$t^{d_i - 1}e^{\lambda_i t} = F^{(d_i - 1)}(\lambda_i; m)\alpha(t)$$

$$i = 1, 2, \cdots, l$$

令

$$E = \left[e^{\lambda_1 t}, \frac{t}{1!}e^{\lambda_1 t}, \cdots, \frac{t^{d_1 - 1}}{(d_1 - 1)!}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \frac{t}{1!}e^{\lambda_2 t}, \cdots, \frac{t^{d_2 - 1}}{(d_2 - 1)!}e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_l t}, \frac{t}{1!}e^{\lambda_l t}, \cdots, \frac{t^{d_l - 1}}{(d_l - 1)!}e^{\lambda_l t}\right]$$

则 E 可写成为

$$E = V(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l; d_1, \cdots, d_l; m)\alpha(t)$$

由此得到

$$\alpha t = V(\lambda_1, \cdots, \lambda_l; d_1, \cdots, d_l; m)E$$

将其代入 e^{At} 的表达式中,即可计算出 e^{At}.

这需要计算 $V^{-1}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l;d_1,d_2,\cdots,d_l;m)$，由于已知其行列式的值，故可利用 Leverrier-Faddeeva 公式计算即可.

§7　在 Putnam 竞赛中的一个应用

Vandermonde 行列式不仅在科学研究及应用数学中十分重要，在数学竞赛中仍是不可或缺的，仅举一个 Putnam 竞赛试题为例.

试题 3　设有 n 个常数值 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，n 个彼此不同的常数值 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 以及由 x 的恒等式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & p(x) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & b_n \end{vmatrix} = 0$$

定义的一个多项式 $p(x)$，对于一个已知多项式 $\Phi(t)$，定义另一个多项式 $Q(x)$，它为上面的恒等式中将 $p(x),b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代之以 $Q(x),\Phi(b_1),\Phi(b_2),\cdots,\Phi(b_n)$ 所得的 x 的恒等式所确定，证明用 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 除 $\Phi(p(x))$ 所得余式为 $Q(x)$.

（1941 年第 4 届 Putnam 竞赛试题）

证明　由 Vandermonde 行列式

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$$

不为零，若在定义 $p(x)$ 的行列式中用 a_1 代入 x_1，将第一行减去第二行后再按第一行展开，得

$$V\cdot(p(a_1)-b_1)=0$$

故 $p(a_1)=b_1$，同理可得 $p(a_i)=b_i$，$i=2,3,\cdots,n$.

同样利用关于 Q 的行列式可得 $Q(a_i)=\Phi(b_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，显然 Q 是小于 n 次的多项式.

假设多项式 $\Phi(p(x))$ 除以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，剩下的余式 $R(x)$ 次数小于 n，则

$$\Phi(p(x)) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)\delta(x) + R(x)$$

这里 $\delta(x)$ 是多项式，用 $x = a_i$ 代入得

$$R(a_i) = \Phi(p(a_i)) = \Phi(b_i) = Q(a_i)$$

所以有关于 x 的 n 个不同的值使得 $Q(x) - R(x)$ 为零，但因其次数小于 n，故 $Q(x) - R(x)$ 恒等于零，并且余式为 $Q(x)$.

§8　在递推数列求通项中的应用

我们先来看这道加拿大国家集训队 1992 年的试题.

试题 4　设 $r \in \mathbf{R}$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0 = 0, x_1 = 1$，且 $x_{n+2} = rx_{n+1} - x_n$，$n \geqslant 0$，问 r 取何值时，使得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2m-1} = x_m^2 \quad 对\ \forall m \in \mathbf{N}^*$$

解法是利用特征方程.

所给递推关系的特征方程是

$$\lambda^2 - r\lambda + 1 = 0$$

其根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(r \pm \sqrt{r^2 - 4})$$

(1) 若 $r = 2$，则特征根为重根为 1，此时

$$x_n = n \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

(2) 若 $r = -2$，则 $\lambda = -1$ 是 2 重特征根，此时

$$x_n = (-1)^{n+1} n \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

在这两种情况下都有

$$x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1} = 1 + 3 + \cdots + 2m - 1 = m^2 = x_m^2$$

(3) 若 $r^2 \neq 4$，则有两个不同的特征根 λ_1, λ_2（λ_1, λ_2 不一定是实数），由于 $\lambda_1, \lambda_2 = 1$，所以可记

$$z = \lambda_1 \qquad \frac{1}{z} = \lambda_2$$

此时 $Z \neq 1$，且

$$x_n = c_1 z^n + c_2 z^{-n} \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

其中 c_1, c_2 是由 $x_0 = 0$ 和 $x_1 = 1$ 所决定的常数（也不一定是实数），由此可得

$$\sum_{k=1}^{m} x_{2k-1} = c_1 \sum_{k=1}^{m} z^{2k-1} + c_2 \sum_{k=1}^{m} z^{1-2k} = c_1 \frac{z(z^{2m} - 1)}{z^2 - 1} + c_2 \frac{z^{-1}(z^{-2m} - 1)}{z^{-2} - 1}$$

由 $x_0 = c_1 + c_2 = 0$，可知 $c_1 = -c_2 = c$，则

$$\sum_{k=1}^{m} x_{2k-1} = c\frac{z(z^{2m}-1)}{z^2-1} - c\frac{z(z^{2m}-1)}{1-z^2} = \frac{cz}{z^2-1}(z^{2m}-2+z^{-2m}) =$$

$$\frac{cz}{z^2-1}(z^m-z^{-m})^2$$

再由 $x_1 = c(z-z^{-1}) = \dfrac{c(z^2-1)}{z} = 1$，立即得到

$$\sum_{k=1}^{m} x_{2k-1} = c^2(z^m-z^{-m})^2 = x_m^2$$

总之，当 r 为任意实数时均有

$$x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1} = x_m^2$$

从这个解答来看，常系数线性齐次递归数列的通解公式起了关键作用，并且还包括了有重根的情况.

考虑递归关系

$$H(n) = a_1H(n-1) + a_2H(n-2) + \cdots + a_kH(n-k) \quad n = k, k+1, \cdots \tag{4}$$

其中 $a_k \neq 0$，其特征方程为

$$p(x) \triangleq x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \cdots - a_k = 0 \tag{5}$$

设 $q_1, q_2, \cdots, q_t$ 是 (r) 的不同根，其重数分别为 $e_1, e_2, \cdots, e_t$ $(\sum_{i=1}^{t} e_i = k)$，则递归关系 (4) 的通解为

$$H(n) = H_1(n) + H_2(n) + \cdots + H_t(n) \tag{6}$$

其中

$$H_j(n) = (C_{j,1} + C_{j,2}\cdot n + C_{j,3}\cdot n^2 + \cdots + C_{j,e_j}\cdot n^{e_j-1})q_j^n \qquad j = 1, 2, \cdots, t \tag{7}$$

而 $C_{j,k}$，$k = 1, 2, \cdots, e_j$；$j = 1, 2, \cdots, t$ 为任意常数.

在这一定理的证明中用到的一个关键结论是关于推广的 Vandermonde 行列式值的结果.

定理 2 推广的 Vandermonde 行列式之值如下

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 & q_1 & \cdots & q_1 & \cdots & q_v & q_v & \cdots & q_v \\ q_1^2 & 2q_1^2 & \cdots & 2^{e_1-1}q_1^2 & \cdots & q_v^2 & 2q_v^2 & \cdots & 2^{e_v-1}q_v^2 \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ q_1^n & nq_1^n & \cdots & n^{e_1-1}q_1^n & \cdots & q_v^n & nq_v^n & \cdots & n^{e_v-1}q_v^n \\ q_1^{n-1} & (n-1)q_1^{n-1} & \cdots & (n-1)^{e_1-1}q_1^{n-1} & \cdots & q_v^{n-1} & (n-1)q_v^{n-1} & \cdots & (n-1)^{e_v-1}q_v^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{i=1}^{v}\prod_{j=1}^{e_i-1} j!\cdot\prod_{i=1}^{v} q_i^{\binom{e_i}{2}}\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant v}(q_j-q_i)^{e_ie_j}$$

其中 $\sum_{i=1}^{v} e_i = u$.

显然当 $q_i \neq q_j(1 \leqslant i < j \leqslant v)$ 时, $v \neq 0$.

证明可见沙基昌,沙基清编著《组合数学》湖南教育出版社:112 - 116.

最后,给出两个与 Vandermonde 行列式的计算有关的问题来供读者练习

(1) 试证:行列式

$$|(a_\lambda - b_\mu)^{n-1}|_1^n = \prod_{r=1}^{n-1}(n-r)^{n-2r}\prod_{j>k}(a_j-a_k)(b_j-b_k)$$

(2) 行列式

$$|1, x_r, x_r^2, \cdots, x_r^{n-q-1}, x_r^{n-q+1}, \cdots, x_r^{n-1}, x_r^n| \quad r = 1,2,\cdots,n$$

是 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个交错有理整函数,而它可被差的乘积 $\prod_{j<k}(x_j - x_k)$ 除尽,证明其商 S_q 等于 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的第 q 个初等对称函数.

Aesthetic judgments transcend both logic and applicability in the ranking of mathematical theorems: beauty and elegance have more to do with the value of a mathematical idea than does either strict truth or possible utility.

——斯蒂恩

关于一道 Putnam 数学竞赛试题的背景

刘培杰

1962 年 12 月 1 日举行的第 23 届 Putnam 数学竞赛试题 A－4 为：

题目　设 $f(x)$ 定义在长度不小于 2 的一个区间里，且 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$，求证：

$$|f'(x)|\leqslant 2 \qquad (1)$$

这是 1914 年 E. Landan 提出的一个不等式，并且还给出了一个十分简洁的证明：

不失一般性，我们可以假定 $0\leqslant x\leqslant 2$，那么

$$f(x)-f(0)=xf'(x)-\frac{1}{2}x^2f''(t_1) \qquad 0\leqslant t_1\leqslant x\leqslant 2$$

$$f(2)-f(x)=(2-x)f'(x)+\frac{1}{2}(2-x)^2f''(t_2) \qquad 0\leqslant x\leqslant t_2\leqslant 2$$

因此

$$f(2)-f(0)=2f'(x)-\frac{1}{2}x^2f''(t_1)+\frac{1}{2}(2-x)^2f''(t_2)$$

即

$$2|f'(x)|\leqslant 1+1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(2-x)^2=4-x(2-x)\leqslant 4$$

或

$$|f'(x)|\leqslant 2$$

由 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$ 定义的函数 f 表明，(1) 中的等式确定可以成立.

1950 年 V. G. Avakumović 和 S. Aljančić 对 E. Landan 不等式进行了推广，他们用几何方法证明了：

定理 1　若 f 是实函数，且对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，$|f''(x)|\leqslant 1$，则对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，有

$$|f'(x)-f(1)+f(0)|\leqslant \frac{1}{2}-x+x^2$$

并且这个上界不能改进.

定理 2 若 f 是实函数，且对于 $|f''(x)| \leqslant 1(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 和 $f'(0)=f'(1)$，可推出

$$|f'(x)-f(1)+f(0)| \leqslant \frac{1}{4} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

这个上界亦不能改进.

对于 E. Landan 不等式，如果将区间改为[0,1]，则结果为：

若对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$|f''(x)| \leqslant 1$ 且 $|f(x)| \leqslant 1/4$，则对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$|f'(x)| \leqslant 1$.

J. D. Kečkić 用与 Landau 同样的方法证明了如下结果：

定理 3 设 f 是在长度不小于 a 的区间上的实函数，满足条件 $|f(x)| \leqslant 1$ 和 $|f''(x)| \leqslant 1$，则

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{a}+\frac{a}{2}$$

参考文献

[1] Landan E. Einige Ungleichungen für Zwei mal differentierbare Funktionen[J]. Proc. London Math. Soc., 1914, 13(2): 43-49.

[2] Avakumovic V G., Aljancić S. Surla meilleure limite de la dérivée d'une function assujettie á des conditions supplément aires[J]. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1950, 3: 235-242.

The beauty of mathematics speaks for itself.

——哈尔莫斯

从 Putnam 试题谈 Catalan 猜想

刘培杰

§0　引言

1976 年 12 月 4 日举行的第 37 届普特南数学竞赛上午试题 A_3 为：

试题 1　求方程

$$|p^r - q^s| = 1 \tag{1}$$

的整数解，其中 p,q 是素数，r,s 是大于 1 的正整数，并证明你所得到的解是全部解．

1978 年 1 月号的《美国数学月刊》发表了 A.P.Hillman．G.L.Alexanderson．L.F.Klosimeki 的总结文章，他们给出的解法为：

我们证明只有一个由 $3^2 - 2^3 = 1$ 所给出的解，即 $(p,r,q,s) = (3,2,2,3)$ 或 $(2,3,3,2)$．

明显地或 p 或 q 是 2，假如 $q = 2$，则 p 是一个适合 $p^r \pm 1 = 2^s$ 的奇素数，假如 r 是奇数，$(p^r \pm 1)/(p \pm 1)$ 是奇整数 $p^{r-1} \mp p^{r-2} + p^{r-3} \mp p^{r-4} + \cdots + 1$．因此 $r > 1$，故它大于 1．这就与 2^s 没有这样的因子这个事实相矛盾．

现在我们尝试 r 是一个偶数 $2t$，则 $p^r + 1 = 2^s$，可推出

$$2^s = (p^t)^2 + 1 = (2n+1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 2$$

这是不可能的，因为对于 $s > 1$ 有 $4 \mid 2^s$，而 $4 \nmid (4n^2 + 4n + 2)$，还有 $r = 2t$ 和 $p^r - 1 = 2^s$，导出 $(p^t)^2 - 1 = (2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n+1) = 2^s$，因为或者 n 或者 $n+1$ 是奇数，所以仅对 $n = 1, s = 3, p = 3$ 与 $r = 2$ 这才是可能的．

我们说这个解答固然简单，但是开始的断言：只有一个由 $3^2 - 2^3 = 1$ 给出的解，这点是怎样想到的？

§1 卡塔兰猜想

实际上试题1不过是著名的Catalan猜想的一个特殊形式.

卡塔兰(Catalan, Eagene Cloarias 1814—1894),是比利时著名数学家,布鲁赛尔科学院院士,毕业于巴黎多科工艺学校,共写有200多篇关于各种数学问题的研究报告.

卡塔兰曾于1842年提出猜想:除开$8=2^3,9=3^2$外,没有两个连续自然数都是正整数的乘幂.即在整数$x>1,y>1,m>1,n>1$时,除$m=y=2$,$n=x=3$外,方程$x^m-y^n=1$无解.或者,不定方程$x^p-y^q=1,p,q$是素数,除开$p=2,x=3,q=3,y=2$外,没有其他的正整数解.

这一猜想是由Journal fürdie Reine and Angewandte Mathematik最先从Catalan处收到的,并于1849年发表,卡塔兰当时是巴黎l'École Polytechnique的一位老师,由于解决了一个组合问题而出名,仍在使用的术语"卡塔兰数"就是关于那个组合问题的.至于这个猜想卡塔兰写道:他至今还未能完全证明它,也从未发表过有关它的任何严肃的部分结果.

其实比卡塔兰提出这一猜想早大约100年,Eulev证明了8和9是仅有的相邻平方数和立方数,即Diophantine方程:$x^3-y^2=\pm 1(x>0,y>0)$的仅有解.Eulev的证明是长且精巧的,其中用到了Fermat无限递降法及Guass整数环.

如果事先并不知道这个背景去解试题1就要从头开始,费一些周折了.

首先去掉绝对值符号,因p与q,r与s的对称性,故不妨设$p^r>q^s$,可以只考虑方程

$$p^r-q^s=1 \tag{2}$$

的整数解.

显然,p,q不能全为奇素数,否则,$1=p^r-q^s$是偶数,矛盾.

$p\neq q$,否则$1=p^r-q^s$,有大于1的约数p,矛盾.

故p,q一定有一个是惟一的偶素数2.

(1)当$p=2$时,如果$s=2s'$是偶数,设$q=2q'+1$,则

$$q^s+1=(2q'+1)^{2s'}+1\equiv 2(\bmod 4)$$

而$p^r=2^r,r>1$,故$p^r\equiv 0(\bmod 4)$.故s只可能是奇素数,$s\geqslant 3$.

$$p^r=2^r=q^s+1=(q+1)(q^{s-1}-q^{s-2}+\cdots-q+1)$$

故$q+1$只含素因子2.设$q+1=2^t(t\geqslant 2)$,则

$$2^r=q^s+1=-1+2^ts-C_s^2(2^t)^2+\cdots+1=2^t(s-C_s^2\cdot 2^t+\cdots) \tag{3}$$

因为 $C_s^1 - C_s^2 \cdot 2^t + \cdots$ 与 s 有相同的奇偶性,故它是奇数,只能为 1. 于是有 $t = r$,从而方程(3) 化为

$$2^r - (2^r - 1)^s = 1$$

得 $s = 1$,与要求 $s > 1$ 不合,故 p 不能取 2.

(2) 当 $q = 2$ 时,则由式(2) 得

$$2^s = p^r - 1 = (p - 1)(p^{r-1} + p^{r-2} + \cdots + 1)$$

可知 $p - 1$ 仅含素因子 2,设 $p - 1 = 2^t(t \geqslant 1)$,$t = 2^u \cdot r'(u \geqslant 0, r'$ 是奇数) 则

$$2^s = (2^t + 1)^r - 1 = 1 + 2^t \cdot r + C_r^2 \cdot (2^t)^2 + \cdots - 1 =$$
$$2^{t+u}[r' + r'(r - 1) \cdot 2^{t-1} + \cdots + 1] \qquad (4)$$

若 $t \geqslant 2$,则 $r' + r'(r - 1) \cdot 2^{t-1} + \cdots$ 是大于 1 的奇数,故式(4) 不成立,则 $t = 1$,即 $p = 3$.

这时,由式(2) 得

$$2^s = 3^r - 1 = (4 - 1)^r - 1 =$$
$$(-1)^r + C_r^1(-1)^{r-1} \cdot 4 + C_r^2(-1)^{r-2} \cdot 4^2 + \cdots - 1$$

若 r 是奇数,由上式右边不能被 4 整除,从而不能成立!

若 $r \geqslant 4$ 是偶数,则上式右边等于

$$-4r + 8r(r - 1) - \cdots = -4r[1 - 2(r - 1) + \cdots]$$

$[1 - 2(r - 1) + \cdots]$ 是奇数,它只能为 -1,即 $2^s = 3r - 1 = 4r$.

当 $r \geqslant 4, 3^r - 1 = (1 + 2)^r - 1 \geqslant 2r + C_r^2 \cdot 2^2 = 2r^2 \geqslant 4r$.

故 r 只能为 2,故 $2^s = 3^2 - 1 = 8$,则 $s = 3$,故方程(2) 的解只能是 $p = 3$,$q = 2, r = 2, s = 3$. 考虑到对称性,原方程有两组解

$$p = 3, q = 2, r = 2, s = 3 \quad 和 \quad p = 2, q = 3, r = 3, s = 2$$

从这个证明可以看出"站的高才能证得简".

§2 与卡塔兰猜想有关的竞赛题

卡塔兰猜想的叙述是初等的,证明是高深的,这正是数学奥林匹克命题的源泉之一,我们用取特例法可得出以下的试题:

试题 2 求方程 $2^m - 3^n = 1$ 在自然数集内的所有解.

(前苏联数学竞赛题)

解 显然,原方程有一组解 $m = 2, n = 1$,我们将证明这是惟一的一组解.

假设 $m > 2$,我们来讨论 n:

i) 若 n 为偶数，则 $3^n=3^{2k}=9^k\equiv 1\pmod 8$，所以当 n 为偶数时无解.

ii) 若 n 为奇数且 $n>1$，则 $3^{2k+1}+1=9^k\cdot 3+1\equiv 3+1\equiv 4\pmod 8$，而 $2^m\equiv 0\pmod 8$，所以当 n 为大于1的奇数，方程无解.

所以方程仅有解 $m=2,n=1$.

试题3 求方程 $2^x+1=y^2$ 的自然数解.

(美国纽约，1977年数学竞赛题)

解 将方程改写为 $2^x=(y-1)(y+1)$，则对 $x,y\in\mathbf{N}$，$y-1,y+1\in\mathbf{Z}^+$ 都是 2^x 的因数，即 $y-1=2^p$，$y+1=2^q$，其中，$p,q\in\mathbf{Z}^+$，$p<q$，因此

$$2^q-2^p=(y+1)-(y-1)=2$$

即 $2^p(2^{q-p}-1)=2$，注意，$q-p\leqslant 1$，否则奇数 $2^{q-p}>1$ 将是2的因数，不可能，所以 $q=p+1$，且 $2^p(2-1)=2$，即 $p=1,q=2$，从而 $y=3$，经验证，$y=3$，$x=3$ 为方程的解.

本题是卡塔兰猜想当：$x=y,y=2,m=2,n=x$ 时的特例.

试题4 求证方程 $(2x)^{2x}-1=y^{z+1}$ 没有自然数解.

(民主德国1980年数学奥林匹克试题)

证明 设 $x,y,z\in\mathbf{N}$ 满足方程，则

$$[(2x)^x+1][(2x)^x-1]=y^{z+1}$$

且因 $k=(2x)^x+1$ 与 $m=(2x)^x-1$ 为奇数，故 $(k,m)=(k,k-m)=(k,2)=1$，即 k 与 m 互素，由此可得存在 $p,q\in\mathbf{N}$，使得 $k=p^{z+1}$，$m=q^{z+1}$，于是 $2=p^{z+1}-q^{z+1}=(p-q)(p^z+p^{z-1}q+\cdots+q^z)$，$p\geqslant q+1$，因此，$2\geqslant p^z+p^{z-1}q+\cdots+q^z\geqslant p^z+q^z\geqslant p+q>2q\geqslant 2$，矛盾，所以原方程没有自然数解.

本题是卡塔兰猜想当 $x=2x,y=y,n=2x,m=z+1$ 时的特例.

试题5 考虑方程 $x^n+1=y^{n+1}$，其中 n 是自然数，而且 $n\geqslant 2$，证明：上面的方程当 x,y 是自然数，而且 x 与 $n+1$ 无公因子时无解.

(1980年芬兰等四国国际数学竞赛试题)

解法1 注意当 $y=1$ 时，必定有 $x=0$，故 x 在自然数集合中无解，因此只要考虑 $y\geqslant 2$ 的情况，令 $y-1=z$，则 $z\geqslant 1$，同时原方程变为

$$x^n=y^{n+1}-1=(1+z)^{n+1}-1=z^{n+1}+C_{n-1}^1z^n+\cdots+C_{n+1}^nz$$

即

$$x^n=z(z^n+C_{n+1}^1z^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^n)\tag{5}$$

另证 z 与 $z^n+C_{n+1}^1z^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^1$ 无公因子，若有公因子，则必定存在一个素数 p，使

$$z=p^\alpha A\tag{6}$$

$$z^n + C_{n+1}^1 z^{n-1} + \cdots + C_{n+1}^n = p^\beta B \tag{7}$$

其中 α,β 是自然数，而且 $p \nmid A$，$p \nmid B$，从式(6) 和(7) 可得

$$\begin{aligned} n + 1 = C_{n+1}^n &= (z^n + C_{n+1}^1 z^{n-1} + \cdots + C_{n+1}^n) - \\ &\quad z(z^{n-1} + C_{n+1}^1 z^{n-2} + \cdots + C_{n+1}^{n-1}) = \\ &\quad p^\beta B - p^\alpha A[z^{n-1} + C_{n+1}^1 z^{n-2} + \cdots + C_{n+1}^{n-1}] = \\ &\quad p(p^{\beta-1}B - p^{\alpha-1}Az^{n-1} + C_{n+1}^1 z^{n-2} + \cdots + C_{n+1}^{n-1}) \end{aligned}$$

所以 p 是$(n+1)$ 的一个因子，从而由式(5) 得到

$$x^n = p^\alpha A \cdot p^\beta B = p^{\alpha+\beta} A \cdot B$$

故 $p \mid x^n$.

因为 p 是素数，所以一定有 $p \mid x$，亦即 p 是x 的一个因子，这样 p 就是x 和 $n+1$ 的公因子. 而这与 x 和$n+1$ 无公因子假设相矛盾. 现在设

$$z = A' \tag{8}$$

$$z^n + C_{n+1}^1 z^{n-1} + \cdots + C_{n+1}^n = B' \tag{9}$$

那么由上面的结论可知，A' 和 B' 一定是互素的，即它们没有公共的约数，但从式(5) 知

$$x^n = A'B'$$

因此如果把 A' 和 B' 分别分解为一些素因子幂的乘积的话，即如果

$$A' = b_1^{d_1} \cdots b_s^{d_s}$$

$$B' = c_1^{e_1} \cdots c_k^{e_k}$$

其中 $b_1,\cdots,b_s$ 是 s 个互异的素数；$c_1,\cdots,c_k$ 也是 k 个互异的素数. 其中 $d_1,\cdots,d_s,e_1,\cdots,e_k$ 均是自然数，因为 A' 与 B' 没有公约数，所以集合$\{b_1,\cdots,b_s\}$ 和集合$\{c_1,\cdots,c_k\}$ 没有公共的元素. 这样从

$$x^n = b_1^{d_1} \cdots b_s^{d_s} c_1^{e_1} \cdots c_k^{e_k}$$

中可以判知，$d_1,\cdots,d_s,e_1,\cdots,e_k$ 这些自然数都可以被 n 除尽，这样，一定有

$$A' = a^n \quad 和 \quad B' = b^n$$

其中 a,b 是某两自然数，这样从式(9) 得到

$$\frac{(z+1)^n - 1}{z} = B' = b^n \tag{10}$$

但是

$$(z+1)^n < \frac{(z+1)^{n+1} - 1}{z} \tag{11}$$

这是因为 $z \geqslant 1$ 及 $n \geqslant 2$，故 $1 < 4 = (1+1)^2 \leqslant (z+1)^n$. 所以

$$z(z+1)^n < (z+1)^{n+1} - 1$$

将上式两边再除以 z 就得到了(11)，此外我们还要证明

$$\frac{(z+1)^{n+1} - 1}{z} < (z+2)^n \tag{12}$$

这是因为只要证明 $z[(z+2)^n-(z+1)^n]>(z+1)^n-1$.而

$$\begin{aligned}z[(z+2)^n-(z+1)^n]=&z[(z+2)^{n-1}+(z+2)^{n-2}(z+1)+\cdots+\\&(z+2)(z+1)^{n-2}+(z+1)^{n-1}]>\\&zn(z+1)^n\end{aligned}$$

但是因为 $z\geqslant 1$ 及 $n\geqslant 2$,故 $(n-1)z-1\geqslant 1\cdot 1-1=0$.所以

$$(z+1)^{n-1}[(n-1)z-1]\geqslant 0>-1$$

故 $$(z+1)^{n-1}(nz-z-1)>-1$$

即 $$nz(z+1)^{n-1}>(z+1)^{n-1}$$

因此 $$z[(z+2)^n-(z+1)^n]>nz(z+1)^{n-1}>(z+1)^n-1$$

所以式(12)成立,这样联合式(11)、(12)得到

$$(z+1)^n<\frac{(z+1)^{n+1}-1}{z}<(z+2)^n$$

由式(10)代入,即得 $(z+1)^n<b^n<(z+2)^n$,即 $z+1<b<z+2$.

而这与 b 是自然数相矛盾,所以原方程在所作的限制之下无解.

解法2 先设 $y>2$,$y-1$ 有素因子 p,因 $(y-1)\mid(y^{n+1}-1)$.故由方程得 $p\mid x$,而 $(x,n+1)=1$,故 $(p,n+1)=1$,又

$$x^n=(y-1)(y^n+y^{n-1}+\cdots+y+1)\tag{13}$$

由 $y\equiv 1(\bmod\ y-1)\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}y^i\equiv n+1(\bmod\ y-1)\Rightarrow p\nmid\sum_{i=0}^{n}y^i$,由于 p 是 $y-1$ 的任意一个素因子 $\Rightarrow(\sum_{i=0}^{n}y^i,y-1)=1$.

由式(13)可推出

$$\sum_{i=0}^{n}y^i=u^n,u\mid x,u>0\tag{14}$$

但由于 $n>1$ 时,$y^n<\sum_{i=0}^{n}y^i<(y+1)^n$,故式(14)不能成立.

当 $y=1$ 时,方程无正整数解;

当 $y=2$ 时,方程给出

$$x^n=2^{n+1}-1=\sum_{i=0}^{n}2^i\tag{15}$$

而 $2^n<\sum_{i=0}^{n}2^i<3^n$.故式(15)不成立.

§3 利用卡塔兰猜想编拟的竞赛训练题

我们可以给出几个与卡塔兰猜想有关的简单题目,当做竞赛的训练题.

取 $n = 2n+1, y = 2, m = r$ 的特例.

试题 6 求证:丢番图方程

$$x^{2n+1} - 2^r = \pm 1 \tag{16}$$

当 $x > 1$ 时, x, n, r 无整数解.

证明 假设式(16)有整数解 x, n, r,则

$$x^{2n+1} \pm 1 = (x \pm 1)(x^{2n} \mp x^{2n-1} + \cdots \mp x + 1) = 2^r \tag{17}$$

当 $x > 1$ 时, $x^{2n} \mp x^{2n-1} + \cdots \mp x + 1$ 大于 1 且为奇数,故存在奇数 p,满足

$$p \mid x^{2n} \mp x^{2n-1} + \cdots \mp x + 1$$

而 2^r 不被任何奇素数整除,故式(17)不成立.

取 $y = p$ 为奇素数, $x = 2$ 时的特例及取 $x = p$ 为奇素数, $y = 2$ 时的特例得:

试题 7 求证:当 $n > 1$ 时,不存在奇素数 p 和正整数 m,使 $p^n + 1 = 2^m$;当 $n > 2$ 时,不存在奇素数 p 和正整数 m,使 $p^n - 1 = 2^m$.

证明 由上题知当 $2 \mid n$ 时,结论成立.现设 $2 \nmid n$,此时在

$$p^n + 1 = 2^m \tag{18}$$

中,由于 $p \geqslant 3, n \geqslant 2$,故 $2^m \geqslant p^2 + 1 \geqslant 10$,显然有 $m \geqslant 2$.

对式(18)取模 4 得 $2^m = 0 \pmod 4$ 和 $p^n \equiv 1 \pmod 4$(因为奇数的平方模 8 余 1),故 $2 \equiv 0 \pmod 4$ 矛盾,故结论 1 成立.

设 $n = 2k$,我们有

$$p^{2k} - 1 = 2^m \tag{19}$$

因式(19)得 $(p^k - 1)(p^k + 1) = 2^m$.故有 $p^k + 1 = 2^s, s > 0, k > 1$,同理可证.

取 $x = x, y = y, m = y, n = x$ 时的特例有:

试题 8 求证:丢番图方程

$$x^y = y^x + 1$$

只有两组正整数解: $x = 2, y = 1; x = 3, y = 2$.

i) 如果 x, y 同奇,同偶,则都有 $0 \equiv 1 \pmod 2$,此情形无解.

ii) 如果 x 偶 y 奇, $y = 1$ 时, $x^y = y^x + 1$ 在 $x = 2, y \geqslant 3$ 时无解,否则, $x^y = y^x + 1$ 给出 $0 \equiv 2 \pmod 4$,矛盾.

iii) 如果 x 奇 y 偶,且 $x > 1$,下面证明

$$x^y = y^x + 1$$

只有一组正整数解 $x = 3, y = 2$.

设 $y = 2^t a, 2 \nmid a, t \geqslant 1$,当 $t = 1$ 时,原方程可写成

$$(x^a + 1)(x^a - 1) = 2^x a^x \tag{20}$$

由于 $(x^a + 1, x^a - 1) = 2$,因此式(20)给出

$$2^{x-1} \mid x^a + 1 \quad 或 \quad 2^{x-1} \mid x^a - 1$$

又因

$$x^a + 1 = (x + 1)(x^{a-1} - x^{a-2} + \cdots - x + 1)$$

$$x^a - 1 = (x - 1)(x^{a-1} + x^{a-2} + \cdots + x + 1)$$

故有 $2^{x-1} \mid x + 1$ 或 $2^{x-1} \mid x - 1$.

当 $x > 1$ 时,$2^{x-1} \mid x - 1$ 显然不可能成立,由 $2^{x-1} \mid x + 1$ 给出 $x = 3$,由 $3^2 = 2^3 + 1$ 知道 $x = 3, y = 2$ 为一组解,如果 $y \geqslant 4$,用数学归纳法容易证明 $3^y > y^3 + 1$,因而 $3^y = y^3 + 1$ 无解.所以,$t = 1$ 时原方程只有一组解 $x = 3$,$y = 2$.下面再证明 $t \geqslant 2$ 时,原方程无解.当 $t \geqslant 2$ 时,原方程可写成

$$(x^{y/2} + 1)(x^{y/2^2} + 1)\cdots(x^{y/2^{t-1}} + 1)(x^a + 1)(x^a - 1) = 2^{tx}a^x \tag{21}$$

由于 x 为奇数,且 $1 \leqslant k \leqslant t - 1$ 时 $\frac{y}{2^k}$ 为偶数,因此

$$x^{y/2^k} + 1 \equiv 2 \pmod 4$$

$$2 \mid x^{y/2^k} + 1,但 2^2 \nmid x^{y/2^k} + 1, 1 \leqslant k \leqslant t - 1$$

注意到 $(x^a + 1, x^a - 1) = 2$,因此式(21)给出

$$2^{tx-t} \mid x^a + 1 \quad 或 \quad 2^{tx-t} \mid x^a - 1$$

由前面所证即知

$$2^{tx-t} \mid x + 1 \quad 或 \quad 2^{tx-t} \mid x - 1$$

但当 $x \geqslant 3, t \geqslant 2$ 时

$$2^{tx-t} = (2^t)^{x-1} \geqslant 4^{x-1} > x \pm 1$$

故

$$2^{tx-t} \nmid x \pm 1$$

也就是说,$t \geqslant 2, x > 1$ 时,原方程无正整数解.

显然,$x = 1$ 时,$y = 0$.

综上所述,不定方程 $x^y = y^x + 1$ 只有两组正整数解 $x = 2, y = 1$;$x = 3$,$y = 2$.

取 $x = x + 1, m = y, y = x, n = y + 1$ 时的特例,得到如下的:

试题 9 求出不定方程 $(x + 1)^y = x^{y+1} + 1$ 的全部正整数解.

解 我们将证明此方程只有两组正整数解.

(1) 如果 x 为奇,y 为奇

i) $x = 1$ 时,$2^y = 1^{y+1} + 1$ 给出 $x = y = 1$.

ii) $x > 1$ 时,$(x + 1)^y = x^{y+1} + 1$ 给出 $0 \equiv 2 \pmod 4$,因此 x 奇,y 奇时,方程只有一组解 $x = y = 1$.

(2) 如果 x 为奇,y 为偶,先把不定方程 $(x + 1)^y = x^{y+1} + 1$ 作如下变形

$$(x + 1)^y - 1 = x^{y+1}$$

$$(x+1)^{y-1}+(x+1)^{y-2}+\cdots+(x+1)+1=x^{y}$$

$$(x+1)[(x+1)^{y-2}+(x+1)^{y-3}+\cdots+(x+1)+1]=$$
$$(x-1)(x^{y-1}+x^{y-2}+\cdots+x+1)$$

注意到 y 为偶数时

$$\frac{x^{y-1}+x^{y-1}+\cdots+x+1}{x+1}=x^{y-2}+x^{y-4}+\cdots+x^{2}+1 \qquad (22)$$

可以得到

$$(x+1)^{y-2}+(x+1)^{y-3}+\cdots+(x+1)+1=$$
$$(x-1)(x^{y-2}+x^{y-4}+\cdots+x^{2}+1) \qquad (23)$$

但(23)给出 $1\equiv 0\pmod 2$，故 x 奇，y 偶时方程无解.

(3) 如果 x 为偶，y 为奇

给出 $0\equiv 1\pmod 2$，此时原方程也无解.

(4) 如果 x 为偶，y 为偶

i) $x=2$ 时，$(x+1)^{y}=x^{y+1}+1$ 给出 $3^{y}=2^{y+1}+1$. 设 $y=2y_1$，可得

$$(3^{y_1}+1)(3^{y_1}+1)=2^{2y_1+1}$$

由 $(3^{y_1}+1,3^{y_1}-1)=2$ 得 $3^{y_1}-1=2$，$y_1=1$，$y=2$，$x=2$.

故 $x=2$，$y=2$ 是原方程的一组解，也就是说，$x=2$ 时原方程只有一组正整数解 $x=y=2$.

ii) $x>2$，$y>2$ 时，由 $(x+1)^{y}=x^{y+1}+1$ 有

$$x^{y}+C_{y}^{1}x^{y-1}+\cdots+C_{y}^{2}x^{2}+C_{y}^{1}x=x^{y+1}$$

因此 $x\mid C_{y}^{1}$，即 $x\mid y$. 设 $y=mx$，$x=2^{t}x_1$，$t\geqslant 1$，$2\nmid x_1$；$y=2^{t}mx_1$. 把 $y=2^{t}mx_1$ 代人 $(x+1)^{y}=x^{y+1}+1$，得

$$(2^{t}x_1+1)^{2^{t}mx_1}=(2^{t}x_1)^{2^{t}mx_1}+1$$

$$((2^{t}x_1+1)^{2^{t-1}mx_1})^{2}-1=2^{2^{t}mx_1+t}\cdot x_1^{2^{t}mx_1+1}$$

又因为

$$((2^{t}x_1+1)^{2^{t-1}mx_1}+1 \qquad (2^{t}x_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1)=2$$

所以

$$\begin{cases}(2^{t}x_1+1)^{2^{t-1}mx_1}+1=2^{2^{t}mx_1+t-1}\\(2^{t}x_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1=2b^{2^{t}mx_1+1}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}(2^{t}x_1+1)^{2^{t-1}mx_1}+1=2b^{2^{t}mx_1+1}\\(2^{t}x_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1=2^{2^{t}mx_1+t-1}a^{2^{t}mx_1}+1\end{cases}$$

其中 $x_1=ab$，$(a,b)=1$，如果式(22)成立，由

$$(2^{t}x_1+1)^{2^{t-1}mx_1}-1=2b^{2^{t}mx_1+1}$$

有 $2^t x_1 \mid 2b^{2^t m x_1+1}$，显然 $t=1$，否则 $2 \mid b, 2 \mid x_1$，此与 $2 \nmid x_1$ 相矛盾，而 $t=1$ 时 $x_1 \mid b^{2 m x_1+1}$，由 $x_1 = ab, (a,b)=1$ 有 $x_1 = b, a = 1$，从而式(22)给出

$$2^{2mx_1-1} - x_1^{2mx_1+1} = 1$$

但 $x = 2x_1 > 2, x_1 > 1$，故此不可能，如果式(23)成立

$$(2^t x_1 + 1)^{2^{t-1} m x_1} - 1 = 2^{2^t m x_1 + t - 1} a^{2^t m x_1 + 1}$$

给出

$$2^t x_1 \mid 2^{2^t m x_1 + t - 1} a^{2^t m x_1 + 1}$$

$$x_1 \mid a^{2^t m x_1 + 1}$$

因此，$x_1 = a, b = 1$，此时式(23)中的

$$(2^t x_1 + 1)^{2^{t-1} m x_1 + 1} = 2b^{2^t m x_1 + 1}$$

变为

$$(2^t x_1 + 1)^{2^{t-1} m x_1} = 1$$

此也不可能.

§4 几个集训队试题

我们先证明一个有用的引理：

引理 $\left(a-b, \frac{a^n - b^n}{a-b}\right) = (a-b, nb^n)$. 其中 a, b 是两个互异的整数.

试题 10 求证：在 $p \mid x$ 时，方程

$$x^2 - 1 = y^p \tag{24}$$

无正整数解，这里 $p > 3$ 是素数.

证明 仍用反证法证明，假设有解，将导致矛盾. 分解式(24)为

$$(x+1)(x-1) = y^p \tag{25}$$

当 x 是偶数时，$(x+1, x-1) = 1$，式(25)化成

$$x + 1 = t_1^p \qquad x - 1 = t_2^p$$

其中，$y = t_1 t_2$，t_1, t_2 是正整数.

从而，$t_1^p - t_2^p = 2$，这显然是不可能的，故此时无解，所以 x 必须是奇数. 此时，y 是偶数，并且 $(x+1, x-1) = 2$，再结合(25)式，将有两种情况出现：

①$x + 1 = 2a^p, x - 1 = 2^{p-1} b^p$ 或 ②$x + 1 = 2^{p-1} b^p, x - 1 = 2a^p$.

这里 $y = 2ab, (a, b) = 1$.

在①时，两式相减

$$a^p = 2^{p-2}b^p + 1 \tag{26}$$

也即$(2b)^p + 4 = 4a^p$.配方后得到

$$(a^p - 2)^2 + (2b)^p = (a^2)^p$$

也即
$$(a^p - 2)^2 = (a^2 - 2b)\left[\frac{(a^2)^p - (2b)^p}{a^2 - 2b}\right]$$

由于
$$\left(a^2 - 2b, \frac{(a^2)^p - (2b)^p}{a^2 - 2b}\right) = 1 \text{ 或 } p$$

但从条件 $p \mid x$ 知,$p \mid \frac{x-3}{2} = a^p - 2$,故

$$\left(a^2 - 2b, \frac{(a^2)^p - (2b)^p}{a^2 - 2b}\right) = 1 \tag{27}$$

再由式(27),即可知,存在正整数 c,使得

$$a^2 - 2b = c^2 \tag{28}$$

从式(27)可以看出,a 是奇数,从而 c 也是奇数,于是易知 a、b、c 两两互质.

此时,将式(28)化成

$$a^4 - 2a^2b = (ac)^2$$

再配方后便可得到

$$(a^2 - b)^2 = b^2 + (ac)^2 \tag{29}$$

由于$(b, ac) = 1$,从而 $b, ac, a^2 - b$ 是方程$x^2 + y^2 = z^2$的一组本原解,注意到 ac 是奇数,则方程(29)的解为

$$ac = s^2 - t^2 \quad b = 2st \quad a^2 - b = s^2 + t^2$$

从而

$$a^2 = (a^2 - b) + b = s^2 + t^2 + 2st = (s + t)^2$$

即
$$a = s + t$$

于是 $b = 2st = st + st > s + t = a$,但由式(26)明显地可以看出 $a > b$,这样,我们就得到了矛盾.

用同样的方法,在 ② 的情况下可得到类似的矛盾.所以假设不成立,命题得证.

试题 11 求证:方程

$$(x + 1)^p - x^q = 1 \qquad x, p, q \geqslant 2 \tag{30}$$

仅有一组正整数解 $x = 2, p = 2, q = 3$.

证明 在式(30)两边,mod $(x + 1)$,可得 $-(-1)^q \equiv 1(\bmod (x + 1))$.从而 q 是奇数,于是式(30)可以化成

$$(x + 1)^{p-1} = x^{q-1} - x^{q-2} + \cdots + 1 \tag{31}$$

在(31)中再$(\bmod (x + 1))$,得$0 \equiv q(\bmod (x + 1))$,也即是 $x + 1 \mid q$,从而 $x + 1$ 是奇数,x 是偶数.再在(30)的另一种变形

$$(x+1)^{p-1}=x^{q-1}-x^{q-2}+\cdots+1 \tag{32}$$

两边$(\bmod x)$，便知 $p\equiv 0(\bmod x)$，那么 $x\mid p$，从而 p 是偶数.

设 $x=2^k\cdot t, k\in \mathbf{N}, t$ 是奇数，$p=2s$，将式(30)化成

$$[(x+1)^s-1][(x+1)^s+1]=(2^k\cdot t)^q$$

明显地，$((x+1)^s-1,(x+1)^s+1)=2$，那么将出现两种可能：

①$(x+1)^s-1=2a^q,(x+1)^s+1=2^{kq-1}b^q$.

②$(x+1)^s-1=2^{kq-1}b^q,(x+1)^s+1=2a^q$.

其中 a,b 是两个互素的奇数，其积为 t.

在①时，由第一式即知 $x\mid 2a^q$，也即 $2^k\cdot ab\mid 2a^q$，于是，$k=1,b=1$.

此时，将两式相减即得

$$a^q+1=2^{q-2}$$

要使上式成立，只有 $a=1$，从而 $q=3$. 此时仅有解 $x=2,p=2,q=3$.

在②时，由第二式可知

$$2^{ks-1}(ab)^s+C_s^1 2^{k(s-1)-1}(ab)^{s-1}+\cdots+C_s^{s-1}2^{k-1}ab+1=a^q$$

从而 $a\mid 1$，于是 $a=1$，进而$(x+1)^s=1$，这显然是不可能的，此时无解.

综上所述，原命题得证.

试题 12　求方程 $x^r-1=p^n$ 的满足下述两条件的所有正整数组解(x,r,p,n)：(1)p 是一个素数；(2)$r\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 2$.

(1994 年国家集训队测验题)

解法 1　分两种情况讨论：

i) 当 $x=2$ 时，由于 $r\geqslant 2$，那么 2^r-1 必是奇数，从而，利用

$$2^r-1=p^n \tag{33}$$

可以知道，p 必为奇数. 再考虑 n，如果 n 为偶数，由于

$$p=2k+1\quad(k\in \mathbf{N})$$

记

$$n=2l\quad(l\in \mathbf{N})$$

$$p^n+1=(2k+1)^{2l}+1=(4k^2+4k+1)^l+1\equiv 2(\bmod 4) \tag{34}$$

于是，$p^n+1\neq 2^r$，从而，n 必为奇数，$n-1$ 为偶数，由于

$$1-p+p^2-p^3+p^4-p^5+\cdots+p^{n-3}-p^{n-2}+p^{n-1}=\frac{1-p^{n-1}(-p)}{1-(-p)}=\frac{1+p^n}{1+p} \tag{35}$$

那么

$$2^r=p^n+1=(1+p)(1-p+p^2-p^3+\cdots+p^{n-3}-p^{n-2}+p^{n-1}) \tag{36}$$

p 是奇素数，则 $1+p\geqslant 4$. 由上式，有

$$1+p=2^t\qquad t\in \mathbf{N}, t\geqslant 2 \tag{37}$$

即 $p=2^t-1$，于是，再利用 $n=2s+1(s\in \mathbf{N})$，有

$$p^n+1=(2^t-1)^{2s+1}+1=$$
$$(2^t)^{2s+1}-C_{2s+1}^{1}(2^t)^{2s}+\cdots-C_{2s+1}^{2s-1}(2^t)^2+C_{2s+1}^{2s}2^t=$$
$$2^{2t}m+(2s+1)2^t(m\text{ 是整数})\tag{38}$$

由式(38)可以知道，p^n+1 能被 2^t 整除，但不能整除 2^{t+1}，于是，从式(37)第一个等式可以知道，必定有

$$2^r=p^n+1=2^t\tag{39}$$

又由于 $n\geqslant 8$，式(37)与式(39)是一对矛盾．这表明当 $x=2$ 时，原方程没有满足题目条件的解．

ii) 当 $x\geqslant 3$ 时，利用

$$p^n=x^r-1=(x-1)(x^{r-1}+x^{r-2}+\cdots+x+1)\tag{40}$$

可以知道，$x-1$ 是 p 的某个幂次，再考虑到 $x-1\geqslant 2$，那么，必定有

$$x-1=p^m\qquad m\in\mathbf{N}\tag{41}$$

由式(41)可以推出

$$x\equiv 1\pmod p\tag{42}$$

由式(40)，又可以知道 $x^{r-1}+x^{r-2}+\cdots+x+1$ 也是 p 的某个幂次．而由式(42)

$$x^{r-1}+x^{r-2}+\cdots+x+1\equiv\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{r\text{个}}\pmod p=r\pmod p\tag{43}$$

于是 r 必是 p 的倍数．

如果 $p=2$，那么 r 必是偶数．记 $r=2r_1(r_1\in\mathbf{N})$．由题目中方程，有

$$2^n=x^r-1=(x^{r_1}-1)(x^{r_1}+1)\tag{44}$$

那么，$x^{r_1}-1$ 及 $x^{r_1}+1$ 都是 2 的幂次，而 $(x^{r_1}+1)-(x^{r_1}-1)=2$，则必定有 $x^{r_1}-1=2$．(因为如果 $x^{r_1}-1=2^\alpha$，这里正整数 $\alpha\geqslant 2$，那么，一方面，$x^{r_1}+1$ 也应是 2 的幂次．另一方面，$x^{r_1}+1>x^{r_1}-1$，因此，必有 $x^{r_1}+1=2^\beta$，这里正整数 $\beta\geqslant\alpha+1$，从而，可以得到

$$(x^{r_1}+1)-(x^{r_1}-1)=2^\beta-2^\alpha=2^\alpha(2^{\beta-\alpha}-1)$$

上式右端不可能等于 2．矛盾．) $x^{r_1}=3$，又 $x\geqslant 3$．那么，必有 $x=3,r_1=1,r=2,2^n=3^2-1=8,n=3$．这样，我们得到一组满足题目条件的解

$$x=3\qquad r=2\qquad p=2\qquad n=3\tag{45}$$

如果 $p\geqslant 3$，由式(41)有

$$x^r-1=(p^m+1)^r=rp^m+\sum_{i=2}^{r}C_r^i(p^m)^i\tag{46}$$

考虑上式右端 $\sum$ 中每一项 $C_r^i(p^m)^i(2\leqslant i\leqslant r)$，明显地

$$C_r^i(p^m)^i=\frac{r!}{i!(r-i)!}(p^m)^i=\frac{(r-1)!}{(i-1)!(r-i)!}\frac{r}{i}(p^m)i=C_{r-1}^{i-1}rp^m\frac{(p^m)^{i-1}}{i}\tag{47}$$

下面证明：对于任意正整数 $i \geqslant 2$

$$i < (p^m)^{i-1} \tag{48}$$

当 $i = 2$ 时，显然有

$$2 < p^m \tag{49}$$

当 $i = k \geqslant 2$ 时，有

$$k < (p^m)^{k-1} \tag{50}$$

当 $i = k + 1$ 时，利用式(48) 和式(49)，有

$$k + 1 < 2k < 2(p^m)^{k-1} < (p^m)^k \tag{51}$$

从而，式(48) 成立．因此，i 的素因子分解式中 p 的幂次小于 $m(i-1)$．又 C_{r-1}^{i-1} 是正整数，所以，$C_r^i(p^m)^i$ 的素因子分解式中所含 p 的幂次高于 rp^m 中所含 p 的幂次 α，从而 $x^r - 1$ 能被 p^α 整除，但不能被 $p^{\alpha+1}$ 整除，由式(15) 和题目中方程，有

$$p^\alpha < x^r - 1 = p^n \tag{52}$$

因此 $n > \alpha$，矛盾．因此，满足题目的解只有式(45) 一组解．

解法 2　分情况讨论：

i) 当 $x = 2$ 时，易见 p 为奇数．

若 n 为偶数，则 $p^n + 1 \equiv 2 \pmod 4$，从而 $r = 1$，此时无解．

若 n 为奇数，则 $2^r = p^n + 1 = (p+1)(p^{n-1} - p^{n-2} + \cdots - p + 1)$．故可设 $p + 1 = 2^t (t \in \mathbf{N})$，于是

$$p^n + 1 = (2^t - 1)^n + 1 = \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i(2^t)^i + C_n^1 \cdot 2^t = 2^{2t} \cdot M + 2^t \cdot n$$

所以 $p^n + 1$ 能被 2^t 整除，但不能被 2^{t+1} 整除，故此时亦无解．

ii) 当 $x \geqslant 3$ 时，由 $x^r - 1 = p^n$ 得 $(x-1) \mid p^n$，存在正整数 $t < m$，及 $t + m = n$，使

$$x - 1 = p^t \tag{53}$$

$$x^{r-1} + x^{r-2} + \cdots + 1 = p^m \tag{54}$$

利用式(53)，在式(54) 两边取 $\bmod p^t$ 可知 $r \equiv 0 \pmod{p^t}$，从而 $p \mid r$．于是，由 $x^r - 1 = p^n$．也即是存在正整数 s，使得

$$(p^t + 1)^p - 1 = p^s$$

利用二项式展开，将上式变形后得

$$p^{t(p-1)} + \sum_{j=2}^{p-1}\frac{C_p^j}{p}(p^t)^{j-1} + 1 = p^{s-t-1} \tag{55}$$

如果 $t(p-1) - 1 > 0$，那么式(55) 左边 $\equiv 1 \pmod p$，但 p 整除式(55) 右边，这是矛盾的，故只有 $t(p-1) - 1 = 0$，从而 $t = 1, p = 2$，也即 $x = 3, p = 2$．于是我们只要求满足

$$3^r - 1 = 2^n \tag{56}$$

的正整数解(r, n).

由 $n \geqslant 2$,利用式(56)可知 $3^r \equiv 1 \pmod 4$,从而 r 是偶数,设 $r = 2s$,将式(56)化为

$$(3^s - 1) \cdot (3^s + 1) = 2^n$$

从而 $$3^s - 1 = 2^a \qquad 3^s + 1 = 2^b$$

两式相减得 $$2^{b-1} - 2^{a-1} = 1$$

只有 $a = 1, b = 2$,从而 $n = 3, r = 2$.

综上所述,原方程的解为$(x, p, r, n) = (3,2,2,3)$.

§5 关于卡塔兰猜想的一些进展

卡塔兰猜想表述为:

问题1 方程 $x^m - y^n = 1, x, y, m, n \in \mathbf{N}$ (57)

$m > 1, n > 1$,仅有解$(x, y, m, n) = (3,2,2,3)$,对这个猜想有许多优秀的数论专家进行了研究,如 Lebesgue, Nagell, Selberg, Obath, Cassels, Hyyro, Hampel, Schinzel,柯召 · Chein, Rotkiewicz,但他们所使用的方法仍局限于初等方法,这些工作可见 Ribenboim 的专著《Catalan's Conjecture》(Boston, MA: Academic Press Inc, 1994)在早期的工作中,Lebesgue 和柯召分别证明了:方程(57)没有适合 $2 \mid n$ 的解(x, y, m, n);该方程仅有解$(x, y, m, n) = (3,2,2,3)$.

根据上述结果,我们可以把卡塔兰猜想中尚未解决的部分剥离出来,表述为:

问题2 方程 $x^p - y^q = 1, x, y \in \mathbf{N}, p, q \in p^*$ (58)

其中 p^* 是全体素数及其方幂的集合,无解(x, y, p, q).

对于方程(58),Cassels 运用初等数论方法进行了深入的讨论,他证明了:方程(58)的解(x, y, p, q)都满足 $q \mid x, p \mid y$.并且他提出了如下较弱的猜想:

问题3 方程(58)仅有有限多组解(x, y, p, q).

1976年,Tijdeman 运用盖尔芳特 - 贝克方法解决了上述猜想,他证明了:

定理 方程(58)仅存在有限多组解(x, y, p, q),而且这些解都满足 $\max(p, q) < C_1$,以及 $x^p < C_2$,关于上述定理中的常数,1976年 Tangevin 具体算出:$C_1 < e^{241}$ 以及 $C_2 < \exp\exp\exp 730$. 1992年,Mighotte 进一步证明了,方程(58)的解(x, y, p, q)都满足 $p < 1.21 \cdot 10^{26}$ 以及 $q < 1.31 \cdot 10^{18}$;特别地,当 $q \equiv 3 \pmod 4$ 时,必有 $p < 2.7 \cdot 10^{24}$ 以及 $q < 1.23 \cdot 10^{18}$.

另外,运用初等数论方法和代数数论方法可以得到方程(58)解的下界,在这方面,Inkeri,Glass,Meroak,Okada和Stenier,Mignotte,Schwarz等人分别对某些较小的奇素数 p,q 证明了该方程无解.综合上述结果可知:方程(58)的解 (x,y,p,q) 都满足 $\min(p,q)\geqslant 9$).1996年,Mignotte和Royp宣布可将上述下界都改为 $\min(p,q)>10^6$,根据有关 p,q 的下界,Aultonen和Inkeri运用初等方法证明了:方程(58)的解 (x,y,p,q) 都满足 $x^p>10^{500}$,此外,Evertse运用丢番图逼近方法讨论了方程(57)的解数,他证明了:对于给定的正整数 m,n,该方程至多有 $(m,n)^{\min(m,n)}$ 组解.

设 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 是适合 $p_1<p_2<\cdots<p_r$ 的素数,$\Phi=\{\pm p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_r^{t_r}\mid t_1,t_2,\cdots,t_r$ 是非负整数$\}$,1977年,Vun der poorten推广了Tijdeman的结论,他证明了:方程

$$x^m-y^n=z^l,x,y,z,m,n\in\mathbf{N},m>1,n>1,mn>4,l=\mathrm{l.c.m}(m,n) \tag{Ⅰ}$$

仅有有限多组解 (x,y,z,m,n,l) 适合 $z\in S$,而且这些解都满足 $\max(m,n)<C_8(p_r)$ 以及 $x^m<C_9(p_r)$,由于方程(Ⅰ)中的 l 是 m 与 u 的最小公倍数,所以该方程可写成

$$\left(\frac{x}{u}\right)^m-\left(\frac{y}{v}\right)^n=1\qquad x,y,u,v,m,n\in\mathbf{N}$$

$$\mathrm{g.c.d}(x,u)=\mathrm{g.c.d}(y,v)=1\qquad m>1,n>1,mn>4 \tag{Ⅱ}$$

对此,1986年Shorey和Tijdeman运用同样的方法证明了:该方程仅存在有限多组解 (x,y,u,v,m,n) 可使 x,y,u,v 中至少有一数属于 S,而且这些解都是可以有效计算的.另外,Tijdeman还运用丢番图逼近方法,在 u,v,m,n 给定的条件下,给出了方程(Ⅱ)的解的上界:$x<C_1^*u^{1+C_2^*(\lg t)^4/\sqrt{t}}$,$y<C_1^*v^{1+C_2^*(\lg t)^4/\sqrt{t}}$,其中 $t=\max(m,u)$.

大约在上世纪中期,卡塔兰猜想开始吸引了Diophantine分析领域的专家们的兴趣.他们开始发现,对固定的指数 p 和 q.方程 $x^p-y^q=1(xz\neq 0,p,q$ 是不同的奇素数)的解 (x,y) 的个数至多是有限的.这是1929年C.L.Siegel发表的关于曲线上整点的一个一般定理的推论.方程(Ⅱ)可以写成类似方程(56)的形式

$$x^m-y^n=1\quad x,y\in\mathbf{Q},x>0,y>0,m,n\in\mathbf{N},m>1,n>1,mn>4 \tag{Ⅲ}$$

对此,1986年Shorey和Tijdeman曾提出如下猜想:

方程(Ⅲ)仅存在有限多组解 (x,y,m,n),而且这些解都是可以有效计算的.

1994 年以上有关该猜想的全部历史被收录在 Paulo Ribenboim 的专著中. 2002 年卡塔兰猜想被彻底解决了,是由瑞士数学家 Preda Mihăilesku 用代数数论证明的. 在他的证明中,有关分圆域的一个深刻定理起了决定性的作用,但意想不到的是他的证明没有多少计算. 并且他本人并不为这一领域的专家所熟悉.

Mihăilesku, 1955 年出生于罗马尼亚. 在苏黎世受过数学教育. 他曾涉足机械工业和金融工程领域,现在,在德国 Paderborn 大学工作,像比勃巴赫猜想、范德瓦尔登猜想的获证一样,爆了一个冷门. 由不知名的专家解决了,而不是大家都看好的热门人物.

在证明中,Wieferich 起了意想不到的作用. 1909 年,Wieferich 为证明 Fermat 大定理而研究了一对古怪的同余方程 $p^{q-1}\equiv 1 \pmod{q^2}$, $q^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2}$ 满足这两个同余式的一对奇素数称为 Wieferich 对. Mihăilesku 的工作类似于库默尔理论之于 Fermat 大定理.

Mathematics is the Queen of the Sciences, and Arithmetic the Queen of Mathematics.

——高斯

从一道 Putnam 赛题到闵可夫斯基定理

刘培杰　杨贵芳①

§0　引言

1979 年 12 月 1 日第四十届 The william Lowell Putnam Mathematical Competition 试题 B－5.

试题 1　设 C 是平面上的闭凸集，C 除了包含(0,0)外不包含其他坐标为整数的点；又设 C 分布在四个象限中的面积相等，试证 C 之面积 $A(C)\leqslant 4$.

试题 2　设 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$，式中 a,b,c 是实数，且 $D=ac-b^2>0$，证明：存在不同时为零的整数 u,v，使 $|f(u,v)|\leqslant(\frac{4D}{3})^{\frac{1}{2}}$.

这是苏联大学生 1977 年数学奥林匹克的一个试题.

这两个试题都是"数的几何"中闵可夫斯基定理的特例."数的几何"是闵可夫斯基开创的一个独立的数论分支.

闵科夫斯基(Minkowski, Hermann, 1864－6－22—1909－1－12)德国数学家.生于俄国的阿列克萨塔斯(Alexotas，今在俄罗斯考纳斯(Kayhac))，卒于格丁根.8 岁时随全家迁回德国，曾在柏林大学学习.后人柯尼斯堡(Königsberg)大学，在那里与数学家希尔伯特结为挚友.1885 年获数学博士学位.经过短期服役后，相继在波恩、柯尼斯堡(1895)、苏黎世(1896)和格丁根(1903)等大学任数学教授.在格丁根时与希尔伯特一起领导过数学讨论班.1881 年，巴黎科学院悬赏征求下述问题的解：将一个数表成五个平方数的和.年仅 17 岁的闵科夫斯基提交出大大超过原问题结果的论文，给出了更一般的答案.终于在 1883 年与当时英国著名的数学家亨利·史密斯同获这项数学大奖.从此，闵科夫斯基与数论结下不解之缘，在代数数论，特别是有理系数的二次型理论方面做出了突出

① 杨贵芳(女)，任职于哈尔滨师范大学.

贡献.他开创了用几何方法去研究数论,其目的是用几何图形来表达有理数的代数猜想,结果常常使证明变得更加简洁.1896年他出版了有关的系统论著《数的几何》(Geometrieder Zahlen),将数论中型的理论提升到一个新的高度.闵科夫斯基应用几何方法对连分数理论和 n 维空间的凸性理论作了探索,他还由对应几何原理引进空间距离的新定义,为20世纪20年代建立赋范空间铺平了道路.闵科夫斯基的另一贡献是与著名物理学家爱因斯坦同时奠定了相对论的基础.他曾在1908年的科学年会上提出若干有关电动力学的新结果.他的演讲以《空间和时间》(Raum and Zeit,1907)为主题,引进了极为简单的数学空一时观.根据这种思想,某些现象可以用简单的数学方式表出,使三维几何学变成了四维物理学.他的工作为相对论提供了数学工具.1909年,闵科夫斯基因急性阑尾炎引起的并发症早逝于格丁根.

§1 数的几何

前伦敦数学会主席,国际数学联副主席卡斯尔斯(Cassels, John William Scott)在他1959年写的《数的几何引论》(An Introduction to the Geometry of Numbers)的序言中写道:

数的几何中一个基本并典型的问题如下:

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是实变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个实值函数,适当地选择整数 $u_1,\cdots,u_n$ 能使 $|f(u_1,\cdots,u_n)|$ 小到什么程度?可能有一个平凡解 $f(0,\cdots,0)=0$,例如当 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个齐次型,此时要排除 $u_1=u_2=\cdots=u_n=0$ 的情形(齐次问题).

一般地,估计要求不仅对个别函数而是对整个一类函数都有效.一个典型的结果如下:如果

$$f(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 \tag{1}$$

是一个正定二次型,则存在不全为零的整数 u_1,u_2 使得

$$f(u_1,u_2)\leqslant(4D/3)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

其中

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

是此二次型的判别式.由于任何一对不全为零的整数 u_1,u_2 都有 $u_1^2+u_1u_2+u_2^2\geqslant 1$,此处 $D=\frac{3}{4}$.因此,如果结果正确,则它是最佳的.

当然正定二元二次型是一个特别简单的情形,上面的结果在数的几何产生

前就已经知道.而且我们还可以给出一个实质上不依赖数的几何的证明.但是对正定二元二次型的论证展示了一些特别简单的方法,我们将继续用它作为例子.

上述结果可以用图像来表达.一个形为

$$f(x_1,x_2)\leqslant\kappa$$

的不等式表示(x_1,x_2)平面上的一个椭圆形有界区域$\mathscr{R}$.如果$f(x_1,x_2)$由式(1)给出且κ是一些正数.那么只要$\kappa\geqslant(\frac{4}{3}D)^{\frac{1}{2}}$,前面的结果表明$\mathscr{R}$就包含一个原点以外的整数坐标点$(u_1,u_2)$.

从闵可夫斯基基本定理立即可得类似的结果.但没有如此精确.在2维的情形下此结果可表述为,一个区域$\mathscr{R}$只要满足以下三个条件,总是包含一个原点以外的整数点(u_1,u_2):

i)$\mathscr{R}$关于原点对称,即若(x_1,x_2)在$\mathscr{R}$内,则$(-x_1,-x_2)$也在$\mathscr{R}$内.

ii)$\mathscr{R}$是凸的,即如果(x_1,x_2)与(y_1,y_2)是$\mathscr{R}$的二个点,则联接它们的全部线段$\{\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,\lambda x_2+(1-\lambda)y_2\}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$也都在$\mathscr{R}$内.

iii)$\mathscr{R}$的面积大于4.

任何椭圆$f(x_1,x_2)\leqslant\kappa$满足i)和ii),因为它的面积是

$$\frac{\kappa\pi}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\kappa\pi}{D^{\frac{1}{2}}}$$

只要$\kappa\pi>4D^{\frac{1}{2}}$它也满足iii).这样我们有一个与式(2)相类似的结果,只要常数$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$被任何比$\frac{4}{\pi}$大的数所代替.

简单地考虑闵可夫斯基定理证明背后的基本想法是有益的,因为在后面的正式证明中,由于需要得出尽可能广泛适用的强有力的定理,证明思想反而变得模糊了.闵可夫斯基的工作是用点$(\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{2}x_2)$构成的区域$\mathscr{S}=\frac{1}{2}\mathscr{R}$代替$\mathscr{R}$.其中$(x_1,x_2)$在$\mathscr{R}$内.这样$\mathscr{S}$关于原点对称并且是凸的,它的面积是$\mathscr{R}$的$\frac{1}{4}$因而大于1.更一般地,闵可夫斯基考虑相似于$\mathscr{S}$但中心在整点$(u_1,u_2)$的全体相似的$\mathscr{S}(u_1,u_2)$.

首先我们指出,如果$\mathscr{S}$和$\mathscr{S}(u_1,u_2)$叠交①,则(u_1,u_2)在$\mathscr{R}$内.因为设重叠部分的一个点为(ξ_1,ξ_2),因(ξ_1,ξ_2)在$\mathscr{S}(u_1,u_2)$内,点$(\xi-u_1,\xi-u_2)$必须在$\mathscr{S}$内,由对称性点$(u_1-\xi_1,u_2-\xi_2)$在$\mathscr{S}$内,然后由于$\mathscr{S}$是凸的,

① 逆命题真是显然的.若(u_1,u_2)在$\mathscr{R}$中,$\left(\frac{1}{2}u_1,\frac{1}{2}u_2\right)$在$\mathscr{S}$和$\mathscr{S}(u_1,u_2)$中.

$(u_1-\xi_1, u_2-\xi_2)$ 与 (ξ_1, ξ_2) 的中点 $(\frac{1}{2}u_1, \frac{1}{2}u_2)$ 在 $\mathscr{S}$ 内，即 (u_1, u_2) 在 $\mathscr{R}$ 内，正如指出的那样. 显然 $\mathscr{S}(u_1, u_2)$ 与 $\mathscr{S}(u'_1, u'_2)$ 叠交当且仅当 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}(u_1-u'_1, u_2-u'_2)$ 叠交.

因此，为证明闵可夫斯基定理，只需证明若 $\mathscr{S}(u_1, u_2)$ 互不叠交，则它们每一个的面积不超过 1 就足够了. 略加思考就可确信这是必须如此的. 一个正式的证明在下文给出. 另一个或许更加直观的论证如下. 我们假定 $\mathscr{S}$ 完全包含在一个正方形 $|x_1| \leqslant X$，$|x_2| \leqslant X$ 内. 设 U 是一个大整数，有 $(2U+1)^2$ 个中心在 (u_1, u_2) 的区域 $\mathscr{S}(u_1, u_2)$ 适合 $|u_1| \leqslant U$，$|u_2| \leqslant U$，所有这些 $\mathscr{S}(u_1, u_2)$ 全都包含在面积为 $4(U+X)^2$ 的正方形 $|x_1| \leqslant U+X$，$|x_2| \leqslant U+X$ 内. 因为假定 $\mathscr{S}(u_1, u_2)$ 都不叠交，我们有 $(2U+1)^2 \leqslant 4(U+X)^2$. 此处 V 是 $\mathscr{S}$ 的，亦是每个 $\mathscr{S}(u_1, u_2)$ 的面积. 令 U 趋于无穷大，我们有 $V \leqslant 1$，即要证的结果.

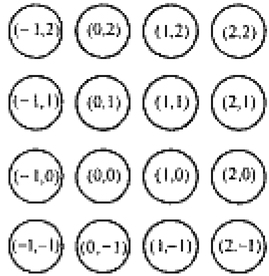


图 1

在正定二元二次型 $f(x_1, x_2)$ 的例子里，坐标系的一个变换导致另外的考虑. 我们可以用两个线性型的平方和来表示 $f(x_1, x_2)$，即

$$f(x_1, x_2) = X_1^2 + X_2^2 \tag{3}$$

其中

$$X_1 = \alpha x_1 + \beta x_1 \qquad X_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \tag{4}$$

并且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是常数，例如取

$$\alpha = a_{11}^{1/2} \qquad \beta = a_{11}^{-1/2} a_{12}$$

$$\gamma = 0 \qquad \delta = a_{11}^{-1/2} D^{1/2}$$

反之，若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是任意实数且 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$，$X_1, X_2$ 由式(4)给出，则 $X_1^2 + X_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ 是一个正定二次型. 此处

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha^2 + \gamma^2 \\ a_{12} &= \alpha\delta + \beta\delta \\ a_{22} &= \beta^2 + \delta^2 \end{aligned} \tag{5}$$

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \tag{6}$$

现在我们把 X_1, X_2 作为笛卡儿直角坐标系考虑. 由式(4)，对应于整数 x_1，x_2 的点 (X_1, X_2) 形成一个(二维)格 Λ. 记号 Λ 在向量中是点

$$(X_1, X_2) = u_1(\alpha, \gamma) + u_2(\beta, \delta) \tag{7}$$

的集合，其中 u_1, u_2 经过所有整数值.

现在我们必须更严密地考察格的性质. 因为我们仅将 Λ 考虑为一个点的集合，它能被多于一个的基所表示. 例如 $(\alpha-\beta, \gamma-\delta)$，$(-\beta, -\delta)$ 是 Λ 的另一个基. Λ 的一个给定的基 (α, β)，(γ, δ) 确定平面上二族等距离平行直线的一个划分，第一族内能表示为形(2)，其中 u_2 是整数而 u_1 仅是实数的那些点 (X_1, X_2) 组成，第二族直线由 u_1 与 u_2 角色互换而得. 平面以此方式被划分成为平行四边形，那些顶点恰是 Λ 的点. 自然，划分平行四边形依赖于基的选择，但我们指出每个平行四边形的面积为 $|\alpha\delta-\beta\gamma|$ 是独立于选定的基的. 只需证明，在一个大正方形

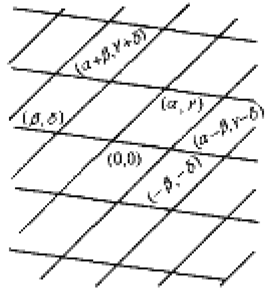


图 2

$$\mathscr{S}(X): |X_1| \leqslant X, |X_2| \leqslant X$$

内，Λ 的点数 $N(X)$ 满足

$$\frac{N(X)}{4X^2} \to \frac{1}{|\alpha\delta-\beta\gamma|} \qquad X \to \infty$$

我们就能做到这一点. 沿着上面概述的闵可夫斯基凸体定理证明的方向，我们可以证明，Λ 在 $\mathscr{S}(X)$ 内的点数约等于包含在 $\mathscr{S}(X)$ 内的平行四边形的个数，也约等于 $\mathscr{S}(X)$ 的面积除以单个平行四边形的面积 $|\alpha\delta-\beta\gamma|$. 严格的正数

$$d(\Lambda) = |\alpha\delta-\beta\gamma| \tag{8}$$

被称为格 Λ 的行列式. 正如我们所看到的，它独立于基的选择.

借助新概念我们知道，说 $f(x_1, x_2) \leqslant (4D/3)^{\frac{1}{2}}$ 总是存在一个整数解相当于说每个格 Λ 有一个除原点以外的点在下式表示的圆内

$$X_1^2 + X_2^2 \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} d(\Lambda) \tag{9}$$

在齐性的场合这又相当于说开圆域

$$\mathscr{D}: X_1^2 + X_2^2 < 1 \tag{10}$$

含有适合 $d(\Lambda) < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的每个格 Λ 的一个点，并且在式(2)中实际上必定存在使等号成立的二次型，这相当于存在一个行列式为 $d(\Lambda_c) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的格 Λ_c 其中没有 $\mathscr{D}$ 的点. 这样我们关于所有正定二元二次型的问题等价于一个关于区

域 $\mathscr{D}$ 和所有格的问题. 相类似, 考虑点在 $|X_1X_2|<1$ 内的格为我们提供了关于不定二元二次最小值

$$\inf_{\substack{\text{整数 } u_1,u_2\\ \text{不全为0}}} |f(u_1,u_2)|$$

的情况等.

这些思考引出以下定义. 称一个格对于平面 (X_1,X_2) 内一个区域(点集) $\mathscr{R}$ 是可容许的, 如果它不含有 $\mathscr{R}$ 的原点以外的点, 若原点在 $\mathscr{R}$ 中, 我们也可以说 Λ 是 $\mathscr{R}$ 可容许的. 在所有 $\mathscr{R}$ 可容许格中, $d(\Lambda)$ 的下界 $\Delta(\mathscr{R})$ 是 $\mathscr{R}$ 的格常量; 如果不存在 $\mathscr{R}$ 可容许格, 我们置 $\Delta(\mathscr{R})=\infty$. 于是任何有 $d(\Lambda)<\Delta(\mathscr{R})$ 的格 Λ 必定包含 $\mathscr{R}$ 的一个原点以外的点. 一个 $\mathscr{R}$ 可容许的格 Λ 有 $d(\Lambda)=\Delta(\mathscr{R})$, 则称其为临界(对于 $\mathscr{R}$) 的; 当然一般情形下, 临界格不一定存在. 临界格的重要性已经为闵可夫斯基所认识. 如果 Λ_c 对 $\mathscr{R}$ 是临界的, Λ 由 Λ_c 经微小变化而得(即对一对基点作小改变), 则要不是 Λ 有一个 $\mathscr{R}$ 中除原点以外的点, 就是 $d(\Lambda)\geq d(\Lambda_c)$(或二者兼具).

作为一个例子, 让我们再考虑圆盘形开域

$$\mathscr{D}: X_1^2+X_2^2<1$$

假定 Λ_c 是 $\mathscr{D}$ 的一个临界格. 如果它存在, 我们简要证明必定有三对点 $\pm(A_1,A_2)$, $\pm(B_1,B_2)$, $\pm(C_1,C_2)$ 在 $\mathscr{D}$ 的边界 $X_1^2+X_2^2=1$ 上. 若 Λ_c 没有点在 $X_1^2+X_2^2=1$ 上, 由 Λ_c 向原点收缩我们能够得到一个行列式较小的 $\mathscr{D}$ 可容许的格, 即考虑点 (tx_1,tx_2) 的格 $\Lambda=t\Lambda_c$, $(X_1,X_2)\Lambda_c$ 而 $0<t<1$ 是固定的. 则 $d(\Lambda)=t^2d(\Lambda_c)<d(\Lambda_c)$ 且当 t 充分接近于 1 时显然 Λ 也是 $\mathscr{D}$ 可容许的. 因此, Λ_c 含有 $X_1^2+X_2^2=1$ 上的一对点, 经坐标系适当旋转以后, 我们可以假定这对点就是 $\pm(1,0)$. 如果 $X_1^2+X_2^2=1$ 上不存在 Λ_c 的其他的点. 由 Λ_c 向垂直于 Z_1 轴的方向收缩, 我们又能得到一个行列式较小的 $\mathscr{D}$ 可容许的格, 即点 (X_1+X_2) 的格 Λ, 其中 $(X_1,X_2)\Lambda_c$ 而 t 充分接近 1. 最后若 Λ_c 仅有两对点 $\pm(1,0)$, $\pm(B_1,B_2)$ 在边界上, 则不难看出它可以微小扭变, 使 $(1,0)$ 保持固定而 (B_1,B_2) 沿 $X_1^2+X_2^2=1$ 转向 X_1 轴(图 3). 可以验证, 这样做使得格的行列式减小(可证 $(1,0)$ 与 (B_1,B_2) 为 Λ_c 的一组基), 且对此微小的变形, 扭变后的格 Λ 仍是 $\mathscr{D}$ 可容许的, 因此一个临界格 Λ_c(如果它存在) 必定有三对点在 $X_1^2+X_2^2=1$ 上, 且容易验证, 仅有一个三对点在 $X_1^2+X_2^2=1$ 上, 其中的一对是 $\pm(1,0)$ 的格, 就以是 $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ 为基的格 Λ. 此格有在 $X_1^2+X_2^2=1$ 上的正六边形的顶点 $\pm(1,0)$, $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$, $\pm\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$, 但没有点在 $X_1^2+X_2^2<1$ 内. 这样我们

已证得 $\Delta(\mathscr{D}) = d(\Lambda') = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，只要 $\mathscr{D}$ 有一个临界格. 闵可夫斯基曾阐明相当广泛的一类区域 $\mathscr{R}$ 存在临界格，粗略地说，任何 $\mathscr{R}$ 可容许的格 Λ 都能逐渐收缩扭变直至成为临界的.

另一个一般类型的问题是典型的"非齐次问题"：设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是实变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的某个实值函数，要求找到一个具有以下性质的常数 κ：如果 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是任意实数，存在整数 $u_1,\cdots,u_n$ 使得

$$|f(\xi_1-u_1,\cdots,\xi_n-u_n)|\leqslant\kappa$$

这类问题的提出是很自然的，例如在代数数的理论中就是如此. 这里也有一个简单的几何图像. 为了简单起见，令 $n=2$，说 $\mathscr{R}$ 是二维欧几里得平面上适合

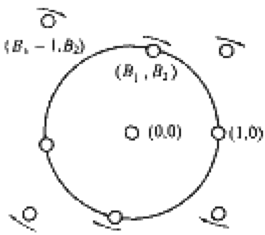


图 3

$$|f(x_1,x_2)|\leqslant\kappa$$

的点 (x_1,x_2) 的集合. $\mathscr{R}(u_1,u_2)$ 表示类似于 $\mathscr{R}$ 位移至 (u_1,u_2) 的区域，其中 u_1,u_2 是任何整数. 即 $\mathscr{R}(u_1,u_2)$ 是使

$$|f(x_1-u_1,x_2-u_2)|\leqslant\kappa$$

的点 (x_1,x_2) 的集合. 则非齐次问题显然是要选择 κ 使区域 $\mathscr{R}(u_1,u_2)$ 覆盖全部平面. 一般地讲，总希望对挑选的 κ，也影响到 $\mathscr{R}$，使它尽可能地小但仍具有这种覆盖的特性.

§2 Blichfeldt 引理

在 1973 年出版的《Mathematical Gams》的第四章中美国数学家享斯贝格(R. Honsberger)介绍了一个利用闵可夫斯基定理解决的趣味问题.

果园问题　有一个圆形的果园，圆心在原点，半径是 50 单位(图 4). 在果园的每个格子点处种一棵树(所有的树都被看做是具有同一半径的垂直竖立的圆柱体). 证明：如果树的半径超过 1/50 单位，那么从原点向任何方向看都不能看到果园以外的情景；但是，如果树的半径小于 $1/\sqrt{2\ 501}$ 单位，就有一个恰当的方向可以看到外面的情景.

问题的后一半是很容易的. 解决前一半则要靠 Minkowski 的一条有趣的定理. 为了证明这个定理，我们先建立一个结果，叫做 Blichfeldt 引理.

布利克弗尔特(Blichfeldt, Hans Frederick, 1873-1-9—1945-11-16) 丹麦一

美国数学家.生于丹麦伊拉尔(Iller),卒于美国加里福尼亚州帕洛阿尔托(Palo Alto).15岁时随全家移居美国,就学于斯坦福大学,后又到德国人莱比锡大学,在著名数学家李(Lie)指导下以论文《关于三维空间的一类变换群》(On a Certain Class of Groups of Transformation in Three - dimensional Space,1900)获得博士学位.利克弗尔特(Blichfeldt)专攻群论和数论,对丢番图逼近、线性齐次群的阶、数的几何理论、线性方程组的近似整数解,有限直射群及特征根等问题颇有研究.他的贡献随着李群的应用愈加显示出其重要性.布利克弗尔特是美国数学会的活跃人物,1912年曾当选为该学会副主席.著作有《有限直射群》(Finite Collineation Group)、《有限群理论及其应用》(Theory and Application of Finite Groups,合作)等.

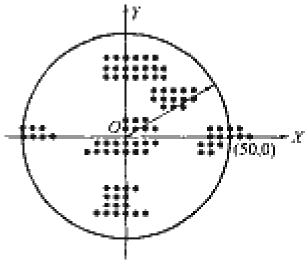


图4

Blichfeldt引理　假设有一个平面区域 R,其面积大于 n 单位,n 是一个正整数,那么不论 R 是在平面上什么位置,总是可以把它平移(即是没有旋转的滑动)到一个位置,至少要盖住 $n+1$ 个格子点.

例如,如果 R 的面积是 $8\frac{1}{4}$ 单位,它就可以平移到盖住至少9个格子点.

如果 a 和 b 是整数,方程为 $x=a$ 和 $y=b$ 的直线叫做"格子线",因为它们的交点是格子点.让我们沿着每条格子线把平面剪开,把它分成单位正方形,从而区域 R 也被剪成若干块.假设区域 R 是涂成红色的,而平面的其余部分则未上色.于是,有些单位正方形可能完全是红的,有些可能部分是红色,而另一些则完全未上色.

L·G·Schnirelman(俄国人,1905—1935)还证明了一条闭凸曲线上存在4个点,成为一个正方形的顶点.利用这个结果来证明:每一条周长小于4的凸曲线都可以安放在坐标平面上,使得它不含有任何格子点.

让我们把凡是带上一点红色的所有正方形不加转动地、一个叠一个地堆在某个远处的正方形 T 处.现在考虑底面 T 的任何一点 K.因为在正方形 T 上是一层一层堆起来的,所以每一层都有一个点盖住点 K:有时 K 出现在该层的红点下,有时在未上色的点下.在竖立堆在 K 的上方的点柱中,我们关心的是有多少个点是红的(图5).

我们要证明的是,底面 T 中必定有一点至少被 $n+1$ 个不同的层以红点盖住(注意,这里所说的 n 满足条件:R 的面积大于 n 个单位).为了证明这点,用反证法.假设竖立在 T 上任何一点处的那个点柱中,红点都不多于 n 个,即是

说,底面上有些点处的点柱可能恰好含有 n 个红点,有些可能含得少些,但没有一个点柱含有 n 个以上的红点.

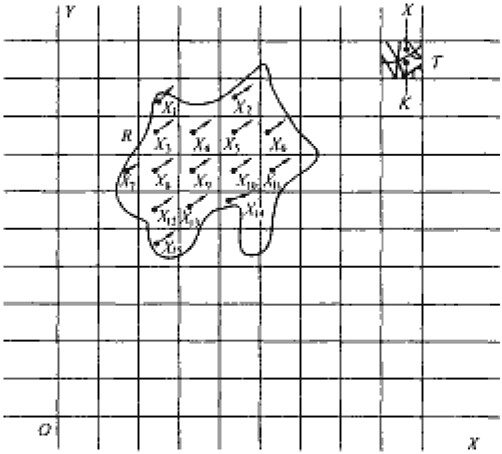


图 5

现在我们来计算那一堆正方形上红色颜料的总量.底面 T 的面积是单位正方形,即使竖立在 T 的每一点处的点柱都含有最大个数 n 个红点,那也只能有可以把这个正方形涂上 n 层的红色颜料(T 的各点处上方的 n 个红点可以把它涂上 n 层),所以这一堆正方形上至多只能有可以涂 n 个单位面积的颜料.但是,区域 R 却是全部出现在这堆正方形里,它的面积是大于 n 单位的,所以这一堆正方形上又必定有可以涂 n 个以上的单位面积的颜料.这是一个矛盾.因此,T 上必有一点 X,至少被红点盖住 $n+1$ 次.

现在拿一根针垂直扎穿点 X 上所有各层,这就在每一层上标出一个点,由于上述,这种点至少落在 $n+1$ 层的红色部分中.让我们把这些红点记为 X_1,X_2,$\cdots$,X_m,这里 m 至少是 $n+1$.最后,把所有的正方形移回到平面上原来的位置,重新拼成 R.

既然各点 X_i 在其正方形中都出现在同样的相对位置上,所以 R 的任何平移,如果使一个 X_i 移动到一个格子点,也将使任何其他的 X_i 移动到一个格子点.但是各 X_i 都是红点,因而是 R 的点,它们至少有 $n+1$ 个.因此,这样的平移就把 R 变到一个至少盖住 $n+1$ 个格子点的位置上(证毕).

Blichfeldt 引理在我们证明 Minkowski 定理时是很重要的.可是它不是直接出面的,我们不过是利用 $n=1$ 时的一个简单的推论.

推论 如果 R 是一个平面区域，其面积大于1，那么 R 必定有一对不同的点 A 和 B，其横标差与纵标差都是整数(点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的横标差是 $x_2 - x_1$，纵标差是 $y_2 - y_1$).

注意，这里并不要求 A 与 B 本身是格子点，并且无论 R 是否含有格子点，这个推论都成立.

由 Blichfeldt 引理知，可以把 R 平移到一个位置，使得它至少有 $n + 1 = 2$ 个点，例如 A 和 B，盖住格子点 A_1 和 B_1. 由于格子点的坐标都是整数，所以任何两个格子点的横标差和纵标差也都是整数. 可是，平移只改变直线的位置而不改变它的方向，所以也不会改变横标差和纵标差. 因此，A 和 B 平移前的横标差和纵标差正好就是平移后的格子点 A_1 和 B_1 的横标差和纵标差，它们都是整数，证毕(图6).

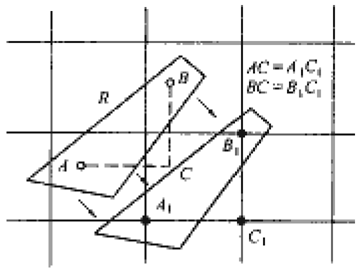


图6

现在我们可以证明 Minkowski 定理了. 这个定理在直观上显然是成立的，可是逻辑上并不明显.

闵可夫斯基定理 一个平面凸区域，关于原点对称，如果其面积大于4，就含有一个异于原点的格子点.

(一个凸集含有点 A 和 B，就含有整个线段 AB).

一个区域如果关于原点对称，那么当它含有点 P 时，它也含有由 P 关于原点反射而得的点 P'，即是使 P 经过原点在反面走同样距离而得的点. 如果 P 有坐标 (x, y)，则 P' 有坐标 $(-x, -y)$. 其次，注意如果这个区域含有除原点以外的一个格子点，它必定也含有关于原点成对称的第二个格子点(图7).

用 R 表示已知区域，让我们把 R 向原点压缩，直到在每一方向都正好是原来的一半大，即是使 R 的每一点沿着与原点的联线向原点推移，直到与原点相距正好是原来的一半为止. 这个变换叫做中心为 O，比率为 $\frac{1}{2}$ 的膨胀. 假设 R 经过这个膨胀变成区域 R'. 既然膨胀把直线变成与之平行的线(如图8，让 A'，B' 表示 A，B 的像点，则 $A'B'$ 平行于 AB，线段 AB 的点 C 变成 $A'B'$ 的点 C')，所以膨胀并不改变图形中角的大小，因而也不改变图形的形状. 因此，R' 与 R 有同样的形状，只是小一些. 这就是说，R' 也是一个平面凸区域，关于原点对称. 它之所以关于原点 O 对称，是因为 O 是 R 的对称中心，也是膨胀的中心.

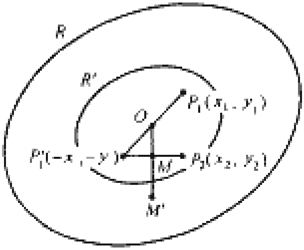


图 7

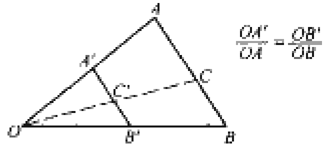


图 8

但是 R' 的面积怎样呢?它在每个方向上的宽度正好是原来宽度的一半. 如果 R 是一个矩形,那么 R' 也是一个矩形,长宽均为原有的一半. 不管怎样,在任何情形下,把一个平面图形的线度按比率 $1:2$ 缩小时,面积就按比率 $(1:2)^2=1:4$ 缩小. 由于 R 当初的面积大于 4,所以我们断定 R' 的面积仍然大于 1. 于是我们可以应用 Blichfeldt 引理的推论了.

因此,R' 含有两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$,其横标差和纵标差 x_2-x_1 和 y_2-y_1 都是整数. 因为原点 O 是 R' 的中心,所以关于原点与 P_1 成对称的点 $P'_1(-x_1, -y_1)$ 也必定在 R' 中. 于是 P'_1 和 P_2 是属于 R' 的两点.

现在利用 R' 是凸集这个事实. 按照定义,这就使我们确定,线段 P'_1P_2 的每一点都属于 R'. 特别是,线段的中点 $M\left(\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}\right)$ 属于 R'.

现在把我们的膨胀变换逆转回去,即是对 R' 施以中心为 O、比率为 $2:1$ 的膨胀. 这就使 R' 伸展到它原来的形态,即伸为 R. 这个膨胀下,R' 的每个点移动到与原点相距为原来的两倍的点. 于是点 M 变成点 $M'(x_2-x_1, y_2-y_1)$. 因为 M' 是 R 的一点. 但是,据 Blichfeldt 引理的推论,M' 是一个格子点. 而且 M' 不是原点,否则 P_1 和 P_2 将会重合,这是和 Blichfeldt 引理的推论矛盾的,因为后者断定它们是不同的两点(证毕).

现在让我们向果园问题的头一半冲击. 我们希望证明:如果树的半径 r 超过 $\frac{1}{50}$ 单位,就没有任何途径可以从原点看到果园以外. 让 AOB 表示果园的任一直径,假设树的半径是 $\frac{1}{50}+q$. 注意,如果 r 大于 $\frac{1}{2}$,那些树就会互相往里长,所以,既然 q 是正数,它就不是一个很大的数. 现在让 p 表示任何一个大于 $\frac{1}{50}$ 而小于 r 的数,例如 $\frac{1}{50}+\frac{1}{2}q$. 在果园的边界上 A 和 B 处作切线,沿切线在两个方向上截取与 A 和 B 相距为 p 的点 C, D, E, F, 这就确定了一个矩形 $EFDC$,其中心

是原点 O(图 9 中把这个矩形的尺寸放大了).矩形的长是 $FD = AB = 100$,宽是 $2p$,所以面积是 $200p$.因为 p 于大$\frac{1}{50}$,所以这个面积大于4.由于 $EFDC$ 是一个平面凸区域,关于原点成对称,所以据 Minkowski 定理,我们的矩形含有一个异于原点的格子点 T.在点 T 种的树具有半径 r,大于 $p = CA$,所以在 T 处的这棵树之大,足以和直线 OA 相交,从而堵住在这个方向上的视线.按照对称性,这个矩形也含有一个对称的格子点 T',在该处所种的树堵住了沿 OB 的视线.这样一来,我们似乎可以断定不可能从原点向外看了.不过,在我们的论证中还有一个难点要解决(你知道是什么吗?).

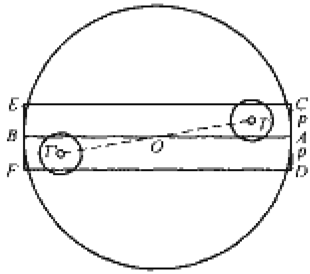


图 9

这个矩形的每个角上都有很小一部分伸出果园以外.如果格子点 T 恰巧落在矩形的这样一部分里,则在该点处并未种树堵住我们的视线.于是我们需要证明:T 不落在 $EFDC$ 在果园以外的任何一部分中.我们间接进行如下:对于矩形的任何一点而言,与原点的最大距离是对角线之半 $OC = \sqrt{50^2 + p^2}$.由于 $p < 1$,所以 $OT \leqslant OC < \sqrt{2\,501}$.可是,当 T 在果园以外时,我们有 $OT > 50$.因此

$$2\,500 < OT^2 < 2\,501$$

如果 T 是格子点(x,y),则 $OT^2 = x^2 + y^2$,这里 x 和 y 都是整数,所以 OT^2 是整数.但是在2 500和2 501之间根本没有整数,因而 T 不可能落在果园之外.

下面让我们证明:如果树的半径减少到小于 $1/\sqrt{2\,501}$,则可以沿着把原点连到点 $N(50,1)$ 的直线看到果园以外的情景.线段 ON 的长度是$\sqrt{2\,501}$.由于格子点是成列地出现的,所以容易看出,果园中最靠近直线 ON 的格子点是点 $M(1,0)$ 以及同样接近的点 $K(49,1)$,用 L 表示点$(50,0)$(图 10).

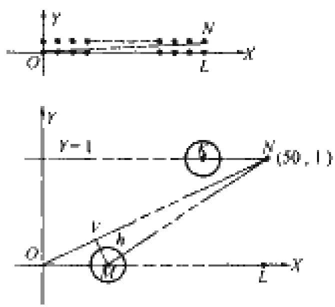


图 10

现在 $\triangle OMN$ 的面积可以用两种办法求得.首先,这个面积是$\frac{1}{2} \cdot OM \cdot LN$,

即是$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$. 以 ON 为底、$h=MV$ 为高，我们也得到$\frac{1}{2}\cdot ON\cdot h$，即$\frac{1}{2}h\sqrt{2\ 501}$. 从而，我们有$\frac{1}{2}h\sqrt{2\ 501}=\frac{1}{2}$，即

$$h=\frac{1}{\sqrt{2\ 501}}$$

于是 h 大于树的半径，所以在 M 处所种的树并未大到足以碰到直线 ON 的程度. 同样，在点 K 所种的树亦然. 既然是靠近的树都碰不到 ON，所以在这个方向上没有任何树能堵住我们的视线.

§3　一道 IMO 试题的格点证法

这一问题是 1988 年 FRG 提出的. 澳大利亚的选题委员会的六人中无人能解出此题. 其中委员会两位成员 Georges Szekeres 和他的妻子都是有名的解题和编题专家. 因为这是个数论题，委员会将它提给 4 位澳大利亚最著名的数论专家，要求他们在 6 小时内解该题，在这时段中无人能解出. 选题委员会把这题提交给 29 届 IMO 的主试委员会，并打上了双星号，表示这是特难题. 在经长时间讨论之后，主试委员会最终把此题选作为竞赛的最后一题，有 11 名学生给出了完整的解答.

试题　若 a,b 和 $q=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 都是正整数，则 q 是完全平方数.

解　用 x,y 代替 a,b，得到一族双曲线

$$x^2+y^2-qxy-q=0 \tag{11}$$

对每个 q 有一条双曲线，所有双曲线关于 $y=x$ 都是对称的. 固定 q，设有一个格点(x,y) 在这双曲线 H_q 上，则关于 $y=x$ 对称的点(y,x) 也在其上，当 $x=y$ 时，易得 $x=y=q=1$. 因此可设 $x<y$，见图 11，如果(x,y) 是格点，则固定 y 时，关于 x 的二次方程有两个解 x,x_1，其中 $x+x_1=qy$，$x_1=qy-x$. 所以 x_1 也是整数. 即 $B=(qy-x,y)$ 是 H_q 的下支的一个格点. B 关于 $y=x$ 对称点是格点 $C=(y,qy-x)$，从(x,y) 出发，利用变换

$$T:(x,y)\to(y,qy-x)$$

可以产生出 H_q 的上支的无限多个格点.

再从点 A 出发，固定 x，式(11) 是 y 的二次式，有两个解 y 和 y_1，其中 $y+y_1=qx$，$y_1=qx-y$. 因而 y_1 是整数，$D=(x,qx-y)$ 是 H_q 的下支上的格点. D 关于 $y=x$ 的对称点是点 $E=(qx-y,x)$. 从点 $A(x,y)$ 出发，可以由

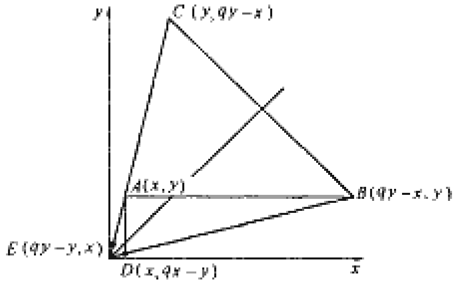


图 11

变换

$$S:(x,y)\to(qx-y,x)$$

得到双曲线 H_q 上支中在 A 点下面的点.但这样的点只有有限个.实际上,每次用变换 S 后,两个坐标都严格减小,当 y 是正的时,x 会是负的吗?不会!这时式(11)成为

$$x^2+y^2+q\mid xy\mid-q>0$$

所以在最后会要求 $x=0$,而由式(11)有 $q=y^2$,这就是要证明的.

在图 11 中,画了 $q=4$ 的双曲线.事实上,我们是用它的渐近线代替它,因为对大的 x 或 y,双曲线与其渐近线的偏差是可以忽略的.

至此我们并未证明 H_q 上有格点,并不要求证明存在性.即使在双曲线上没有格点,定理仍有效.但对于每个完全平方数 q,易证格点的存在性.点$(x,y,q)=(c,c^3,c^2)$就是一个格点,因为

$$\frac{x^2+y^2}{xy+1}=q$$

可得

$$\frac{c^2+c^6}{c^4+1}=c^2$$

§4 一组练习题

英国剑桥大学 Homerton 学院的 R.P.Burn 教授在剑桥大学出版社(Cambridge University Press)1982 年出版的他的自学读物《数论入门》(A pathway into number theory)中以一系列练习的形式,介绍了闵可夫斯基定理.

1.平面上的开域是指这样的一个区域,它含有它的每个点的一个圆邻域,

一个点的圆邻域是指以此点为圆心的一个圆的内部区域.

平面的下列子集中,哪些是开域:

i) 一个点;

ii) 一条线段;

iii) 圆的内部区域,不包括圆周;

iv) 圆的内部区域以及圆周;

v) 区域$\{(x,y)\mid -1<x<1\}$;

vi) 区域$\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$;

vii) 区域$\{(x,y)\mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}\}$.

2. 设 R 是平面上的开域,面积为 Δ,含有格点(0,0),且落在正方形$\{(x,y)\mid -r<x<r,-r<y<r\}$内.在整格 Z^2 的平移$(x,y)\to(x,y)+(a,b)$(它将(0,0)映射到(a,b))下,R 的像用$R_{(a,b)}$表示.此外假设 $R_{(a,b)}$ 与 $R_{(c,d)}$ 没有公共点,除非$(a,b)=(c,d)$.

i) 求一个包含 9 个区域 $R_{(a,b)}(a,b=0,1,-1)$ 的正方形;

ii) 求一个包含 25 个区域 $R_{(a,b)}(a,b=0,\pm 1,\pm 2)$ 的正方形;

iii) 求一个包含$(2n+1)^2$个区域 $R_{(a,b)}(a,b=0,\pm 1,\cdots,\pm n)$的正方形;

iv) 证明 $\Delta\leqslant 4r^2$;

v) 证明 $9\Delta\leqslant(2+2r)^2$;

vi) 证明 $25\Delta\leqslant(4+2r)^2$;

vii) 证明对任意的正整数 n,$(2n+1)^2\Delta\leqslant(2n+2r)^2$;

viii) 证明对任意的正整数 n

$$\Delta\leqslant\left(1+\frac{r-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)^2$$

ix) 证明 $\Delta\leqslant 1$;

x) 举出一个区域 R,它满足问题中的条件,而且 $\Delta=1$.

以下四个问题涉及在线性变换之下内点的像:

3. 设 $0<k<1$,a 和 c 是实数,证明 $ka+(1-k)c$ 在 a 与 c 之间.

4. 对任意实数 k,证明点$(ak+(1-k)c,bk+(1-k)d)$与(a,b),(c,d)共线.

5. 利用问题 3 与问题 4 求证

$$\{k(a,b)+(1-k)(c,d)\mid 0\leqslant k\leqslant 1\}$$

是连结(a,b)与(c,d)的线段.

6. 假设在平面 R^2 的线性变换下，$A \to A'$，$B \to B'$，证明线段$[A,B]$被映射成线段$[A',B']$.

再证明：在平面 R^2 的线性变换下，若三角形 ABC 的像是三角形 $A'B'C'$，则在这个变换下 $ABCD$ 的内部区域被映射成 $A'B'C'$ 的内部区域.

7. 一个区域若含有连结它的任何两个点的线段，则称为凸域. 下面的集合中，哪些是凸的？

i) 一个点；

ii) 一条线段；

iii) 半圆的内部；

iv) 半圆的内部及其边界；

v) 半圆的边界；

vi) 月牙状圆形的内部.

8. 一个平面区域，如果它的任何一点 A 在对点 O 作半周旋转后的像仍在这个区域内，则称它对点 O 对称.

是否存在一点，使

i) 一个圆；

ii) 一个长方形；

iii) 一个等边三角形；

iv) 两条平行直线间的无限带形；

对它是对称的.

9. 举出英文字母为例，使得它

i) 是凸的且对某一点对称；

ii) 是凸的但对任何点都不对称；

iii) 对某一点对称但不是凸的；

iv) 不是凸的且对任何点都不对称.

10. 设 R 是对点 O 对称的平面凸区域，τ 是将 O 变到 A 的平面平移，R_A 是 R 在平移 τ 下的像. 设 R 与 R_A 相交且 $P \in R \cap R_A$，证明 $\tau^{-1}(P) \in R$. 设 Q 是 $\tau^{-1}(P)$ 在对 O 作半周旋转下的像. 通过考察以 P，$\tau^{-1}(P)$，Q，$\tau(Q)$ 为顶点的平行四边形，证明 OA 的中点属于 R. 设 $2R$ 是区域 R 以 O 为中心放大两倍后的像，证明 $2R$ 包含 A.

11. 设 R 是对$(0,0)$对称的凸区域且面积大于4. 设 $\frac{1}{2}R$ 是 R 以$(0,0)$为中心缩小 $\frac{1}{2}$ 后的像，求证：

i) 对于整格 Z^2 的某个平移 τ，$\frac{1}{2}R$ 与 $\tau(\frac{1}{2}R)$ 相交（利用问题2）；

ii) $\frac{1}{2}R$ 含有从$(0,0)$到$r(0,0)$的线段的中点(利用问题 10);

iii) R 含有 Z^2 中与$(0,0)$不同的格点.

闵可夫斯基定理

下面的两个问题是二维 Minkowski 定理的简单但有用的推广.

12. 考虑平面上的任一个平行四边形格,它的每一个基本平行四边形的面积是 A. 将一个基本平行四边形的顶点标为$(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$,进而按照通常定义的矢量加法标出所有的格点. 设 R 是含有点$(0,0)$的面积为 Δ 的开域,而且它整个地包含在以 $x=\pm r$, $y=\pm r$ 为边的平行四边形中,它在把$(0,0)$变到(a,b)的平行四边行格的平移下的像是 $R_{(a,b)}$. 又设 $R_{(a,b)}$ 与 $R_{(c,d)}$ 不相交,除非$(a,b)=(c,d)$. 求证:

i) $\Delta \leqslant (2r)^2 A$;

ii) $9\Delta \leqslant (2+2r)^2 A$;

iii) $25\Delta \leqslant (4+2r)^2 A$;

iv) 对一切正整数 n, $(2n+1)^2\Delta \leqslant (2n+2r)^2 A$;

v) $\Delta \leqslant A\left(1+\dfrac{r-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)^2$;

进而推出 $\Delta \leqslant A$.

13. 对于基本平行四边形面积为 A 的任何平行四边形格,证明:对某个格点对称且面积大于 $4A$ 的凸域至少含有两个格点.

下面的 5 个问题,利用 Minkowski 定理给出了关于用特殊的二次型表示数的一些结果的不同的证明.

14. 在通常的正方形格上,确定格

$$L=\{(x,y)\mid x-12y\equiv 0 \pmod{29}\}$$

的基本平行四边形的面积.

已知 $12^2\equiv -1 \pmod{29}$,证明对于格 L 的每一点,有 $x^2+y^2\equiv 0 \pmod{29}$.

证明在圆 $x^2+y^2=\frac{4}{3}\cdot 29$ 内除原点外还含有 L 中的一个点.

证明存在整数 x,y,使得 $x^2+y^2=29$.

15. 设 p 是素数且 $u\not\equiv 0 \pmod{p}$,求格

$$L=\{(x,y)\mid x-yu\equiv 0 \pmod{p}\}$$

的基本平行四边形的面积.

若 $p\equiv 1 \pmod{4}$ 且 $u^2\equiv -1 \pmod{p}$,证明对于 L 中的每一点,有 $x^2+y^2\equiv 0 \pmod{p}$.

证明在圆 $x^2+y^2=\frac{4}{3}p$ 内除点(0,0)外还含有 L 中的一个点.

证明存在整数 x,y,使得 $x^2+y^2=p$.

16. 设 a 与 b 都不等于零,证明线性变换

$$(x,y)\to(x,y)\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

将圆 $x^2+y^2=1$ 映成椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.证明这个椭圆的面积是 πab.

17. 在通常的正方形格上,求格

$$L=\{(x,y)\mid x-7y\equiv 0\pmod{17}\}$$

的基本平行四边形的面积.

已知 $7^2\equiv -2 \pmod{17}$,证明 $x^2+2y^2\equiv 0 \pmod{17}$ 对于 L 的每个点成立.

试证明在椭圆 $x^2+2y^2=(\frac{4}{3}\sqrt{2})17$ 内,除原点外,还含有 L 的一个点.进而推出,存在整数 x,y,使得 $x^2+2y^2=17$.

18. 利用问题14,验证:当 $p\equiv 1,3 \pmod 8$ 时有 $(\frac{-2}{p})=1$.

若 $p\equiv 1,3 \pmod 8$ 且 $u^2\equiv -2 \pmod p$,证明格

$$\{(x,y)\mid x-uy\equiv 0 \pmod p\}$$

中的每一点都满足 $x^2+2y^2\equiv 0 \pmod p$.

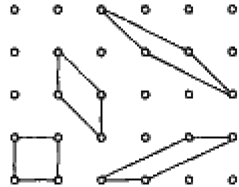
证明在椭圆 $x^2+2y^2=(\frac{4}{3}\sqrt{2})p$ 内,除原点外,至少还含有这个格的一个点,进而推出,存在整数 x,y,使得 $x^2+2y^2=p$.

附录 相关链接

§1 平面点格

由离散的部分组成的最简单的图形是平面正方形点格①(图12).要得到这样的点格,我们在平面上画出面积为一单位的正方形的四个顶点,把正方形沿其一边的一个方向移出一边之长,画出所得的两个新顶点.设想这样的步骤可以在一个方向上和它的相反方向上无止境地继续进行,这样我们在平面上就得到了由距离相等的两列点所组成的长条.把长条在跟它垂直的方向上移出一边之长,画出得到的新顶点.假定这个步骤又可以在两个方向上无止境地进行.这样就作出了全部的正方形点格.正方形点格还可以定义为在平面笛卡

① "点格"是指由点组成的"格子",下页中的"格子点"是指点格中的任意点——中译者注.


图 12

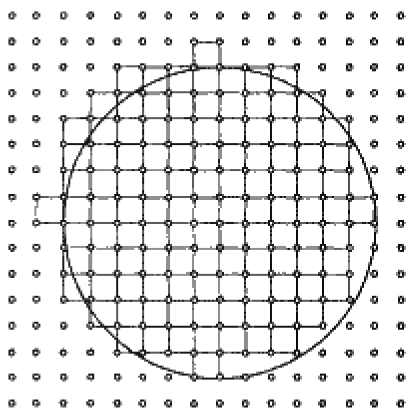
儿坐标系中整数坐标点的集合.

当然,由一个点格的四个顶点不仅可以组成正方形也可以组成其他图形,例如平行四边形.容易知道,由平行四边形出发得到的点格与由正方形出发得到的相同,只要这平行四边形不以格子点为顶点,而它的内部和边上不含任何其他格子点就行了(否则的话,用这种办法得出的点不能包括格子点的全体).今试取任意的这样一个平行四边形来考察,可以看出,它的面积等于原来正方形的面积(图 12).关于这句话的严格证明,将在下文给出.

尽管如此简单的点格,却可以引起重要的数学研究,其中最早的是高斯(Gauss)的研究,高斯试图在半径等于 r 的圆面中找出格子点的数目 $f(r)$,这里圆心是一格子点,而 r 是一整数.高斯先实验找出对于许多 r 值的 $f(r)$ 值来,有如

$$r = 10 \qquad f(r) = 317$$
$$r = 20 \qquad f(r) = 1\ 257$$
$$r = 30 \qquad f(r) = 2\ 821$$
$$r = 100 \qquad f(r) = 31\ 417$$
$$r = 200 \qquad f(r) = 125\ 629$$
$$r = 300 \qquad f(r) = 282\ 697$$

高斯研究函数 $f(r)$ 的目的,原想借这个结果来计算 π 的近似值.每个基本正方形的面积,按假设都等于一个单位,因此 $f(r)$ 就等于被左下顶点在圆面之内或边上的所有正方形覆盖着的面积 F(图 13).这样说来,$f(r)$ 与圆面面积 $r^2\pi$ 之差不超过与圆面相交的(包括计


图 13

算进去的或未计算的)正方形面积的总和 $A(r)$

$$|f(r)-\pi r^2|\leqslant A(r)$$

$$\left|\frac{f(r)}{r^2}-\pi\right|\leqslant\frac{A(r)}{r^2}$$

要求 $A(r)$ 的估值是不难的.单位正方形的两点间最大距离是 $\sqrt{2}$,所以所有跟圆相交的正方形都落在一个圆环内,环的宽度为 $2\sqrt{2}$,而夹在半径为 $r+\sqrt{2}$ 和 $r-\sqrt{2}$ 的二圆之间.圆环的面积是

$$B(r)=[(r+\sqrt{2})^2-(r-\sqrt{2})^2]\pi=4\sqrt{2}\pi r$$

但 $A(r)<B(r)$,所以

$$\left|\frac{f(r)}{r^2}-\pi\right|<\frac{4\sqrt{2}\pi}{r}$$

由此再运用极限过程,就得到我们所要找的公式

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2}=\pi \tag{12}$$

现在把高斯求得的 $f(r)$ 之值代入上式,得出下列 π 的近似值($\pi=3.14159\cdots$)

$$r=10\qquad\frac{f(r)}{r^2}=3.17$$

$$r=20\qquad\frac{f(r)}{r^2}=3.1425$$

$$r=30\qquad\frac{f(r)}{r^2}=3.134$$

$$r=100\qquad\frac{f(r)}{r^2}=3.1417$$

$$r=200\qquad\frac{f(r)}{r^2}=3.140725$$

$$r=300\qquad\frac{f(r)}{r^2}=3.14107$$

公式(12)的另一个应用是证明在上文提到的那一句话:凡能产生正方形点格的任一平行四边形,它的面积都等于 1.为了证明,我们设想圆域内的每一格子点都是一基本平行四边形的一顶点,并约定所有这些顶点在平行四边形相同的位置上.让我们把平行四边形覆盖着的面积 F 跟圆面的面积比较一下.这里也发生由半径 $r+c$ 和 $r-c$ 所作成的圆环面积 $B(r)$ 产生的微小误差,其中 c 是一基本平行四边形的两点间的最大距离而与 r 无关.假定基本平行四边形的面积为 a,则面积 F 等于 $a\cdot f(r)$.从此得出公式

$$|af(r)-r^2\pi|<B(r)=4rc\pi$$

于是

$$\left|\frac{af(r)}{r^2}-\pi\right|<\frac{4c\pi}{r}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2}=\frac{\pi}{a}$$

我们已经证明过

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2}=\pi$$

据此①，我们的断言 $a=1$ 得证.

现在我们转来研究一般的"单位点格"，这是说，根据由单位正方形产生正方形点格的方法，由面积等于一单位的任意平行四边形产生的点格. 这里也是一样，不同的平行四边形可以产生相同的点格，但是这些平行四边形的面积必定等于一单位. 证法如同正方形点格的情形.

对任意这样一个单位点格来说，二格子点间最短的距离 c 是一个特征值. 单位点格的 c 可以随意小，这只要考虑由 c 和 $\frac{1}{c}$ 为边的矩形产生的点格就明白了. 但是另一方面，c 显然不能庞大无边，否则点格就不是单位点格了. 因此 c 必有一上界，今试决定这个上界.

从任一单位点格中任意选取距离为最短(比如说，最短距离是 c) 的两点(图 14). 通过这两点作一直线 g. 按照点格的定义，在这条直线上应有无穷多的、间隔为 c 的其他点. 在平行于 g 且与 g 的距离为 $\frac{1}{c}$ 的直线 h 上也应有无穷多的格子点，但在二平行线 g 和 h 之间的区域内不应包含任何格子点. 以上两项事实都是从所讨论的点格是单位点格推出来的. 以 c 为半径，以 g 上的所有的格子点为圆心作圆. 全部的圆将覆盖着一平面长条，这长条的边界是一些圆弧. 长条内部的任一点至少同一个格子点的距离小于 c，所以按照 c 的定义，这点不是格子点. 因此 $\frac{1}{c}$ 必大于或等于长条边界线到 g 的最短距离. 这个距离显然是以 c 为边的等边三角形的高. 于是就有

$$\frac{1}{c} \geqslant \frac{c}{2}\sqrt{3}$$

$$c \leqslant \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

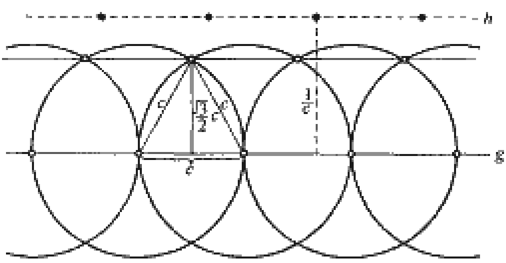


图 14

$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ 就是所求的 c 的上界. 而且确实也有一个点格达到这个极值，因为，从图 4 上看出，这样的点格可以用由两个等边三角形拼成的平行四边形产生出来.

① 在这个证明中，也可以不必是圆，而是任何的一块平面，只要这块平面边上被覆盖的那一部分对整个的这块平面来说，是任意地狭窄就行了.

单位点格经过膨胀或收缩后可以得到随意大小的点格. 设 a^2 是某个点格的基本平行四边形的面积, C 是两个格子点间的最短距离, 那么应有

$$C \leqslant a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

等号当且仅当点格是由等边三角形组成的时候才成立. 所以, 对一给定的最短距离, 这样的点格含有最小的基本平行四边形. 但是, 我们在前文看过, 大的图形的面积近似地等于在那个区域里格子点数乘以基本平行四边形的面积, 所以, 在具有给定的最短距离的一切点格中, 等边三角形点格(在给定的大区域里) 含有最多的点.

若以每一格子点为圆心, 以两个格子点间的最短距离之半为半径作圆, 则得到一组彼此相切但没有覆盖现象的圆. 这样作出来的圆组称为(正则的) 圆形格子式堆积. 我们说一种圆形格子式堆积较另一种为紧密, 如果前一种堆积能在相当大的已知区域内放进较多的圆. 据此得知, 等边三角形点格产生最紧密的圆形格子式堆积(图 15).

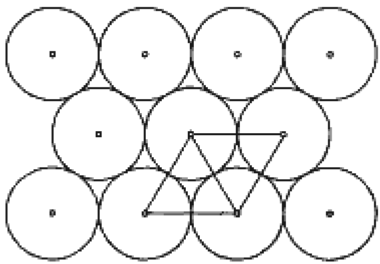


图 15

作为圆形格子式堆积的密度的度量, 我们取包含在已知区域内各圆的总面积除以这个区域的面积. 对于充分大的区域来说这个值显然近似等于一个圆的面积除以基本平行四边形的面积. 等边三角形点格给出密度的最大值

$$D = \frac{1}{2\sqrt{3}}\pi = 0.289\pi$$

§2　在数论中的平面点格

点格在许多数论问题中有用处.

1. 莱布尼兹级数

$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. 如同前一节中讲的, 假定 $f(r)$ 代表在以 r 为半径, 以一格子点为圆心的圆内, 平面正方形单位点格的点的个数. 我们把圆心作为笛卡儿坐标的原点, 并把格子点配以整数坐标. 这样 $f(r)$ 便是适合 $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ 的所有整数偶 x, y 的个数. 因为 $x^2 + y^2$ 总表示整数 n, 因此可以如此去求 $f(r)$: 对每一整数 $n \leqslant r^2$, 找出能以二整数平方之和表示它的方法的个数, 把所有这些分解法的个数相加. 在数论中有这样一个定理: 一整数

n 表示为二整数平方之和的方法的个数，等于 n 的具有 $4k+1$ 和 $4k+3$ 形式的因子的个数之差的四倍. 但在这种表法中，如 $n=a^2+b^2$，$n=b^2+a^2$，$n=(-a)^2+b^2$ 等须认为是不同的分解式，因为它们对应不同的格子点. 这样说来，每种分解式可以导出 8 种分解式来(但如 $a=\pm b$，$a=0$，$b=0$ 是例外). 作为本定理的例子，我们来看 $n=65$ 这个数. 这个数共有 4 个因子：1，5，13，65. 所有这些因子都可以写成 $4k+1$ 的形式，但是 $4k+3$ 形式的却一个也没有. 因此所求的差是 4，因此根据我们的定理，65 这个数可以写成 16 种二数平方之和.（换句话说，以原点为中心、以 $\sqrt{65}$ 为半径的圆周通过 16 个格子点.）实际上，$65=1^2+8^2$，$65=4^2+7^2$，每个式子又可以写成 8 种形式.

根据这个定理，对于每个正整数 $n\leqslant r^2$，从形为 $4k+1$ 的因子个数减去形为 $4k+3$ 的因子的个数，再将各差相加，则得出 $\frac{1}{4}(f(r)-1)$. 不过，如果把加减的次序作适当的变更，尚可以简化许多. 这是说，从所有的 $n\leqslant r^2$ 中形为 $4k+1$ 的因子数之和减去所有的形为 $4k+3$ 的因子数之和. 要决定第一个和，把形为 $4k+1$ 的各数按大小次序写成 1，5，9，13…，所有大于 r^2 的数一概不计. 每个这样的数累加几次不超过 r^2，在计算因子时，它就应该计算几次. 因此，1 应有 $[r^2]$ 次，5 有 $\left[\frac{r^2}{5}\right]$ 次，这里的 $[a]$ 一般表示不超过 a 的最大整数. 所以我们所求的 $4k+1$ 形式的因子总数是 $[r^2]+\left[\frac{r^2}{5}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]+\cdots$. 由符号 $[a]$ 的定义，这个级数只要方括弧中的分母一超过分子就中断了. 对于 $4k+3$ 形式的因子也可以同样地处理，从而得出这种因子总数为

$$\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{11}\right]+\cdots$$

我们还要从第一个和中减去第二个和. 因为这两个和的项数都是有限的，所以级数的次序可以随意变更. 如用下法，则在过渡到极限 $r\to\infty$ 时较为方便. 我们把得出的结果写成下面的形式

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=[r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]-\left[\frac{r^2}{11}\right]+\cdots$$

为了要弄清楚这个级数什么时候中断，我们姑且假定 r 是奇数. 这样级数一共有 $\frac{r^2+1}{2}$ 项. 这个和中的符号加减相间，同时绝对值不增加. 因此如果在 $\left[\frac{r^2}{r}\right]=[r]=r$ 这项处就中断了，由此所产生的误差最多等于最后的一项 r，所以我们可以把这个误差写做 ϑr，这里的 ϑ 是一真分数. 如果我们要把留下的 $\frac{1}{2}(r+1)$ 项的方括弧去掉，结果每项的误差都小于 1，所以总的误差又可以写做 $\vartheta' r$，而 ϑ' 是一真分数. 于是我们有

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=r^2-\frac{r^2}{3}+\frac{r^2}{5}-\frac{r^2}{7}+\cdots\pm r\pm\vartheta r\pm\vartheta' r$$

各项除以 r^2 后，得

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f(r)}{r^2}-\frac{1}{r^2}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\pm\frac{1}{r}\pm\frac{\vartheta+\vartheta'}{r}$$

让 r 无限增加(取所有的奇数值)，则 $\frac{f(r)}{r^2}$ 趋近于 π，这是容易证明的. 这样我们就导出了莱

布尼兹级数

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

2. 二次形式的最小值

令
$$f(m,n) = am^2 + 2bmn + cn^2$$
是以实数 a,b,c 为系数且行列式 $D = ac - b^2 = 1$ 的二次形式. 在这种情形下 a 不能等于零. 今不妨假定 $a > 0$. 如所周知, 满足这些条件的 $f(m,n)$ 是正定的, 也就是说, 对于所有的实数偶 m,n, 除去 $m = n = 0$ 之外, $f(m,n)$ 是正的. 以下我们要证明: 不管如何选择系数 a,b,c, 只要它们适合条件 $ac - b^2 = 1$ 且 $a > 0$, 总有两个不全为零的整数 m,n, 使 $f(m,n) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$ 成立.

这句断语可以从我们以前讨论过的在单位点格中两点间的最小距离得知. 利用条件 $D = 1$, 再用通常的配方法, $f(m,n)$ 可写成

$$f(m,n) = (\sqrt{a}m + \frac{b}{\sqrt{a}}n)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{a}}n\right)^2$$

现在考虑平面笛卡儿坐标系中坐标为

$$x = \sqrt{a}m + \frac{b}{\sqrt{a}}n$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{a}}n$$

的点, 这里的 m 和 n 取所有的整数值. 根据解析几何的初等定理知道这些点应该作成单位点格. 因为它们可以从正方形单位点格 $x = m, y = n$ 经过行列式等于 1 的平面仿射变换

$$x = \sqrt{a}\xi + \frac{b}{\sqrt{a}}\eta$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{a}}\eta$$

而得. 但是现在 $f(m,n) = x^2 + y^2$; 所以当 m 和 n 取所有的整数值时, $\sqrt{f(m,n)}$ 表示从原点到相当的格子点的距离. 按照前面讲过的定理, 点格有一点 P, 可使这个距离不超过 $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. 由此对 P 的二整数坐标 m,n 来说, 我们就有

$$f(m,n) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$$

这就是要证明的.

这个结果可以用来解决通过有理数来逼近实数的问题. 设 α 是任一实数, 我们考虑形式

$$f(m,n) = \left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon^2 n^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}m^2 - 2\frac{\alpha}{\varepsilon^2}mn + \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right)n^2$$

这个形式的行列式是

$$D = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right) - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^4} = 1$$

这里的 ε 是任意正数. 根据我们之前证明的结果, 可以找到二数 m,n, 使其适合不等式

$$\left(\frac{\alpha n-m}{\varepsilon}\right)^2+\varepsilon^2n^2\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$$

从这里显然可得二不等式

$$\left|\frac{\alpha n-m}{\varepsilon}\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\qquad|\varepsilon n|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

从这里又得①

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{|n|}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\qquad|n|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

如果 α 不是有理数,第一个不等式的左边必不等于零,所以假如给定的 ε 的值越来越小,则必得无穷多的这样的数偶 m,n;因为此时 $\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|$ 必无限减少.用这种方法我们得到与无理数 α 随意逼近的有理数 $\frac{m}{n}$,另一方面,借用第二不等式可以消去 ε,从而得到

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{n^2}$$

这样一来,我们有了一个近似分数的序列,其近似的程度与分母的平方成正比例.这种近似值的分母不需要很大而近似程度就相当地高.

3.闵可夫斯基定理

闵可夫斯基建立了一个关于点格的定理,这个定理虽然很简单,可是能够解决数论上许多用别的方法难以解决的问题.为了容易明白起见,这里我们不讲定理的一般形式,而只讨论一个特殊的情形,这种情形不但非常容易表述,而且从方法上说,已包含了主要的一切.这个定理说:

如果以边为 2 的正方形覆盖着平面上任一已知单位点格,且使正方形的中心与一格子点重合,那么在这个正方形的内部或边上还有一个格子点.

要证明这一定理,设想在点格平面上划定了任意一个大的区域,譬如说是以大的 r 为半径以一个格子点为圆心的圆的内部和圆周.对于在这个区域中的每一格子点都以这点为中心作一个以 s 为边的正方形(图 16).现在要求不管选择 r 多么大,也没有两个正方形是覆盖着的,在这个要求之下,来估计一下边 s 的长.依照我们从前讲过的记号,在所说的区域内有 $f(r)$ 个格子点,因为正方形不得互相覆盖,所以它们的总面积为 $s^2f(r)$.另一方面,这些正方形都落在较大的半径为 $r+2s$ 的同心圆内,因此我们得到下面的不等式

$$s^2f(r)\leqslant\pi(r+2s)^2$$

或

$$s^2\leqslant\frac{\pi r^2}{f(r)}\left(1+\frac{2s}{r}\right)^2$$

如果将 s 固定,让 r 无限增加,由前面的 $f(r)$ 的讨论,知道不等式的右方趋近于 1.所以我们得出 s 的条件是

$$s\leqslant1$$

① 对于充分小的 ε,是许可用 n 除的,因为如果 n 等于零,不等式 $|\alpha n-m|\leqslant\varepsilon\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ 就不成立了.

因为二正方形只可能有覆盖或不覆盖两种情形，由此可知，对于任意正数 ε，不管它多么小，如果从边长为 $1+\varepsilon$ 的正方形出发，必然得到覆盖的正方形. 直到现在，我们并没有假定正方形的相互位置，因此我们可以把正方形绕其中心作任何角度的转动. 让我们假定所有的正方形都平行地放着. 今取出以 A 和 B 为中心的两个互相覆盖的正方形 a，b 来看（按照题设，a，b 即是格子点），则线段 AB 的中点 M 必落在这两个正方形的内部（图 17）.

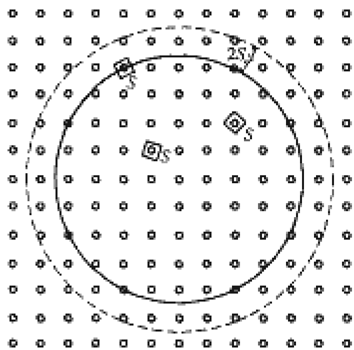


图 16

为了简明起见，今后凡是遇到二格子点连线的中点，例如 M，我们一概用点格的"平分点"一词代表. 现在我们可以推出这样的结论：以一格子点为中心且以 $1+\varepsilon$ 为边长的任一正方形 a，一定包含一平分点. 因为如以所有别的格子点为中心作一些正方形与 a 全等且同方向，则必有某些地方覆盖起来. 又因为所有的正方形在这个图形上都有相同资格，所以 a 自己也必部分地被另一正方形 b 覆盖着，因此 a 必包含一平分点，如同图 7 中的点 M. 现在我们可以用反证法来完成定理的证明. 假如以一格子点 A 为中心以 2 为边的正方形的内部或边上再没有另外的格子点，那么我们可以把这个正方形在保持边的方向和中心位置不变的条件下稍微地扩大一下，使得扩大后的正方形 a' 的一边为 $2(1+\varepsilon)$，也不包含其他的格子点. 另外一方面，我们把这个正方形也在保持边的方向和中心的条件下收缩到原边的一半，就得到以 A 为中心以 $1+\varepsilon$ 为边的正方形 a. 这个正方形，刚才证明过必包含一平分点 M. 这就是个矛盾，因为延长 AM 一倍到 B，则 B 必是一格子点，而且从 a 和 a' 的相互位置来看，可知这个格子点必在 a' 之内（图 18）.

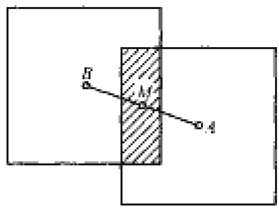


图 17

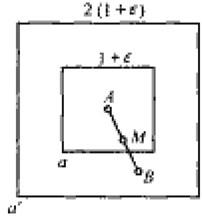


图 18

闵可夫斯基定理的一个有效应用是处理上一节我们曾经讲过的用有理数逼近实数的问题. 我们的方法和上节十分相似，可是得到更好的结果. 借用已知的无理数 α，我们作点格，格子点的笛卡儿坐标为

$$x=\frac{\alpha n-m}{\varepsilon}\qquad y=\varepsilon n$$

式中，m 和 n 取所有的整数值，ε 是任意的正数. 像以前一样，可以知道这个点格是单位点格.

图 19 表示点格中的一个基本平行四边形，假定 $0 < \alpha < 1$. 我们作一正方形，以 2 为边，中心在原点，且使其边平行于坐标轴. 应用闵可夫斯基定理，这个正方形必包含另一格子点. 这个格子点由不全等于零的某二整数 m 和 n 决定. 另一方面，在正方形的内部和边上的点的坐标都满足不等式 $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. 因此，m, n 应满足下面的两个不等式

$$\left|\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}\right| \leqslant 1 \qquad |\varepsilon n| \leqslant 1$$

或

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|n|} \qquad |n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$$

这就得出逼近 α 到随意准确程度的另一分数 $\frac{m}{n}$ 的序列. 消去 ε，得

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

由此可见，闵可夫斯基定理证明了有逼近 α 的分数序列存在，它比在上一节作出的分数序数更好，那里我们不过得到了近似式

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{n^2}$$

这个结果比较弱，因为 $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$.

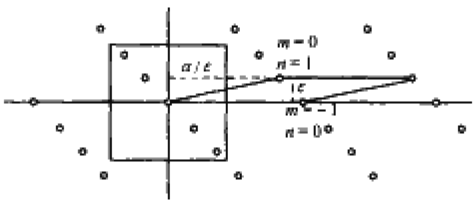


图 19

（引自 D. 希尔伯特 · S. 康福森著. 直观几何（上册）. 北京：高等教育出版社，1950 年）

从一道 Putnam 试题谈数论中的同余数问题

李再春[①]

§0　引子

试证边长为整数而面积在数值上等于周长的两倍的直角三角形,正好有三个.

这是第 26 届美国普特南数学竞赛试题.

证明　设直角三角形的三边长为 x,y 和 z,其中 z 为斜边的长,且 x,y 和 z 为整数.

由题意,有不定方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 & (1) \\ \frac{1}{2}xy=2(x+y+z) & (2) \end{cases}$$

由式(1)可得

$$\begin{cases} x=\lambda(p^2-q^2) \\ y=2\lambda pq \\ z=\lambda(p^2+q^2) \end{cases}$$

其中$(p,q)=1,p\not\equiv q(\bmod 2),\lambda$ 为任意自然数,将 x,y,z 的值代入式(2)得

$$\lambda^2(p^2-q^2)pq=2\lambda(p^2-q^2+2pq+p^2+q^2)$$

化简可得

$$\lambda(p-q)q=4$$

由 $p\not\equiv q(\bmod 2)$ 可得 $p-q$ 是奇数,于是 $q=1,2$ 或 4.

当 $q=1$ 时,$p=2,\lambda=4,x=12,y=16,z=20$;

---

① 李再春(男),曾任职于哈尔滨学院.

当 $q=2$ 时，$p=3,\lambda=2,x=10,y=24,z=26$;

当 $q=4$ 时，$p=5,\lambda=1,x=9,y=40,z=41$.

因而正好有三组解.

这一试题是以数论中同余数问题为背景的.

§1　Fermat 的栏外注解

在费马(Fermat,1605—1665)的栏外注解中有很多谜，其中所谓“费马大定理”较有名. 但这不是说其他问题不重要，如其中的“同余数”问题及有关整数的二次型表现问题也很重要.

在被认为是费马留下的惟一注解的 Observationes XLV 中有这样的开场白：“以整数构成的直角三角形的面积不会是平方数. 让我们对此给予证明，这一发现我经过了艰难的思索，它的证明会给数的科学以辉煌的进步”. 顺便提一下，费马在此证明不定方程 $x^4-y^4=z^2$ 不存在解，这成为“大定理”的 $n=4$ 情况下的证明的证据，在丢番图的《算术》的第 VI 卷，载有大量有关直角三角形的问题，即“毕达哥拉斯”问题.

Bachet①(C.G.Bachet de Méziriac. 1581—1638)在 1621 年用希腊语和拉丁语翻译出版了《算术》一书，在此书中，他把自己的研究体会用注释的形式写了进去. 特别是第 VI 卷的卷末载了 22 个直角三角形问题，其中第 20 个问题就是“寻找以已知数为面积的直角三角形”. 对此，费马作了上面那段注解.

一般，当 n 为已给自然数时，存在以 n 为面积的，三边为有理数的直角三角形时，我们称 n 为同余数(congruent number)：$\exists x,y,z(\in\mathbf{Q})$

$$x^2+y^2=z^2\qquad n=\frac{1}{2}xy \tag{3}$$

从而费马证明了定理：平方数不是同余数. 因为三角形的边增加 t 倍时其面积增加 t^2 倍，所以在考虑这个问题时，很明显，n 可以不包含平方因子. 那么可以假定 n 不包含平方因子，于是费马定理可表达为“1 是非同余数”.

判定一个指定自然数是否为同余数，并不像想象的那样简单，它是个非常

① 巴歇(Bachet de Méziriac. Claude-Gaspar,1581-10-9—1638-2-26)法国数学家. 生于法国布雷斯地区布尔格(Bourg-en-Bresse)，卒于同地. 他能用法文、意大利文、拉丁文写诗，还谙熟希腊文. 曾在帕多瓦(Padua)等地学习，其后任教于米兰和科莫(Como)的教会学校. 在巴黎和罗马定居多年. 1635 年被选为法国科学院院士. 巴歇是数学游戏的先驱之一，著有《趣味算题集》(1612 年出版)一书，书中着重分析了数学思想的妙趣，并且尽量对一些特例进行概括. 他解决了一次不定方程的整数解的求法问题，他几乎涉及了连分数理论. 1621 年，他将丢番图的《算术》(Arithmetica)由希腊文译成拉丁文出版，其中也收入了他自己在数论和丢番图分析上的研究成果. 这部著作对著名数论专家费马产生了很大影响. 所谓巴歇定理是指：每一个整数都可表为不多于 4 个平方数的和，它在 1770 年被拉格朗日所证得.

难的问题.至今也没有得到完全的解决.本节从是谁起了同余数这一有点奇怪又不太相称的名字人手,叙述一下有关同余数问题的研究状况,不是出于对未解决难题单纯的兴趣,由于一个代数模式的导人,一大堆看来没有联系的与若干古典难题有关的各种结果,倾刻间被整理得系统化,甚至由于这种代数问题被凝缩成(riticalvalwe)解析问题,使问题大步走向解决的彼岸.陈述一下数学发展的一个典型事例和为解决一个朴素的问题而做的努力,我们觉得这是件意义深远的事情.

首先,我们把下面的命题提出来(这是公元10世纪左右阿拉伯人研究的一个问题).

命题 欲使 n 为同余数,那么 $x^2+n=\square, x^2-n=\square$,式(*)必是有理数解.

($\square$ 记号表示有理平方数,且两个 $\square$ 是不同的平方数.有时前一个 $\square$ 写成 u^2,后一个写成 v^2,但 $\square$ 记号至今仍被人们所爱用.)

证明 设 n 为同余数,根据式(*)得

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 \pm n = \left(\frac{x \pm y}{2}\right)^2 \qquad (*)$$

从而式(*)成立.反之若

$$x^2+n=u^2, x^2-n=v^2$$

则有

$$z=2x, x=u+v, y=u-v$$

根据这一命题,想要说明平方数 $n=y^2$ 不是同余数,只要说明式(*)没有解,其他的就可以迎刃而解.$z^2+2xy=(x\pm y)^2$ 这一变形式在 Diophantus 的算术中经常出现,因此同余数问题可以说是 Diophantus 首先提出的.但对于给定的 n 是否是同余数这一问题的出现,据 Dickson 考证是最初见于10世纪的阿拉伯文献中.据说10世纪的 Mohammed Ben Alhocain 也对直角三角形与不定方程的关系有过注意.

由于毕达哥拉斯方程的解是 $x=a^2-b^2, y=2ab, z=a^2+b^2$,因此,为了使 n 为同余数,很有必要作如下的表述

$$n=ab(a^2-b^2)t^2 \qquad (4)$$

"同余数的集合"如下例.

例如:$a=5, b=2^2$ 时 $ab(a^2-b^2)=5\cdot 2^2\cdot 3^2$,因此5是同余数(图1表示的是这一结果的直角三角形形式).

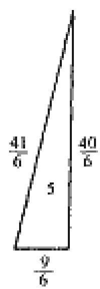


图1

中世纪末,最大的数学家是波斯的斐波那契(Leonardo,12世纪后半叶—13世纪前半叶),有人认为他是把印度、阿拉伯数字引人西欧的人,但在数学上后人对他的著作 liber Quadratorum(《平方的书》,1225)的评价最高.这本书是中世

纪惟一公开刊行的数论著作,在此书中首次出现了同余数一词.

§2 Fibonacci 问题

在神圣罗马皇帝 Friedrich 二世的宝座前曾有过一次数学竞赛盛会,斐波那契也出席了.其中有个问题就是求解

$$x^2+5=\square, x^2-5=\square \tag{5}$$

斐氏经过苦苦思考,终于解决了它.并以此题的解法为主要内容之一,著了《Liber Quadratorum》一书.他考虑了恒等式 $(x^2+y^2)\pm 4xy(x^2-y^2)=(x^2-y^2\pm 2xy)^2$ 把 $4xy(x^2-y^2)$ 形式的数定义为 Congruus.高斯也曾定义过数的 Congruus.此单词用日语翻译即"一致"乃至"合适"的意思.从内容上看高斯的意思是"一致"的意思,而斐波那契是"合适"的意思.总而言之,指的就是满足方程(5)的数.也或许是沿用古代的神秘的习惯,从"调和数"中受启发而起的名字.但无论怎样没有考虑"合适"之意译为"同余数"也无妨.因为用"同余数"这个词已经有一例,如盖伊在书中把 Congruent number 初次引入到日本,并有人把它译为"同余数".

斐氏认为 n 为同余数时 nt^2 也是同余数,因而给出了方程(5)的解为 $x=3\frac{5}{12}$.进而还叙述了前面讲到的费马定理,即"平方数不是同余数"命题,并自己对此加以证明,但不过是无聊之举.

从这些原委中,可以推出如下两件事情.首先,有个疑问就是斐波那契曾在阿拉伯地区旅行过,因此知道这个问题.这在数学史上有过研究,但问题在于他能否对于同余数与图形的关系像我们这样利用公式(4)进行求解.毕达哥拉斯数的表示式在公元前 1900 年前后就已给出.因此斐波那契不会不知道.还有在《liber Quadratorum》一书中完全没有触及图形.因此若说他知道公式与图形的关系也是一件不可思议的事情.

第二,Bachet 和费马似乎完全不知道斐氏的此著作的存在.这种怀疑首先是没有错的.如果不是这样费马会想出别的例子去热心指出斐氏的不足之处的,但费马在一生中一次也没有提及斐氏的名字.并且也没有指出自己所求解的问题是古老的难题.若了解一下费马的性格,也许会知道,这种事不会有人沉默不语的.

§3 古典的结果

自古以来关于同余数有很多的研究,详细的请看 Dickson 的著作.这里只拾其 2.3 则为代表作个一般介绍.

定理 1 欲使 n 为同余数,那么不定方程

$$x^4 - n^2 = \square \tag{6}$$

必须有有理数解.

定理 2 若联立不定方程式

$$x^2 - ny^2 = z^2 \qquad x^2 + ny^2 = t^2$$

存在整数解,那么

$$X = x^4 + n^2y^4 \qquad Y = 2xyzt$$

也有解.并且若前面的有一组解,则后面的一组方程会有无穷多解.

还有若存在面积为 n 的直角三角形,那么有无穷多个解.

定理 3 若 p,p_1,p_2 为满足 $p \equiv 3 \pmod 8$ 的素数,那么 p,p_1,p_2 就不是同余数.

定理 4 若 q,q_1,q_2 为满足 $q \equiv 5 \pmod 8$ 的素数,那么 $2q_1,2q_1q_2$ 不是同余数.

对于定理 1 与 2,在后面说明,现在对于定理 3 和 4 举个例子,试说明一下当 $p \equiv 3 \pmod 8$ 时,p 为非同余数这一事实.

命题 下面方程式中的任何式子有有理数解时 n 为同余数

$$ny^2 = x^4 + 4 \tag{7}$$

$$2ny^2 = x^4 + 1 \tag{8}$$

$$ny^2 = \pm(x^4 - 6x^2 + 1) \tag{9}$$

尤其当 n 为素数时,其逆命题也成立.

证明 n 为同余数的条件如式(4)所示,当

$$a = n\square, b = \square, a^2 - b^2 = \square$$

有解时 n 为同余数,同样当

$$a = \square, b = n\square, a^2 - b^2 = \square \quad 或$$

$$a = \square, b = \square, a^2 - b^2 = \square$$

有解时 n 也为同余数.把这个式子变个形,就得出式(7)、(8)、(9).当 $n = p$ 为素数时,因为只有在上面说的三种情况下,p 才为同余数,因此,$n = p$ 为素数是必要条件.

设 $n = p$ 为素数. 正如把 p 代入式(8) 即可知的结果. 必须有 $p \equiv 1 \pmod 8$. 又把 p 代入式(9) 中也可知, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, 从而必须有 $p \equiv \pm 1 \pmod 8$. 式(7) 也同样得出 $p \equiv 1 \pmod 4$, 可见无论如何也得不出 $p \equiv 3 \pmod 8$ 的结果.

系　当素数 $p \equiv 5 \pmod 8$ 时, 使 p 为同余数的必要条件是

$$py^2 = x^4 + 2 \tag{10}$$

存在有理数解.

其实扩展 Heegner 的方法, 已经知道使 $p \equiv 5 \pmod 8$ 的素数 p 为同余数. 所以方程式(10) 对于这样的 p 一般说是存在有理数解的.

1 000 以内的自然数中的所有同余数的列表由盖伊给出, 由此表可知, 有 608 个含平方因子的数, 其中有 352 个同余数, 剩余的 9 个还没有确定. 而且以此数表为基础, Alter 等人在 1972 年左右, 提出如下的猜想: 若 $n \equiv 5, 6, 7 \pmod 8$ 则 n 为同余数. 但正如后面的说明, 这个猜想含在关于椭圆曲线的 Birch-Swinnerton-Dyer 的猜想之内, 因此, 不能称为新发现.

Euler 研究提出了一个称谓, 那就是:

当

$$x^2 + m = \square, x^2 + n = \square$$

存在有理数解时称 m, n 为 Concordant.

§4　与椭圆曲线的关系

从几何学的角度考虑式(1), 它交于二次曲面, 因此是亏格为 1 的曲线. 即为椭圆曲线. 这样费马与欧拉所研究的问题中的有关有理数解的问题, 均可归结为有关二次曲线乃至椭圆曲线上的有理点问题. 因此椭圆曲线理论的发展给解决这类难题以转机. 这种历史角度的考案, Weil 对此作了杰出的研究, 在这里我们只对同余数进行讨论.

若 n 为同余数, 那么根据式(3)

$$x = \square \qquad x + n = \square \qquad x - n = \square$$

存在有理数解. 特别是

$$x = (x + n)(x - n) = \square$$

就是说椭圆曲线

$$En: y^2 = x^3 - n^2 x$$

在一定条件下(即 $x \neq 0, \pm n$) 时存在有理点. 其实反过来也成立, 我们用著名的"Mordell 定理" 对这一点加以说明:

若给出的椭圆曲线 E 是维尔斯特拉斯正规形曲线,那么

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \tag{11}$$

为了说明我们的目的现在可以设 g_2, g_3 为有理数.当取 E 上的两点 P, Q 时,取连接 P, Q 的直线与 E 再次相交的点,这时与这个点在 x 轴上,对称的另一个点在曲线 E 上.把它定义为 P 与 Q 之和 $P + Q$,那么就成为众所周知的阿贝尔(Abel)群(但是,单位圆是无限远点,当 $P = Q$ 时取切线).这时 E 上的所有有理点成为阿贝尔群的子群(如果不是空集的话).

而且有以下的情况出现:

Mordell 定理 椭圆曲线上的所有有理点构成阿贝尔有限生成群.

在 En 的情况下,对于点 $P = (x, y)$,$2p$ 的 x 坐标为 $((x^2 + y^2)/2y)^2$.所以可有 §3 中的定理2;把 x/y 表示为既约分数 x_1/y_1 时,由于 $x < x_1$,可依次求得不同的解.

讨论一下,Weil 对 Mordell 定理的证明会发现如下的情形,把椭圆曲线表示为

$$E: y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

为方便起见,设 e_i 为有理数.把此曲线上的所有有理数点用 E 来表示,由于都是有理点所以不会出现差错,若 $P = (x, y)$ 为 E 上的点,那么

$$x - e_1 = d_1\square \qquad x - e_2 = d_2\square \qquad x - e_3 = d_3\square$$

(但 $d_1d_2 = d_3 = \square$) 显而易见 d_i 是 $(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)$ 的约数.这时我们称上面 d_i 是 (d_1, d_2, d_3) 为 P 的型.型中没有平方数.E 的型的全部为有限集合.若把 P, Q 两点的形记为 (d_1, d_2, d_3),(d_1', d_2', d_3') 那么 $P + Q$ 的型就是 $(d_1d', d_2d_2', d_3d_3')$.这时有以下定理成立:

定理 构成型的群与 $E/2E$ 同构.

这就是所谓"Mordell-Weil 小定理",它构成 Mordell-Weil 定理证明的第一阶段.

系 1 $P \in 2E \Leftrightarrow x - e_i = \square (i = 1, 2, 3, \cdots)$;

系 2 特别在 En 时,其挠群 $\mathrm{Tor}(En)$ 为 $T = \{0, (0,0), (n,0), (-n,0)\}$.

系 2 的证明 已知 $2p = 0 \Rightarrow p \in T$ 且只有当 $p = 0$ 时才会有 $2p \in T$,因此只有 T 的点才是以 2 的幂为倍数的点,若设 p 为具有奇数位数的点,那么 $2p$ 也如此.这与系 1 及 §2 的定理 2 是相悖的.

从而,当把构成椭圆曲线 E 的有理点的阿贝尔群的秩表示为 $r(E)$ 时,从系 1、系 2 得出:

命题:$r(En) > 0$ 是 n 为同余数的必要条件.

利用此命题,我们就容易理解 §2 中的定理 1,因为只有 En 在某些条件下

具有有理点时,式(6)才会有解.

§5 与椭圆曲线中 BSD 猜想的联系

公元 10 世纪左右,阿拉伯人研究了另一个数论问题,对于正整数 n,是否存在有理数 x,使得 $x, x+n, x-n$ 均为有理数平方. (*)

事实上,它与同余数问题是等价的(即:$\exists\, a,b,c \in \mathbf{Q}^+$,使得 $a^2+b^2=c^2$,并且 $\frac{1}{2}ab = n \in \mathbf{N}^+$). (**)

若 (a,b,c) 是(**)的正有理数解,则 $x=\frac{c^2}{4}$ 就是(*)的解,反之若 x 是问题(*)的有理数解,则 $c=2\sqrt{x}$,$a=\sqrt{x+n}+\sqrt{x-n}$,$b=\sqrt{x+n}-\sqrt{x-n}$ 就是问题(**)的正有理数解.

如果 $x=D$ 是问题(*)的有理解,则 D 和 $D\pm n$ 均为正有理数 A,B,C 的平方,所以椭圆曲线

$$E: y^2 = x^3 - n^2 x$$

有有理数解 (x,y),其中 $x=D$,$y=ABC\neq 0$,反之,若 $(x,y)=(A,B)$ 是椭圆曲线 E 的有理数解并且 $B\neq 0$,可以直接验证 $\left(\frac{A^2+n^2}{2B}\right)^2$ 和 $\left(\frac{A^2+n^2}{2B}\right)^2\pm n$ 都是有理数平方,因为 $\left(\frac{A^2+n^2}{2B}\right)^2\pm n=\left(\frac{A^2\pm 2nA-n^2}{2B}\right)^2$,所以 n 是否为同余数又等价于是否:

椭圆曲线 E 存在有理数解 (x,y) 使得 $y\neq 0$.

利用椭圆曲线加法运算定义,由椭圆曲线 E 的一组有理数解 (x,y) $(y\neq 0)$ 可得到 E 的无穷多组有理数解.所以 n 为同余数当且仅当 E 有无穷多组有理数解.利用椭圆曲线的深刻理论,目前已经决定出许多类同余数和非同余数,但这个问题至今没有完全解决,例如 1963 年有三位数学家猜想:每个正整数 $n\equiv 5,6,7 \pmod 8$ 都是同余数,这个猜想至今也未能证明.

利用椭圆曲线中的 Birch 和 Swinnerton Dyer 猜想(简称 BSD 猜想)的一系列进展,1983 年 Tunnel 证明了如下定理:

设 n 为无平方因子正整数,如果 n 是同余数,则

$$N\{n=2x^2+y^2+32z^2\} = \frac{1}{2}N\{n=2x^2+y^2+8z^2\}$$

若 $z \nmid n$.

$$N\{\frac{n}{2}=4x^2+y^2+32z^2\}=\frac{1}{2}N\{\frac{n}{2}=4x^2+y^2+8z^2\}$$

若 $z\mid n$.

反之，若上面等式成立，则在 BSD 猜想之下 n 为同余数.

其中 $N\{n=ax^2+by^2+cz^2\}$ 表示方程 $n=ax^2+by^2+cz^2$ 的整数解个数(其中 a,b,c 均为正整数).(详见冯克勤著《代数数论简史》湖南教育出版社：126)

§6 同余数表

由于 Tannell 的工作使我们了解到，同余数实际是使

$$x^2+ay^2=z^2 \text{ 和 } x^2-ay^2=t^2$$

同时有整数解的那种整数 a，它的魅力一部分在于其最小解常常有异乎寻常的大小，例如 $a=101$ 是一个同余数，Bastin 给出其最小解

$$x=2\ 015\ 242\ 462\ 949\ 760\ 001\ 961$$

$$y=1\ 18\ 171\ 431\ 852\ 779\ 451\ 900$$

$$z=2\ 339\ 148\ 435\ 306\ 225\ 006\ 961$$

$$t=1\ 628\ 124\ 370\ 727\ 269\ 996\ 961$$

而且像梅森素数一样不管对计算技术和计算机如何改进，可能还需要若干时间才能再发现一些更难征服的同余数. 以下是一份同余数表.

表 7 小于 1 000 的同余数(C)和非同余数(N)

(第 c 列和第 r 行的数是 $a=40c+r$)

c / r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	c / r
1	NC	CJ	□	□	CC	N9	NI	NJ	N9	□	NI	□	NJ	NJ	CC	NL	NI	N9	C&	CJ	□	□	NJ	N9	□	1
2	NB	NH	NJ	NX	□	NX	□	NT	NJ	NX	NJ	CC	NT	□	N2	CG	NJ	NJ	□	NJ	NT	NX	□	NX	NL	2
3	N3	N3	N3	N&	N3	NJ	□	N3	C&	□	NJ	N3	NJ	N3	NJ	□	N3	N3	CJ	NJ	NJ	NJ	N9	NJ	□	3
4	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	4
5	C3	□	CG	□	CG	CG	□	C&	□	CJ	□	C&	CJ	□	C&	□	C&	CJ	□	□	C&	□	CJ	□	CL	5
6	C&	C&	C&	□	C6	C5	C&	CA	C6	C&	□	C6	□	C6	C6	CJ	CG	□	□	C6	CC	□	C6	C6	CC	6
7	C7	C7	CG	C7	C7	□	CJ	C&	CJ	C7	CJ	CJ	C7	C&	□	C7	C7	CJ	C7	CJ	CJ	□	C7	□	C7	7
8	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	8
9	□	□	N3	N9	□	N9	N9	□	NJ	□	NI	NI	N9	□	NL	C&	N9	C&	□	N3	NI	N9	C&	NC	NJ	9
10	NX	□	□	NL	N8	CA	□	NL	CA	NL	CC	□	□	NL	NJ	NL	□	NJ	NT	NJ	□	□	CC	NJ	NJ	10
11	N3	NB	NB	N3	□	N3	N3	CG	N3	CG	NJ	NJ	N3	□	N3	NJ	CG	N3	C&	NJ	N3	NJ	□	□	N3	11
12	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	12
13	C5	C5	CG	CJ	C5	CJ	CJ	C5	□	C5	CJ	CJ	CJ	C&	CL	C5	C5	□	C5	C5	C&	C5	CL	CL	CJ	13
14	C6	□	C6	C6	CG	C6	C6	□	C6	CJ	□	C&	CJ	CJ	C&	C6	CJ	C6	C6	□	C&	CJ	CJ	C6	C&	14
15	CA	CG	CC	□	□	C&	CC	CJ	CJ	□	CJ	C&	□	C&	□	C&	CJ	CJ	□	□	CJ	□	CJ	C&	□	15
16	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	16

17	NL	N9	N1	C1	N9	NJ	CJ	□	NL	NJ	N9	C1	NJ	N9	N3	NJ	□	NJ	N9	C&	N9	N1	NT	N1	N1	17
18	□	NX	□	CG	N2	NX	NJ	NX	□	□	NJ	NX	NJ	NX	□	NJ	CA	NX	□	NX	N2	NJ	NT	NT	NJ	18
19	N3	N3	□	N3	N3	C&	NJ	CC	NJ	N3	N3	□	N3	□	NT	N3	N3	NJ	N3	NJ	□	N3	NJ	NT	NT	19
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	20
21	CA	C5	C5	C&	C5	CA	□	CJ	CJ	CJ	C5	C5	CJ	C5	CJ	□	C5	C5	CC	CJ	C5	CJ	C&	C5	□	21
22	C6	C6	CG	C6	C&	CJ	C6	C6	□	C6	C6	CG	C6	C5	C&	C6	C6	□	CJ	CJ	CJ	C6	CJ	CJ	C6	22
23	C7	□	C7	C&	CJ	C7	C7	CJ	□	C7	□	C7	C7	CL	CG	CL	C&	CJ	C7	□	C7	C7	C&	C&	C7	23
24	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	24
25	□	CA	NJ	CG	NJ	□	CG	NJ	NJ	NJ	□	CG	C&	NJ	□	□	NJ	NJ	NJ	NJ	□	NJ	C&	□	C&	25
26	NX	NB	NX	N2	N&	C&	NJ	□	NX	C&	C&	N2	NJ	CA	NX	N2	□	NT	NX	NJ	NJ	C&	NJ	NJ	NJ	26
27	□	N3	N3	□	N&	N3	NJ	N3	N3	□	NJ	N3	□	N3	N3	NT	NJ	NJ	□	N3	N3	□	N3	N3	C&	27
28	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	28
29	C5	CC	C5	C5	□	C5	C5	CJ	C5	C5	CA	CJ	C5	□	CJ	C&	C&	C5	CJ	CJ	C5	CJ	□	C&	CJ	29
30	CA	CA	CA	□	CA	CJ	□	CG	□	CA	CJ	CG	CG	□	CJ	□	C&	C&	□	CJ	CJ	C&	C&	□	□	30
31	C7	C7	CG	C7	C7	CA	C7	C7	□	C&	C7	CJ	C&	CJ	CJ	C7	C&	□	C7	C&	CJ	CJ	C7	C&	C7	31
32	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	32
33	N9	NJ	N1	□	N1	N1	NJ	C1	C1	N9	NL	N9	□	NJ	N1	N9	N1	NJ	N9	C&	□	□	N9	N1	N9	33
34	CA	NX	N&	CA	C&	□	N2	NX	NJ	NX	CG	NJ	C&	NX	□	NX	CA	NJ	NL	NX	NJ	N3	N2	□	NJ	34
35	NB	□	N&	NJ	NJ	NJ	□	□	NJ	C&	NJ	□	NJ	NJ	NJ	NJ	□	NJ	NJ	NJ	NJ	□	C&	NJ	C&	35
36	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	36
37	C5	CG	□	C5	C5	CJ	C5	C5	CG	C5	CJ	□	CG	C5	CL	□	C5	CL	C5	C5	□	C5	CL	C&	C5	37
38	C6	CG	C6	C6	□	CJ	C6	C&	C6	C6	CG	C6	C&	□	CJ	CJ	CJ	C6	C6	CG	C6	C6	□	C6	C6	38
39	CG	C7	C&	C&	C7	C7	□	C&	C7	C&	C7	C7	C7	CJ	C7	□	CJ	C7	CG	C&	C7	C&	C7	C&	□	39
40	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	40
r																										r
c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	c

在表中其中有些是取自多年前的一份阿拉伯手稿如 CA 条目中的第 17 个数，在 Dickson 的《数论史》一书中给出了许多早期的文献，其中包括 Fibonacci，Genocchi 以及 Gérardin 给出的一些数如标有 CG 的 43 个数由 BSD 知模 8 的余数是 5，6，7 的无平方因子数是同余数. 表中标有 C5，C7 以及 C6 的数都是模 8 余 5 或余 7 的素数，或是模 8 余 3 的素数，两个这样的素数的乘积，模 8 余 5 的素数的两倍，两个这样的素数的乘积的两倍，以及模 16 余 9 的素数的两倍. 这些数在表中分别标以条目 N3，N9，NX，NL 和 N2，Bastien 还给出其他一些非同余数（标有 NB 的数，虽然 $a=1$ 属于 Fermat，还有其他许多数更早的时候已为比如说 Genocchi 所知晓），他说道：a 不是一个同余数，如果它是模 8 同余于 1 的素数，且 $a=b^2+c^2$，$b+c$ 是 a 的非剩余，这对于条目标号为 N1 的一些数给出了解释.

条目 C& 和 N& 取自 Alter，Curtz 和 Kubota. 而 CJ 和 NJ 则取自 Jean Lagrange 的学位论文.

由 J. A. H. Hunter，M. R. Buckley 和 K. Gallyas 找到的另外一些大的同余数可见 Richard K. Guy 所著《Unsolved Problems in Number Theory》第一版.

§7　同余数与 Fermat 大定理

Fermat 宣称他证明了 Fermat 大定理，即 $x^n + y^n = z^n$，当 $n \geq 3$ 时无整数解.

现在很难断定 Fermat 是否证明了 $n = 3$ 的情形，不过他的确证明了一个定理，由这个定理可以推出 $n = 4$ 的情形. 这个定理就是前面提到的：

边长为整数的直角三角形的面积不是一个平方数.

写成公式就是：联立不定方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ \frac{1}{2}xy = n^2 \end{cases}$$

没有正整数解.

由罗士琳公式知

$$x^2 + y^2 = z^2$$

的一般解可以用下列公式表示

$$\begin{cases} x = (p^2 - q^2)r \\ y = 2pqr \\ z = (p^2 + q^2)r \end{cases}$$

可知 x 或 y 必定是偶数，所以 $\frac{1}{2}xy$ 一定是整数，利用罗士琳公式，上述定理也就是要证明

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)r \cdot 2pqr = (p^2 - q^2) \cdot pq \cdot r$$

不是个平方数.

费马为此发明了一个"无限递降法"来证明. 也就是说，假如 $(p^2 - q^2)pq$ 是个平方数，那么，他可以求出更小的 p_1, q_1 来，使得 $(p_1^2 - q_1^2) \cdot p_1q_1$ 也是平方数，这个步骤可以无限地做下去，于是就得到无穷多个数的正整数列

$$p + q > p_1 + q_1 > p_2 + q_2 > \cdots$$

但 $p + q$ 是有限数，这是不可能的.

由费马推出的这一定理马上可推出 $n = 4$ 的费马大定理. 假设正整数 x, y, z 满足

$$x^4 + y^4 = z^4$$

那么令

$$\begin{cases} a = y^4 = z^4 - x^4 \\ b = 2x^2z^2 \\ c = z^4 + x^4 \\ d = y^2xz \end{cases}$$

于是可得出正整数 a,b,c,d 满足不定方程组

$$a^2 + b^2 = (z^4 - x^4)^2 + 4x^4z^4 = (z^4 + x^4)^2 = c^2$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}y^4 \cdot 2x^2z^2 = (y^2xz)^2 = d^2$$

这与费马关于同余数的定理相矛盾.因此

$$x^4 + y^4 = z^4$$

没有正整数解.这样一来,对于 $n = 4,8,12,16,\cdots$ 也就是 $n = 4k$ 的情形,费马大定理得到证明,也许由于这个成功,费马误认为无限递降法可以应用到所有正整数上,这才引出"我已找到这一问题的绝妙证明,但空白太小不容我写下"这一历史"疑案".关于费马大定理详见胡作玄著《从费尔马到维尔斯——350年历程》(山东教育出版社).

参考文献

[1] RONALD ALTER. The congruent number problem[J]. Amer. Math. Monthly, 1980(87): 43-45.

[2] ALTER R, CURTZ T B. A note on congruent numbers[J]. Math. Comput., 1974(28): 303-305.

[3] ALTER R, CURTZ T B, KUBOTZ K K. Remarks and results on congruent numbers[J]. Proc. 3rd S.E.Conf. Combin. Graph Theory Comput, Congr. Numer, 1972(6):27-35.

[4] BASTIEN L. Numbres congruents[J]. Intermediaire Math, 1915(22): 231-232.

[5] BIRCH B J. Diophantine analysis and modular functions[M]. Proc. Bombay Colloq. Alg. Geom, 1968.

[6] CASSELS J W S. Diophantine equations with special reference to elliptic curves[J]. J. London Math. Soc, 1966(41):193-291.

[7] DICKSON L E. History of the Theory of Numbers[M]. Washington: Diophantine Analysis, 1920:459-472.

[8] GENOCCHI A. Note analitiche sopra Tre Sritti[J]. Annali di Sci. Mat. e Fis, 1855(6): 273-317.

[9] GERARDIN A. Numbres congruents[J]. Intermediaire Math., 1915(22):52-53.

[10] GODWIN H J. A note on congruent numbers[J]. Math. Comput., 1978(32):293-295; 1979(33):847.

[11] Jean Lagrange. These d'Etat de l'Universite de Reims, 1976.

[12] Jean Lagrange, Construction d'une table de nombres congruents[J]. Bull. Soc. Math. France Mém, 1977(49-50):125-130.

[13] PAUL MONSKY. Mock Heegner points and congruent numbers[J]. Math Z, 1990(204): 45-68; MR91e:11059.

[14] PAUL MONSKY. Three constructions of rational points on $Y^2 = X^3 \pm NX$[J]. Math Z, 1992(209):445-462.

[15] MORDELL L J. Diophantine Equations[M]. London: Academic Press, 1969:71-72.

[16] KAZUNARI NODA, HIDEO WADA. All congruent numbers less than 10000[J]. Proc. Japan Acad. Ser. A Math Sci, 1993(69):175-178.

[17] ROBERTS S. Note on a problem of Fibonacci's[J]. Proc. London Math. Soc, 1879-80(11): 35-44.

[18] SERF P. Congruent numbers and elliptic curves[J]. in Computational Number Theory(Proc. Conf. Number Theory, Debrecen, 1989 de Gruyter, 1991: 227-238.

[19] STEPHENS N M. Congruence properties of congruent numbers[J]. Bull. London Math. Soc, 1975(7):182-184.

[20] JERROLD B. Tunnell, A classical diophantine problem and modular forms of weight 3/2[J]. Invent, Math., 1983(72):323-334.

编后语　可以估计,近年来数学家埋头于一般化、形式化已到达这种程度,我们可以找到许多为一般化而一般化的即廉价又容易的工作,Pólya 称这种工作为稀释,它并不增加实质性的数学财富,而非常像往汤里加水来延长饭局.这是退化而非进步.老年时的 Klein 说:"在我看来,数学像座在和平时期出售武器的商店.橱窗里摆满了精巧的、富于艺术性又极具杀伤力的奢侈品,使那些内行的鉴赏家兴奋不已,这些东西的起源和用途——射击、打败敌人——已隐匿到幕后,是一点被人遗忘了."对于那些我们现在津津乐道的数学热门分支重提它们的起源与历史是恰当的也是必须的.

李再春先生毕业于东北师范大学,颇有才华,因生活原因,两度赴韩国、日本打工.

在本文集即将付印之际,惊悉李再春先生于 2006 年 4 月 1 日在深圳遭遇车祸,不幸身亡,天妒英才,令人扼腕,谨以此文以示悼念.

磨光变换与双随机方阵

[新] George L Wang[①]

§1　两道试题

1983 年环球城市数学竞赛高中组初级卷.

试题 1　K 个男孩围成一个圆圈，每个男孩手中都有偶数块糖. 一声令下，每个男孩将自己手中一半的糖给右边的男孩. 这之后，每个手中糖块数目为奇数的男孩都得到一块糖，以保持手中具有偶数块糖. 反复进行这一过程，证明：必有某一时刻，所有男孩手中糖块的数目相等.

解　设开始时男孩中最多的有 $2m$ 块糖，最少的有 $2n$ 块糖. 还可以假设 $m>n$，在完成一轮交换且拥有奇数块糖的男孩都得到一块糖之后，每个男孩手中最多只可能有 $2m$ 块糖. 这是因为，他最多能够留下 m 块糖，而通过交换最多能够得到 m 块糖，并且如果他有了 $2m$ 块糖，就不可能再得到额外的一块了. 这说明每做完一次之后，男孩手中最多的糖块数目始终不增加. 另一方面，至少存在一个原来只有 $2n$ 块糖的男孩，他给出了 n 块糖，但得到的数目 $>n$，故设有 l 个男孩有 $2n$ 块糖，则最多 l 次之后，男孩们手中最少的糖块数目要增加，于是若干次之后所有男孩手中的糖块数目一定会相等.

(1998 年环球城市数学竞赛初中组春季赛高级卷第 6 题)

试题 2　在圆桌上坐了 10 个人，在每人面前放一些坚果，共放了 100 个坚果. 某个信号后，每人开始将面前的坚果传给他右边的人，数额如下：如果他有偶数多个坚果，则给右边的人一半；如果他有奇数多个坚果，则给右边的人坚果数加 1 后的一半. 这个过程不断重复，试证最后每人面前都有 10 个坚果.

解　取 $1\leqslant i\leqslant 10, 1\leqslant j$. 设在第 j 次传递坚果时，第 i 个人给出的坚果数

---

① George L Wang，1964 年生，毕业于山东大学和新西兰奥克兰理工学院，现居奥克兰.

为 $g_i(j)$，余下 $k_i(j)$ 个坚果. 因此

$$g_i(j) - k_i(j) \leqslant 1 \qquad \forall i, j$$

令

$$g_{i-1}(j) + k_i(j) = k_i(j+1) + g_k(j+1)$$

其中 $g_0(j) = g_{10}(j)$，$\forall j$. 由于 $k_i(j+1)$ 和 $g_i(j+1)$ 的差最多与 $g_{i-1}(j)$ 和 $k_i(j)$ 的差相等，所以有

$$[g_{i-1}(j)]^2 + [k_i(j)]^2 \geqslant [k_i(j+1)]^2 + [g_i(j+1)]^2$$

定义

$$S(j) = \sum_{i=1}^{10} \{[k_i(j)]^2 + [g_i(j)]^2\}$$

因此 $S(j)$ 取整数值，且为 j 的非增函数. 因此一定存在 t，使得 $S(t)$ 为它的最小值. 这意味着

$$k_1(j), g_1(j), k_2(j), g_2(j), \cdots, k_{10}(j), g_{10}(j)$$

是相等的 20 个数字，而且当 $t \leqslant j$，$1 \leqslant i \leqslant 10$ 时

$$|g_{i-1}(j) - k_i(j)| \leqslant 1$$

假设它们不全为 5，那么存在 i, l，使得

$$g_i(t) = 6$$

$$k_{i+1}(t) = g_{i+1}(t) = \cdots = k_l(t) = g_l(t) = 5$$

并且 $k_{l+1}(t) = 4$，现在知道

$$g_{i+1}(t+1) = 6$$

$$k_{i+2}(t+1) = g_{i+2}(t+1) = \cdots = k_l(t+1) = g_l(t+1) = 5$$

又 $k_{l+1}(t+1) = 4$，最后有

$$g_l(t+l-i) = 6 \qquad k_{l+1}(t+l-i) = 4$$

但是在题设下，它们最多差 1，这导出矛盾. 所以证明了这 20 个数都必须是 5，因此经过 t 次传递后，每个人有 10 个坚果.

§2 磨光变换

1985 年中国科技大学常庚哲教授在《自然杂志》(1 卷 11 期) 发表文章介绍了这一试题的背景.

现在那道数学竞赛试题中每个小孩手中拿的不是糖果，而是砂糖. 编号为 i 的小孩一开始手中的砂糖质量为 x_i，$i = 1, 2, \cdots, n$. 调整的规则与原来的十分相近，每个小孩把手中的砂糖分一半给他的右邻. 当然，每个小孩也同时从他的左邻那儿接受了砂糖，质量是后者手中砂糖质量的一半. 与原先规则惟一不同

之处是：这里不考虑调整之后"补糖"的问题.自然，作为数学的抽象，我们也不考虑把任意质量的砂糖精确地平分为二所带来的技术上的困难.

设调整之后，第 i 个小孩手中的砂糖质量为 x_i'，$i=1,2,\cdots,n$. 从向量 $(x_1, x_2,\cdots,x_n)$ 到新向量 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 可以说成是经过了某种变换，这个变换具体地用公式来描述就是

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ x_2' = \dfrac{x_2+x_3}{2} \\ \vdots \\ x_n' = \dfrac{x_n+x_1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

撇开问题中 x_i 与 x_i' 的具体意义不谈，我们可以认为 x_i 可正可负，也可以是零. 按照式(1)，可以计算出新向量 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，所以式(1) 确定着一个把 n 维向量变为 n 维向量的变换.

我们来看看式(3) 所确定的变换的性质.

(1) 如果 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0$，那么变换之后所得的 $x_1'\geqslant 0, x_2'\geqslant 0,\cdots,x_n'\geqslant 0$.

具有这种性质的变换称为正变换. 简言之，正变换把非负向量仍变为非负向量.

(2) 如果 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，那么必有 $x_1'=x_2'=\cdots=x_n'=x$. 简言之，这个变换把平衡状态，即向量中所有分量均相等的状态，仍变为平衡状态.

(3) $x_1'+x_2'+\cdots+x_n'=x_1+x_2+\cdots+x_n$，用本节的例子来说明，即调整之后小孩手中砂糖的总质量仍然等于调整前砂糖的总质量.

以上三条性质，很容易用式(3) 来验证.

为了简便，我们用 $\boldsymbol{T}$ 来记由式(3) 所确定的变换，而把式(1) 记为[①]

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

式(2) 形象地表明了：将变换 $\boldsymbol{T}$ 作用于旧向量，便得到式(2) 左边的新向量. 我们再将同一个变换作用于新向量 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，得到 $(x_1'',x_2'',\cdots,x_n'')$，可

① 为方便起见，在本文中我们不区别列向量和行向量.

称这是用变换 T 的平方(记为 T^2) 作用于最初向量的结果. 连续对($x_1,x_2,\cdots,x_n$) 进行 m 次变换 T,得到($x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)}$),我们记为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix} = T^m \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

将 T 一次又一次,无止境地作用下去,相当于在式(3) 中令 $m=1,2,3,4,\cdots$. 受 §1 那道数学竞赛试题的答案的启示,我们自然地猜想到:不管($x_1,x_2,\cdots,x_n$) 是怎样一个向量,经过变换 T 的无限次的作用,最终会把各分量间的差别越拉越平,越来越接近平衡状态. 一说到"无限次",数学上总是用"极限过程" 来描述的. 也就是说,为了确切地说明由式(1) 所确定的变换 T 是一个磨光变换,同时考虑到性质(3),我们应当证明:

对于任何一组实数($x_1,x_2,\cdots,x_n$),经过由式(1) 所确定的变换 T 的反复作用,都有

$$\lim_{m\to\infty} x_1^{(m)} = \lim_{m\to\infty} x_2^{(m)} = \cdots = \lim_{m\to\infty} x_n^{(m)} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \tag{4}$$

证明 我们首先在限制

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \tag{5}$$

之下来证明式(4),稍后将会看到,这并不是一个本质的限制,一步一步的具体计算可得到

$$x_1^{(1)} = (x_1+x_2)/2$$

$$x_1^{(2)} = (x_1^{(1)}+x_2^{(1)})/2 = (x_1+2x_2+x_3)/2^2$$

$$x_1^{(3)} = (x_1^{(2)}+x_2^{(2)})/2 = (x_1+2x_2+x_3)/2^3+(x_2+2x_3+x_4)/2^3 = (x_1+3x_2+3x_3+x_4)/2^3$$

$$\vdots$$

由此可以看出这样一个事实:在用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示出 $x_1^{(n-1)}$ 的表达式中,分母是 2^{n-1},而分子是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的正整数系数的线性组合,即

$$x_1^{(n-1)} = \frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n}{2^{n-1}} \tag{6}$$

并且分子中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的系数之和

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=2^{n-1} \tag{7}$$

令 $\rho=\max(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)$. 显然,对于给定的一组数($x_1,x_2,\cdots,x_n$),$\rho$ 是一个定数. 由式(6) 及限制式(5) 可知

$$x_1^{(n-1)}=\frac{(\lambda_1-1)x_1+\cdots+(\lambda_n-1)x_n+x_1+\cdots+x_n}{2^{n-1}}=$$

$$\frac{(\lambda_1-1)x_1+\cdots+(\lambda_n-1)x_n}{2^{n-1}}$$

这里 $\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_n-1$ 都是非负整数，于是

$$|x_1^{(n-1)}|\leqslant\frac{(\lambda_1-1)|x_1|+\cdots+(\lambda_n-1)|x_n|}{2^{n-1}}\leqslant\frac{(\lambda_1-1)+\cdots+(\lambda_n-1)}{2^{n-1}}\rho$$

由式(7) 可知

$$|x_1^{(n-1)}|\leqslant\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)\rho$$

由对称性可以看出，对 $i=1,2,\cdots,n$，都有不等式

$$|x_i^{(n-1)}|\leqslant\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)\rho \tag{8}$$

把 T 对 $(x_1^{(n-1)},x_2^{(n-1)},\cdots,x_n^{(n-1)})$ 再连续作用 $n-1$ 次，并注意到由式(8) 有

$$\max(|x_1^{(n-1)}|,|x_2^{(n-1)}|,\cdots,|x_n^{(n-1)}|)\leqslant\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)\rho$$

因此利用式(8)，可得出对 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$|x_i^{(2n-2)}|\leqslant\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\max(|x_1^{(n-1)}|,\cdots,|x_n^{(n-1)}|)\leqslant\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)^2\rho$$

重复此种推理，可知对 $k=1,2,3,\cdots$，有

$$|x_i^{(kn-k)}|\leqslant\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)^k\rho\qquad i=1,2,3,\cdots,n \tag{9}$$

由于 $1-\frac{n}{2^{n-1}}$ 是一个小于 1 的非负实数，可见

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)^k=0$$

从而由式(9) 推知

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(kn-k)}=0\qquad i=1,2,\cdots,n$$

由于当 $m>k(n-1)$ 时，$x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)}$ 都介于 $x_1^{(kn-k)},x_2^{(kn-k)},\cdots,x_n^{(kn-k)}$ 中的最大数与最小数之间(想一想，为什么?)，因此上式实际上相当于

$$\lim_{m\to\infty}x_i^{(m)}=0\qquad i=1,2,\cdots,n$$

这样，就在限制(5) 之下证明了结论.

现在我们取消限制(5)，用 A 记 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均数，再令 $y_i=x_i-A$. 对向量 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 而言

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)-nA=0$$

限制(5) 得到满足，因此有

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)} = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{10}$$

对$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$作变换 T,得到$(y_1',y_2',\cdots,y_n')$. 易见 $y_i' = x_i' - A, i = 1,2,\cdots,n$. 更进一步可见 $y^{(m)} = x_i^{(m)} - A, i = 1,2,\cdots,n$,由式(10)可得

$$\lim_{m\to\infty}(x_i^{(m)} - A) = 0$$

即
$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

这样,就完整地证明了结论,这表明由式(1)所确定的 T 是一个磨光变换.

应当说,这个结论正是 §1 那道数学竞赛试题的背景材料. 虽然试题中的"调整"并不完全是变换 T,而是多了一步"向老师补要一块"的手续,但这一手续不但使得一次调整之后,每个小孩手中总有偶数块糖果,便于一分为二,而且更重要的是使得只需经过有限次调整即达到平衡状态.

§3　双随机方阵

一个非负方阵称为双随机的,如果它的每个行和与列和都是 1. 双随机矩阵在数学和物理学上有许多重要的应用.

若干小孩围圆桌而坐,每人手中有砂糖若干,我们称一次调整是把每人手中的砂糖分一半给右邻. 求证:经过不断调整,所有小孩手中的砂糖(质量)一样多.

在小孩个数不多的情形下,我们看如何用极限的方法解决问题.

不妨设 3 个小孩手中的砂糖的初始质量为 $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$,经过第 i 次调整后,他们手中的糖的量分别是 $a_i, b_i, c_i (i = 0,1,\cdots)$.

我们将证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = (a+b+c)/3$$

由调整法则

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2} \\ b_n = \dfrac{c_{n-1} + a_{n-1}}{2} \\ c_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \end{cases} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

于是

$$a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \cdots = a_0 + b_0 + c_0 = a + b + c$$

令
$$d=\frac{a+b+c}{3}$$
于是
$$a_n-d=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}-d=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}-a_{n-1}}{2}-d=$$
$$\frac{3d}{2}-\frac{a_{n-1}}{2}-d=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-d)$$
于是由递归
$$a_n-d=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-d)$$
当 $n\to\infty$ 时，$a_n-d\to 0$，即 $a_n\to d=\frac{a+b+c}{3}$.

对于一般情形，即 n 个小孩的情形，我们把每次调整对应于一个非负矩阵
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \tag{12}$$
设每个小孩最初手中的糖的质量是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，于是，第一次调整，便是
$$AX=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2+x_3}{2},\cdots,\frac{x_n+x_1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$
第 m 次调整是 A^mX，我们要证明
$$\lim_{m\to\infty}A^mX=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\cdots,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{\mathrm{T}}$$
只需证
$$\lim_{m\to\infty}A^m=\frac{1}{n}J$$
或记
$$A^{\infty}=\frac{1}{n}J$$

这一结论在1976年曾作为莫斯科电力机械制造学院大学生数学竞赛试题，原题为：在三角形的三条边写上三个数 $a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_3^{(1)}$，然后擦掉这些数．将

每边换成刚才另外两边的算术平均值(即换 $a_1^{(1)}$ 为 $a_1^{(2)}=\frac{a_2^{(1)}+a_3^{(1)}}{2}$,换 $a_2^{(1)}$ 为 $a_2^{(2)}=\frac{a_1^{(1)}+a_3^{(1)}}{2}$,换 $a_3^{(1)}$ 为 $a_3^{(2)}=\frac{a_1^{(1)}+a_2^{(1)}}{2}$)据所得各数再作类似计算,如此下去.证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_i^{(n)}$ 存在($i=1,2,3$),且等于$\frac{a_1^{(1)}+a_2^{(1)}+a_3^{(1)}}{3}$.

更一般地,我们不采取"分给右边小孩一半"的调整方法,而采用"分给其他每个小孩若干使每个小孩分给右边第 i 个同伴的比例都一样"的方法,则我们的调整矩阵便是如下的双随机矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ m_n & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_2 & m_3 & \cdots & m_1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

其中 $m_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}m_i=1$,于是,第一次调整便是

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix} m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n \\ m_nx_1+m_1x_2+\cdots+m_{n-1}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ m_2x_1+m_3x_2+\cdots+m_1x_n \end{pmatrix}$$

易见式(13)是一个循环双随机矩阵,即把第一行依次向右移位,便得到下面各行.当 $m_1=m_2=\frac{1}{2}$,$m_i=0$,$i=3,4,\cdots,n$,式(13)便是式(12).这种双随机矩阵所描述的变换,称为磨光变换.

从定义易知 $\boldsymbol{A}$ 是双随机方阵,当且仅当 $\boldsymbol{JA}=\boldsymbol{AJ}=\boldsymbol{J}$,于是,我们有

定理 双随机矩阵的积是双随机的.

§4 图论背景

1.介绍

2003年《美国数学月刊》发表了 Glenn Iba 和 James Tanton 的文章,介绍了前文那一试题的图论背景.

现在考虑那些有最少糖果的人,设 $m\in\mathbf{N}$ 为这个最小的糖果数.在重分配时,这个人将分 $m/2$ 粒糖果给他右边相邻的人,同时从他的左边收到至少 $m/2$ 粒糖果.只有当他左边的人有同样少的糖果时,他拥有的糖果数才不会增加.这

样一来,如果有 k 个人坐成一排,每个人都有 m 粒糖果,在一次重分配后,前 $k-1$ 个人仍有 m 粒糖果,但第 k 个人将有较多的糖果(除非每个人都有 m 粒糖果,在此情形分配已经稳定).因此,每次重分配之后,有最少糖果的人的数目在减少,因为每个人拥有的糖果数存在上界,这个事实使得形势稳定下来.

我们能否预先估计需要多少次反复分配才能使分糖果游戏稳定下来,同时它取怎样的稳定值?这些问题仍然是公开的.各种年龄的学生热衷于探究这些问题,比如试验不同糖果的初始分配数,把结果制表,从中搜寻可理解的模型.

糖果游戏有许多变形,比如,不是加糖果,而是学生吃掉奇数粒糖果使他拥有的糖果数减少到某个偶数,那么会发生什么情况?或者,如果每位学生分掉他所有的糖果,比如一半给左边,另一半给右边,又会发生什么情况?

最后,马萨诸塞州东康普顿市北汉普顿威洛比中学的 Alan Lipp 提出了以下问题:假设 Angelica 在游戏开始时有 12 粒糖果,在每一次口哨吹响时,把她的糖果的 1/3 给她右边的邻居 Beatrice,在接受了她左边邻居给的糖果后,Angelica 向上进到下一个 3 的倍数.在另一方面,Beatrice 在每一轮考虑 5 的倍数,把她 2/5 的糖果给她右边的邻居,而且总把她的糖果向上进到下一个 5 的倍数.每个学生以同样的方式操作,用自己固定的一个数,以及以这个数为分母的固定分数.

下面的表显示了一个 5 个玩家 A,B,C,D 和 E 的糖果游戏(表 1),游戏的"状态"在 5 轮后固定下来.Alan Lipp 和他的学生发现这些推广的糖果游戏好像总是要稳定下来,只要有至少一个玩家用不同于 1 的分数操作,同时没有人以分数 0 操作.

表 1

玩家	A	B	C	D	E
分给右边玩家的糖果的分式比例	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
舍入的倍数	3	5	1	2	4
初始分布	12	10	3	4	8
第 1 轮	15	10	4	6	4
第 2 轮	15	15	4	8	4
第 3 轮	15	15	6	8	8
第 4 轮	18	15	6	10	8
第 5 轮	18	15	6	12	8
第 6 轮	18	15	6	12	8

在本节中，我们通过进一步推广糖果游戏来证明这个结果. 假设每个玩家记住一个固定的整数，把他的糖果的一部分给他的几个或许所有的朋友，而且在接收到他朋友给的糖果后把他的糖果数补充到他选取的整数的下一个数部. 在适当的条件下，这些糖果游戏是"有界"的，也就是，即使游戏进行无限多轮也只需要有限多的糖果（当然，前提是可以供应无限多的糖果）. 这样，在有限轮反复后，这个游戏中的糖果分布进入一个循环，我们发现了保证这个循环长度为1的条件（Alan Lipp 的游戏满足这些条件），那意味着游戏的糖果数稳定到固定的分布.

这里的关键是把注意力集中到单块糖果在游戏进行时的移动上. 这样的一块糖果自己只能处于有限多种"状态"中，也就是，在有限多玩家的手上，游戏可以看做是一个在这些状态间移动糖果的随机过程（我们假设每个玩家随机地分配他的糖）. 换句话说，以这种方式研究的糖果游戏是一个有限 Markov 链. 看来，在下面的讨论中用 Markov 理论中的术语更合适些. 我们对我们需要的所有结果给了独立的证明.

2. 对游戏的描述

假设 n 位学生坐成一圈，每个人手中有一堆糖果，以 c_i 记第 i 位玩家最初拥有的糖果数（$i\in[n]=\{1,2,\cdots,n\}$），用 c 表示 $(\mathbf{Z}^+)^n$ 中的列向量 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$（这里 $\mathbf{Z}^+=\mathbf{N}\cup\{0\}$）.

在游戏的一次迭代中，每个玩家把他的糖果分发给组中的一些或者所有成员. 对属于 $[n]$ 的 i 和 j，用 $q_{ij}(\in Q)$ 表示玩家 i 给玩家 j 的糖果数的比例. 这里 $0\leqslant q_{ij}\leqslant 1$，$\sum\limits_{k\in[n]}q_{ik}=1$. 这些比例在整个游戏中保持不变，注意到玩家 i 为自己保留了一部分糖果，如果 $q_{ii}\neq 0$，设 Q 是 $n\times n$ 矩阵，它的 (i,j) 一项是 q_{ij}，我们把 Q 叫做游戏的转移矩阵. 例如，表1中描述的游戏的转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

我们假设，对每个 $i\in[n]$，值 c_i 是一个固定的正整数 D_i 的倍数，即既约形式的分式 $q_{i1},q_{i2},\cdots,q_{in}$ 的分母的公倍数. 这时，c_iq_{ij} 是一个整数，每个玩家在游戏的第一轮被给与整数块糖果. 为了保证在后来的游戏满足这个条件，我们要

求玩家 i 在接收到他的同伴给的糖果后增加他的新的糖果数到下一个 D_i 的倍数.

设 $B(c)$ 代表游戏的一轮迭代后新的糖果分布的列向量,$B^2(c)$ 是两轮游戏后的糖果分布,如此等等(从而 B 是"分配和向上进"操作).我们把$(\mathbf{Z}^+)^n$ 的一个向量 s 叫做游戏的一个状态,如果 $s = B^r(c)$,这里 $r \in \mathbf{Z}^+$(我们认为 $B^0(c) = c$),我们也说这种情况下的糖果游戏在 r 轮后处于状态 s.

对 $x, d \in \mathbf{N}$,用$[x]_d$表示大于或者等于 x 的 d 的最小倍数,作用在状态 s 上的操作 B 为

$$B(s)_i = \Big[\sum_{j=1}^{n} q_{ji}s_j\Big]_{D_i} = [(Q^{\mathrm{T}}s)_i] \qquad i \in [n]$$

如果 $B(s) = s$,我们把糖果分布 s 叫做游戏的一个固定状态.我们把$(\mathbf{Z}^+)^n$ 任意一个向量 u,不需要是游戏的一个状态,叫做 B 的一个不动点,如果 $B(u) = u$.

设 s 是 r 轮游戏后的状态.这时,$T_r = \sum\limits_{i\in[n]} s_i$ 记录了在第 r 轮游戏后参加者拥有的糖果总数.注意到下面的

$$\sum_{i\in[n]}(Q^{\mathrm{T}}s)_i = \sum_{i\in[n]}\sum_{j\in[n]} q_{ji}s_j = \sum_{j\in[n]} s_j\Big(\sum_{i\in[n]} q_{ji}\Big) = \sum_{j\in[n]} s_j$$

这说明 $T_{r+1} \geqslant T_r$,等式成立当且仅当 $B(s) = Q^{\mathrm{T}}s$(即没有发生"向上进").我们把$\{T_r\}_{r\in\mathbf{Z}^+}$ 叫做游戏的糖果总数序列.

我们用转移矩阵 Q,正整数 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 初始分布 c 把糖果游戏表示为 $C(Q; D_1, D_2, \cdots, D_n; c)$——或者简记为 $C(Q)$——如果正整数 D_i 和初始分布是隐含的.

3. 有界的游戏

称糖果游戏 $C(Q; D_1, D_2, \cdots, D_n; c)$ 有界,如果存在$(\mathbf{Z}^+)^n$ 中向量 u 对游戏的所有状态 s,所有的 $i \in [n]$ 满足 $s_i \leqslant u_i$.对一个有界游戏,相应的总数序列$\{T_i\}$ 像上面那样被$(\sum\limits_{i\in[n]} u_i)$ 限制,因此它收敛到一个常数.所以,在游戏经过有限多次迭代后,"向上进"的情况不会发生,对状态 s 的操作 B 只是对 s 左乘矩阵 Q^{T}.这时,对游戏的数学分析化简为对一个普通的随机过程的分析,对于后者,许多结果已经知道了.

北京数学奥林匹克竞赛中的糖果游戏以及在本节的介绍中提到的糖果游戏都被向量$\{M, M, \cdots, M\}$ 所限制,这里的 M 是糖果的初始分布中玩家拥有的糖果数的最大值.但不是所有的糖果游戏都有界,例如,在图 1 中描述的游戏明显会"消耗"无限多糖果.

容易看到所有的糖果游戏一定会落入摆动或稳定的形态(对$(\mathbf{Z}^+)^n$ 中的一

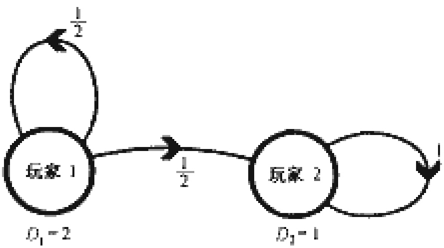


图 1

个固定向量 u. 在 $(\mathbf{Z}^+)^n$ 中只有有限多 s 满足 $s_i \leqslant u_i$). 因此, 在一个有界的游戏 $C(Q; D_1, D_2, \cdots, D_n; c)$ 中, 一定存在一个糖果分布 s 和一个最小正整数 d 满足 $s = B^r(c) = B^{r+d}(c)$, 这里的 r 是 $\mathbf{N}$ 中的某个数, 我们把 d 叫做摆动形态的周期.

我们将找到使糖果游戏有界的条件.

4. 有向图、路和周期

如图 1 那样的图像是描述糖果游戏的自然方式. 对一个 n 位玩家的糖果游戏 $C(Q)$, 我们把它联想为一个 n 点(标为 1 到 n)的有向图 $G(Q)$, 每个点代表一位玩家, 有从玩家 i 到玩家 j 的有向边当且仅当 $q_{ij} \neq 0$. 如果对某个 i 有 $q_{ii} \neq 0$, 我们画一个从顶点 i 到自己的任意方向的环. 把游戏的玩家看做相应有向图的顶点, 或者反过来, 都是很方便的, 我们常常把有向图简记为 G.

先介绍帮助我们描述单粒糖果移动的术语, 我们说两个玩家相邻, 如果在 G 中他们之间有一条有向边. G 中一条从玩家 i 到 j 的长 l 的路是指 G 中的一个顶点(不需要不同)序列 $i = i_0, i_1, i_2, \cdots, i_l = j$, 它满足对任意 $r \in \{0, 1, 2, \cdots, l-1\}$, 存在从点 i_r 到 i_{r+1} 的有向边. 这样的路对应着个别糖果在游戏期间的移动路径. 一个圈是一条开始和终止于同一个顶点的路, 我们说一个圈是基于玩家 i 的, 如果我们希望把这个圈想象为从 i 开始和结尾.

玩家 i 通向玩家 j, 如果在 G 中存在一条从点 i 到 j 的路, 拿糖果游戏来说, 这表示一粒糖果有可能从玩家 i 手中移动到玩家 j 拥有的糖果堆中.

定义 1 一个 n - 人的糖果游戏叫做不可约, 如果所有的玩家 i 通向所有的玩家 j.

如果对玩家 i, j, k, 以 ρ_1 表示在 G 中从 i 到 j 的路, ρ_2 表示从 j 到 k 的路, 那么我们用 $\rho_1\rho_2$ 表示这两条路的合成, 这是一条从点 i 到点 k 的路.

有个问题, 特定的一粒糖果离开一个玩家, 是否可能在某个时候回到这个玩家手中?

定义 2　在 n - 人糖果游戏中，玩家 i 叫做回归的(recurrent)，如果只要 i 通向 j，那么 j 也通向 i，否则这个玩家叫做过渡的(transient).

对一个回归玩家 i，G 中任意一个从 i 出发的路是基于 i 的一个圈的一部分，也就是所有离开那个玩家的糖果有机会回到那个玩家手中. 对过渡玩家，情况就不是这样. 显然，在一个不可约游戏中，所有玩家都是回归的. 图 2 显示了一个 4 个玩家的游戏的有向图. 显然，玩家 1,3 和 4 是回归的，但玩家 2 不是.

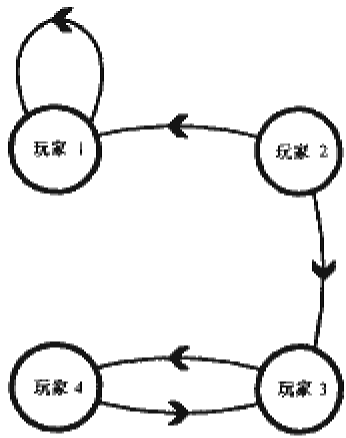


图 2

下面的引理可以直接验证，它提供了关键的步骤，把复杂的糖果游戏分化成易处理的子游戏.

引理 1　设 i 和 j 是一个糖果游戏中的玩家，如果 i 是回归的而且 i 通向 j，那么 j 是回归的.

我们需要另外一个定义.

定义 3　在一个糖果游戏 $C(Q)$ 中，我们说玩家的一个子集 S 是闭的，如果每当某个 i 属于 S 而且 i 通向 j 时，j 也属于 S. 子集 S 叫做不可约的，如果对所有属于 S 的 i 和 j，存在一条完全包含在 S 中的从 i 到 j 的路.

我们有下面的重要结果.

引理 2　在一个有限多玩家的糖果游戏中，所有回归玩家的集合是玩家的闭不可约子集的不交并.

证明　设 i 是一个糖果游戏 $C(Q)$ 的回归玩家，$S_i=\{j \mid$ 在图 $C(Q)$ 中，i 通向 $j\}$. 这时，S_i 是一个回归玩家组成的闭集，容易验证它是不可约的. 而且，如果 i 和 j 都是回归玩家，那么或者他们的一个通向另一个，结果 $S_i=S_j$，或者

他们都不通向对方，那么 S_i 和 S_j 是不相交的.

我们将发现搞明白不可约糖果游戏中的圈的长度很重要.我们将开始使用一些数论.设 I 是自然数的非空子集(可能无限).我们把 $d(\in \mathbf{N})$ 叫做 I 的公约数，如果对 I 中所有的 n 有 $d \mid n$.我们说 d 是 I 的最大公约数，如果 d 是一个公约数，而且对 I 的所有其他公约数 a 有 $a \mid d$.我们定义空集的最大公约数为 $d = \infty$.自然数的任意子集 I 都存在最大公约数，我们把它记做 $\gcd(I)$.

对糖果游戏 $C(Q)$ 中的一个玩家 i，我们设 $I_i = \{l \in \mathbf{N} \mid$ 存在一个基于 i 的长 l 的圈$\}$.

定义 4　在一个糖果游戏 $C(Q)$ 中，$d_i = \gcd(I_i)$ 叫做玩家 i 的周期.(注意到如果 $q_{ii} \neq 0$，那么 $d_i = 1$.)

"周期"这个概念在 Markov 理论中是标准的.

引理 3　设 i 和 j 是糖果游戏中的两个不同玩家，如果 i 通向 j 而且 j 通向 i，那么 $d_i = d_j$.

证明　基于 i 和 j 的圈的存在性说明两个玩家都没有无限周期.设 p_1 是一条从 i 到 j 的长 l_1 的路，p_2 是一条从 j 到 i 的长 l_2 的路.这时 p_1p_2 是一条基于 i 的长 $l_1 + l_2$ 的圈，因此 $d_i \mid (l_1 + l_2)$.

现在考虑基于 j 的任意一个圈 q，假设它长 l，这时 p_1qp_2 是一个长 $l_1 + l + l_2$ 的基于 i 的圈，因此 $d_i \mid l$.

这样，d_i 是所有基于 j 的圈长度的公约数，因此 $d_i \mid d_j$，同样，$d_j \mid d_i$，这说明这两个周期是相等的.

引理 3 有下面的重要推论.

推论 4　在不可约游戏中，所有玩家有相同的周期.

我们命名一种特殊情况.

定义 5　一个不可约游戏叫做非周期的(aperiodic)，如果玩家们的共同周期等于 1，特别，如果对某个 i 有 $q_{ii} \neq 0$，那么游戏是非周期的.

在继续以前我们做更多的观察，设 i 是糖果游戏中的一个玩家.在相应的子集 I_i 中，圈的相互邻接(juxtaposition)说明 I_i 在加法下是闭的.考虑玩家 i 的周期为 1 的情况.

引理 5　设 I 是在加法下闭的自然数的非空子集，而且 $\gcd(I) = 1$，那么，存在一个自然数 N 使得 I 包含所有大于等于 N 的自然数.

证明　在 I 中选两个元 a_1 和 a_2，这里 $a_2 > a_1$，设 $k = a_2 - a_1$，如果 $k \neq 1$，那么 k 不是 I 的最大公约数，而且在 I 中存在一个元 b，b 不是 k 的倍数.假设 $(s-1)k < b < sk$，这里 $s \in \mathbf{N}$，这时 sa_2 和 $sa_1 + b$ 是 I 中差小于 k 的两个元.重复使用这个过程，一定会产生属于 I 的两个连续整数.

假设 a 和 $a+1$ 是这两个整数，这时，按照集合的封闭性

$$a^2+r=(a-r)a+r(a+1)\in I$$

对每个满足 $0\leqslant r\leqslant a$ 的 r 成立，也是说，a^2-1 之后的连续 a 个整数属于 I.

在这连续 a 个数上重复加上 a，我们就证明了 a^2 以及比它大的整数都属于 I.

作为这个引理的有趣应用，读者可以玩玩下面的问题作为娱乐：设 a 是一个奇的正整数，$N=a^2-1$，只用 a 和 $a+2$ 单位的硬币，证明可以找出大小为 N 或更大的零钱，但找不出 $N-1$ 的零钱.

5. 不可约游戏是有界的

我们将说明所有不可约游戏是有界的. 下面的引理是 Markov 理论中的标准结果. 在这里，我们用非常基础的代数方法给出一个证明.

引理 6 设 Q 是一个 n 位玩家的不可约糖果游戏的 $n\times n$ 转移矩阵. 这时存在一个 $\mathbf{Q}^n$ 中向量 $\boldsymbol{f}$，除了一个正因子是惟一的，对每个 $i\in[n]$ 满足 $f_i>0$，而且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}$.

证明 以 $\mathbf{1}$ 表示每个元等于 1 的 n - 向量，$\mathbf{0}$ 表示零向量，$\boldsymbol{Id}$ 表示 $n\times n$ 单位矩阵. 设 $\boldsymbol{Q}'=\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Id}$，因为 $\boldsymbol{Q}\mathbf{1}=\mathbf{1}$，所以 $\boldsymbol{Q}'$ 的列的秩严格小于 n. 从而，$\boldsymbol{Q}'$ 的转置矩阵 $(\boldsymbol{Q}')^{\mathrm{T}}$ 的行秩也小于 n. 这样，当工作在有理数域上时，我们能找到一个非平凡向量 $\boldsymbol{f}\in\mathbf{Q}^n$ 满足

$$(\boldsymbol{Q}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$$

或者，等价地

$$(\boldsymbol{Q}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}$$

我们先证实这个向量 $\boldsymbol{f}$ 的元素或者都是非负的或者都是非正的. 假设相反，我们能找到 $i',j'\in[n]$ 使得 $f_{i'}>0,f_{j'}<0$. 在与游戏对应的有向图中选取一条从 i' 到 j' 的路. 顺着这条路，我们能找到两个相邻玩家 i 和 j 满足 $q_{ij}\neq 0$，$f_i>0,f_j<0$.

设 $S^+=\{i\in[n]\mid f_i\geqslant 0\}$，$S^-=\{i\in[n]\mid f_i<0\}$，因为 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$，所以

$$\sum_{i\in S^+}f_i=\sum_{i\in S^+}\sum_{j\in[n]}q_{ji}f_j=\sum_{i\in S^+}\sum_{j\in S^+}q_{ji}f_j+\sum_{i\in S^+}\sum_{j\in S^-}q_{ji}f_j<$$
$$\sum_{i\in S^+}\sum_{j\in S^+}q_{ji}f_j=\sum_{j\in S^+}\Big(\sum_{i\in S^+}q_{ji}\Big)f_j\leqslant\sum_{j\in S^+}f_j$$

是一个矛盾.

于是我们假设 $\boldsymbol{f}$ 所有的分量都是非负的（否则用 $-\boldsymbol{f}$）. 因为 $\boldsymbol{f}$ 是非平凡的，它至少有一个正分量，我们证明它所有的分量是严格正的.

假设相反我们找到下标 i 和 j 有 $f_j>0,f_i=0$. 顺着一条从 j 到 i 的路，我们可以假设 i 和 j 是相邻的，有 $q_{ji}\neq 0$，这时

$$0 = f_i = \sum_{j \in [n]} q_{ij} f_j > 0$$

又一个矛盾.

最后,我们证明满足 $Q^{\mathrm{T}} f = f$ 的有正分量的向量 f 除了一个正因子外是惟一的. 设 g 是 Q^{T} 的另一个这样的特征向量. 通过改变比例,我们可以假设 $f_1 = g_1$. 假设我们找到一个下标 r 使 $f_r \neq g_r$, 不失一般性,假设 $f_r < g_r$, 选 $\varepsilon \in (1, g_r/f_r)$. 这时 $g - \varepsilon f$ 是 Q^{T} 的一个特征向量(特征值为 1), 有 $(g - \varepsilon f)_1 < 0$, $(g - \varepsilon f)_r > 0$, 但像我们前面看到的,没有这样的特征向量存在.

注　f 的分量有物理上的解释:对每个 i, $f_i^{-1} \sum_{j \in [n]} f_j$ 是一个特定的糖果从玩家 i 手中离开又回到玩家 i 所需要的游戏迭代的期望次数(假设玩家随机分配糖果).

我们现在用这个引理,考虑一个不可约糖果游戏 $C(Q; D_1, D_2, \cdots, D_n; c)$. 设 f 是 Q^{T} 的特征值为 1 的特征向量,有正分量. 通过适当改变比例,我们可以假设 f 的所有分量都是整数. 设 $u = D_1 D_2 \cdots D_n f$. 这时,对每个 i, u_i 是 D_i 的一个倍数,而且 $[(Q^{\mathrm{T}} u)_i]_{D_i} = [u_i]_{D_i} = u_i$. 这样,向量 u 代表一个在游戏进行中保持不变的糖果分布. 我们断定:

引理 7　每个不可约糖果游戏有不动点.

(注意,对不动点 u 乘以任意大的量,我们可以保证 u 的分量任意大.) 例如,表 1 中描述的游戏是不可约的,而且有 $u = (18, 15, 6, 12, 8)^{\mathrm{T}}$ 作为固定点. 它是游戏的转移矩阵的转置矩阵 Q^{T} 的一个特征向量,引理 7 有一个有趣的推论.

引理 8　每个不可约糖果游戏是有界的.

证明　设 $C(Q; D_1, D_2, \cdots, D_n; c)$ 是一个 n 位玩家的不可约糖果游戏,初始糖果分布为 c, 选一个 Q^{T} 的不动点 u, 它的分量充分大,使得 $c_i \leqslant u_i$ 对所有 i 成立,也假设选取 u 时使它的每个分量 u_i 是 D_i 的倍数. 现在,对每个 i

$$\sum_{j \in [n]} q_{ji} c_j \leqslant \sum_{j \in [n]} q_{ji} u_j = u_i$$

因此

$$B(c)_i = \Big[\sum_{j \in [n]} q_{ji} c_j\Big]_{D_i} \leqslant [u_i]_{D_i} = u_i$$

这样我们证明了,对每个 i 成立 $c_i \leqslant u_i$ 隐含着对每个 i 也成立 $B(c)_i \leqslant u_i$. 重复应用上面的结果,我们证实了对所有的 $r \in \mathbf{N}$ 以及所有的 $i \in [n]$ 成立 $B^r(c)_i \leqslant u_i$.

我们现在已能够断定所有的不可约糖果游戏,不管它的初始糖果分布是什么,进行有限多步后终会进入摆动的形态,把这样的游戏继续下去并不需要无

限地供给糖果.

6.关于摆动的周期

设 $C(Q)$ 是一个不可约的 n 位玩家的糖果游戏,初始分布为 c.按照前一节的结果,我们知道一定存在一个糖果分布 s 和一个最小正整数 d 使得 $s = B^r(c) = B^{r+d}(c)$ 对某个 $r \in \mathbf{N}$ 成立,而且,我们有

$$B(B^k(s)) = Q^{\mathrm{T}}(B^k(s))$$

对所有 $k \in \mathbf{Z}^+$ 成立.

让我们介绍一些术语以描述糖果分布偏离固定状态的程度.先从 Q^n 中选一个向量 f,它的分量为正而且 $Q^{\mathrm{T}}f = f$.通过改变比例,我们可以假设 $s_i \geq f_i$ 对所有 i 成立,而且对至少一个下标 j 有 $f_j = s_j$.在我们选取的 f 的情况,我们叫玩家 i 在第 m 轮弱丰的(weakly abundant),如果 $B^m(c)_i \geq f_i$;严格丰的(strictly abundant),如果 $B^m(c)_i > f_i$.在第 r 轮,所有玩家都是弱丰的.

引理9 设术语仍像前面几段那样.

(1)如果所有玩家在游戏的第 $m(\geq r)$ 轮是弱丰的,那么他们在游戏的下一轮仍然这样.

(2)如果在游戏的第 $m(\geq r)$ 轮,所有玩家是弱丰的,玩家 i 是严格丰的而且对某个 j 有 $q_{ji} \neq 0$,那么在第 $m+1$ 轮,玩家 j 是严格丰的.

证明 设 $c' = B^m(c)$ 以及 $c'' = B^{m+1}(c) = Q^{\mathrm{T}}c'$,如果对每个 k 有 $c_k' \geq f_k$,那么对每个 i 有

$$c_i'' = \sum_{k\in[n]} q_{ki}c_k' \geq \sum_{k\in[n]} q_{ki}f_k = f_i$$

这证明了(1).

如果对每个 k 有 $c_k' \geq f_k$,对某个 i 和 j 有 $c_i' > f_i$ 而且 $q_{ij} \neq 0$,那么

$$c_j'' = \sum_{k\in[n]} q_{kj}c_k > \sum_{k\in[n]} q_{kj}f_k = f_j$$

这证明了(2).

这个引理有些重要推论.

推论10 如果玩家 i 在第 $m(>r)$ 轮是严格丰的,而且是一个长 l 的圈的一部分,那么玩家 i 在第 $m+l$ 轮又是严格丰的.

推论11 假设在一个不可约糖果游戏 $C(Q)$ 中,玩家 i 在游戏的所有轮是严格丰的.如果 i 通向 j,那么在有限多次迭代后,玩家 j 也永远是严格丰的.

这些重要的发现允许我们完成对不可约糖果游戏的长期行为的分析.下面结果的证明综合了这篇文章谈到的所有想法.

定理12 设 $C(Q;D_1,D_2,\cdots,D_n;c)$ 是一个 n 位玩家的不可约糖果游戏,那么游戏是有界的而且它的状态将进入摆动的形式.摆动的周期是玩家们的公

共周期的一个因子. 因此,如果游戏是非周期的,那么游戏的糖果分布将稳定到一个固定状态.

证明 设 $s \in (\mathbf{Z}^+)^n$ 是游戏状态进入摆动形式后的一个状态. 像以前那样,选一个向量 $f \in (\mathbf{Q}^+)^n$ 满足条件 $Q^{\mathrm{T}}f = f$,对所有 i 有 $s_i \geqslant f_i$,而且对至少一个 j 有 $f_j = s_j$,像以前那样,在游戏的特定轮用弱丰或者严格丰来描述玩家(相对于向量 f).

如果 $f = s$,那么 s 是游戏的一个稳定状态,摆动的周期是1,我们就完成了证明. 我们继续考虑假设:对某个 k 有 $s_k > f_k$.

我们先证明游戏是非周期时的定理. 考虑严格丰的玩家 k,按照引理5,存在基于 k 的圈,它们的长度都大于某个值 N. 从而,玩家 k 在游戏的 $r + N$ 轮后永远是严格丰的(推论10). 因为游戏是不可约的,玩家 k 通向其他每个玩家. 因此按照推论11,在又经过有限多轮后,所有玩家永远是严格丰的. 结果,游戏再也不能回到状态 s,这是一个矛盾. 因此一定只有一种情况:非周期游戏稳定到固定状态.

另一方面,假设玩家们的公共周期 $d \neq 1$,这时在相应的有向图 G 中所有圈的长度被 d 整除. 考虑糖果游戏 $C(Q^d; D_1, D_2, \cdots, D_n; s)$. 因为对原先的游戏的操作 B 作用在状态 s 上,而且对所有"稍后"状态的操作是左乘 Q^{T}(假设没有舍入),那么对新游戏,相应的操作恰好是 B^d,即左乘以 $(Q^d)^{\mathrm{T}}$,也没有舍入. 这样,我们的新糖果游戏 $C(Q^d)$ 的一次迭代刚好对应于原先的游戏从分布 s(不是 c)开始的 d 次迭代. 与游戏 $C(Q^d)$ 对应的有向图记为 $G(Q^d)$.

考虑玩家 i,我们有

$$\begin{aligned}\gcd &= (\{l \in \mathbf{N}: \text{在 } G(Q^d) \text{ 中存在基于 } i \text{ 的长为 } l \text{ 的圈}\}) = \\ &\gcd(\{l \in \mathbf{N}: \text{在 } G(Q) \text{ 中存在基于 } i \text{ 的长为 } ld \text{ 的圈}\}) = \\ &\frac{1}{d} \cdot \gcd(I_i) = 1\end{aligned}$$

这样,游戏 $C(Q^d)$ 是非周期的. 但它不一定是不可约的.

论断 游戏 $C(Q^d)$ 中的所有玩家是回归的.

为了验证这个论证,我们假设在游戏 $C(Q^d)$ 中,玩家 i 通向玩家 j,这时在 $G(Q)$ 中存在一条从 i 到 j 的长为 d 的某个倍数的路. 因为游戏 $C(Q)$ 是不可约的,所以在 $G(Q)$ 中存在一条从 j 到 i 的路. 因为所有的圈的长能被 d 整除,这条路的长度也一定是 d 的倍数,从而在 $G(Q^d)$ 中存在一条从 j 到 i 的路,这说明玩家 i 是回归的,因此断言成立.

按照引理2的结果,我们把玩家的集合划分为闭的不可约集的不交并. 因为每个子集自己是一个非周期的游戏,游戏 $C(Q^d)$ 一定稳定到一个固定状态. 这意味着游戏 $C(Q)$ 每经过 d 次迭代就回到同样的状态. 因此,摆动的周期是

d 的因子.

作为一个例子,考虑这样一个游戏,每个玩家把他的一半糖果分给左边的邻居,一半给右边的邻居.如果玩家数为奇数,游戏是不可约的,会稳定到一个固定状态.当玩家数为偶数时,游戏状态可能发生周期为 2 的摆动.为了从另一方面看清这一点,想象玩家们在迭代之间交换坐位,随着分给右边的一半糖果一起向右边移动一个座位.这种情况相当于每个人简单地把他手中一半糖果交给左边隔一个座位的人.如果围成一圈的是偶数个人,这相当于分别分析两个不交叉的团体,每一个一定会稳定下来(但不需要经过同样多的迭代).对奇数个人的游戏,问题相当于 1962 年北京数学奥林匹克竞赛中描述的游戏,那一定会稳定下来的. Alan Lipp 的游戏也是不可约而且非周期的,因此糖果分布会收敛到固定分布.

注:此节摘自《数学译林》,2003 年 4 月,王平译,戴宗铎校.

Bernstein 多项式与 Bézier 曲线

刘培杰

§0 引言

1986 年全国高中数学联赛二试题 1 为:

试题 1 已知实数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 满足

$$a_{i-1} + a_{i+1} = 2a_i (i = 1,2,3,\cdots)$$

求证:对于任何自然数 n

$$\begin{aligned} P(x) = {} & a_0 C_n^0 (1-x)^n + a_1 C_n^1 (1-x)^{n-1} + a_2 C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + \\ & a_{n-1} C_n^{n-1} x^{n-1} (1-x) + a_n C_n^n x^n \end{aligned}$$

是 x 的一次多项式或常数.

(注:原题条件限制 $\{a_i\}$ 不为常数列.证明中只要证 $P(x)$ 为一次函数,是此题的一个特例.)

证明 在 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$ 时

$$\begin{aligned} P(x) = {} & a_0 [C_n^0 (1-x)^n + C_n^1 (1-x)^{n-1} x + \cdots + C_n^n x^n] = \\ & a_0 [(1-x) + x]^n = a_0 \end{aligned}$$

为常数.对于一般情况,由已知 $a_k = a_0 + kd$,d 为常数,$k = 0,1,2,\cdots,n$.因为

$$\begin{aligned} & C_n^0 (1-x)^n + 1 \cdot C_n^1 (1-x)^{n-1} x + \cdots + k C_n^k (1-x)^{n-k} x^k + \cdots + n C_n^n x^n = \\ & n C_{n-1}^0 (1-x)^{n-1} x + \cdots + n C_{n-1}^{k-1} (1-x)^{n-k} x^k + \cdots + n C_{n-1}^{n-1} x^n = \\ & nx [C_{n-1}^0 (1-x)^{n-1} + C_{n-1}^1 (1-x)^{n-2} x + \cdots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}] = \\ & nx [(1-x) + x]^{n-1} = nx \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P(x) = {} & a_0 [C_n^0 (1-x)^n + C_n^1 (1-x)^{n-1} x + \cdots + C_n^n x^n] + \\ & d [0 \cdot C_n^0 (1-x)^n + \cdots + k C_n^k (1-x)^{n-k} x^k + \cdots + n C_n^n x] = \\ & a_0 + ndx \end{aligned}$$

为一次多项式.

这是一道背景深刻的好题,它以函数构造论中的伯恩斯坦多项式及计算几何中的贝齐尔曲线为背景.

§1 同时代的两位伯恩斯坦

在数学史上几乎同一时期有两位同名不同国籍但同样著名的数学家伯恩斯坦.一位是德国的伯恩斯坦(Bernstein, Felix,1878－2－24—1956－12－3),此人生于德国哈勒,卒于瑞士苏黎世,他师从于著名数学家康托尔,希尔伯特和克莱茵.

早在1897年,伯恩斯坦就首先证明了集合的等价定理:如果集合A与集合B的一个子集等价,集合B也和集合A的一个子集等价,那么集合A与集合B等价,这是集合论的基本定理,由此可以建立基数概念.他对数论、拉普拉斯变换、凸函数和等周问题也有贡献.

不过本节我们要介绍的是另一位伯恩斯坦,他就是苏联数学家伯恩斯坦(Bernstein, Sergeĭ Natanovič 1880－3－5—1968－10－26),他生于敖德萨,1899年毕业于巴黎大学,1901年毕业于多科工艺学校(许多法国著名数学家均出于此校).1929年成为苏联科学院院士,他曾在列宁格勒工学院和列宁格勒大学任教授,对著名的列宁格勒数学学派影响很大.

伯恩斯坦的工作大体可分三部分.

一是函数逼近论方面,伯恩斯坦是当之无愧的开创者,引进了许多以他名字命名的重要概念,如:本节要介绍的伯恩斯坦多项式、三角多项式导数的伯恩斯坦不等式,并开辟了许多新的研究方向,如多项式逼近、确定单连通域上多项式逼近的准确近似度等.

在微分方程领域伯恩斯坦证明和涉足了著名的希尔伯特问题的第19和第20问题,创造了一种求解二阶偏微分方程边值问题的新方法(伯恩斯坦方法).

在概率论方面,他最早提出(1917年)并发展了概率论的公理化结构,建立了关于独立随机变量之和的中心极限定理,研究了非均匀的马尔可夫链,另外,他与莱维(Levy, Paul Pierre1886—1971)在研究一维布朗扩散运动时,曾最先尝试用概率方式研究所给随机微分方程,并将它推广到多维扩散过程,今天随机微分方程已成为研究金融的重要工具,许多获诺贝尔经济奖的工作都与此有关.

他的这些工作都被收集在苏联科学院于1952年、1959年、1960年、1964年出版的他的共4卷论文集中.

由于他的巨大的贡献与成就，伯恩斯坦于 1911 年获比利时科学院奖，1920 年获法国科学院奖，1962 年获苏联国家奖.

现在以伯恩斯坦命名的多项式是指：

设 $f(x)$ 为定义于闭区间 $[0,1]$ 上的函数，称多项式

$$B_n(f(x);x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

为函数 $f(x)$ 的伯恩斯坦多项式. 有时也简记为 $B_n(f;x)$ 或 $B_n(x)$.

§2　推广到 m 阶等差数列

试题 2　还可叙述为对于一次多项式（一阶等差数列通项公式为一次），当 $n\geqslant 1$ 时，它的伯恩斯坦多项式 $B_n(f(x);x)$ 的次数为 1 次（而非 n 次）.

一个自然会想到的问题是：可否将这一结论推广到 m 次多项式（m 阶等差数列的通项公式为 m 次）. 即下述定理是否成立.

定理 1　若函数 $f(x)$ 是一个 m 次多项式，则当 $n\geqslant m$ 时它的伯恩斯坦多项式 $B_n(f(x);x)$ 的次数为 m 次（而非 n 次）.

证明　显然，只需证明当 $f(x)=x^m$ 时定理成立即可，也就是要证明

$$\sum_{k=0}^{n}k^m C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

当 $n\geqslant m$ 时为一个 m 次多项式.

若把恒等式 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k z^k=(1+z)^n$ 逐步微分 m 次且每次都乘上 z，则左方成为 $\sum\limits_{p=0}^{n}k^m C_n^k z^k$，右边可得到一个可以被 $(1+z)^{n-m}$ 除尽的 n 次多项式.

这可以对 m 用归纳法来验证，即有

$$\sum_{k=0}^{n}k^m C_n^k z^k=(1+z)^{n-m}P_m(z) \tag{1}$$

令 $z=\dfrac{x}{1-x}$，并乘上 $(1-x)^n$，则(1)式可变为

$$\sum_{k=0}^{n}k_m C_n^k(1-x)^{n-k}=(1-x)^m P_m(\frac{x}{1-x})$$

亦即为一个 m 次多项式.

利用定理 1 可得到一个很有用的结论：

对于一切实数 x，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n(x^m;x)=x^m$.

而这一结果可以直接推出一个重要定理，即康托洛维奇 1931 年得到的一

条定理：

若 $f(x)$ 为整函数，则它的伯恩斯坦多项式 $B_n(f(x);x)$ 在整个数轴上都收敛于 $f(x)$.

§3　另一个推广

原石家庄师专的王玉怀先生将这个试题作了另一个推广：

定理2　已知实数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，满足

$$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i \qquad i=1,2,3,\cdots$$

求证：对于任何自然数 n

$$P(x)=a_0^2C_n^0(1-x)^n+a_1^2C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2^2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+ a_{n-1}^2C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_n^2C_n^nx^n$$

是 x 的次数不超过2的多项式.

证明　设 $P(x)=Ax^2+Bx+C$，用 $x=0$ 代入，得 $C=P(0)=a_0^2C_0^0=a_0^2$；再用 $x=1$ 代入，得

$$A+B+C=P(1)=a_n^2$$

即 $A+B+a_0^2=a_n^2$，或 $A+B=a_n^2-a_0^2$. 由题设条件，$a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列，因此，$a_n=a_0+n(a_1-a_0)$，$(n=0,1,2,\cdots)$，所以

$$A+B=[a_0+n(a_1-a_0)]^2-a_0^2$$

整理，得

$$A+B=n^2(a_1-a_0)^2+2n(a_1-a_0)a_0 \tag{2}$$

又

$$P'(x)=2Ax+B$$

$$\begin{aligned}P'(x)=&na_0^2C_n^1(1-x)^{n-1}(-1)+a_1^2C_n^1(1-x)^{n-1}+\\&(n-1)a_1^2C_n^1x(1-x)^{n-2}(-1)+\cdots+\\&(n-1)a_{n-1}^2C_n^{n-1}x^{n-2}(1-x)+\\&(-1)a_{n-1}^2C_n^{n-1}x^{n-1}+na_n^2C_n^1x^{n-1}\end{aligned}$$

于是，$B=P'(0)=n(a_1^2-a_0^2)$，代入(2)，得

$$A=(n^2-n)(a_1-a_0)^2$$

现在，需要证明

$$P(x)=(n^2-n)(a_1-a_0)^2x^2+n(a_1^2-a_0^2)x+a_0^2 \tag{3}$$

下面用归纳法来证明：

当 $n=1$ 时

$$P(x) = a_0^2C_1^2(1-x) + a_1^2C_1^1x = a_0^2 - a_0^2x + a_1^2x = (a_1^2 - a_0^2)x + a_0^2$$

因此，当 $n = 1$ 时，公式(3)成立.

设公式对于 n 成立，进而证明对 $n+1$ 也成立，这时

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i^2C_{n+1}^i x^i(1-x)^{n+1-i}$$

利用公式 $C_{n+1}^i = C_n^{i-1} + C_n^i$，作如下推导

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i^2[C_n^i + C_n^{i-1}]x^i(1-x)^{n+1-i} =$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2C_n^ix^i(1-x)^{n+1-i} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2C_n^{i-1}x^i(1-x)^{n+1-i} =$$
$$(1-x)\sum_{i=0}^{n} a_i^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i} + x\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2C_n^{i-1}x^{i-1}(1-x)^{n-(i-1)}$$

在最后一个和式中，用 i 来代替 $i-1$，得

$$P(x) = (1-x)\sum_{i=0}^{n} a_i^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i} + x\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i} \quad (4)$$

注意到 $a_{i+1} = a_i + (a_1 - a_0)$，于是

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}[a_i + (a_1 - a_0)]^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i} =$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i} + 2(a_1 - a_0)\times$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_iC_n^i(1-x)^{n-i} + (a_1 - a_0)^2\sum_{i=0}^{n} C_n^ix^i(1-x)^{n-i}$$

上述第二个和式，由原试题 2 知道

$$\sum_{i=0}^{n} a_iC_n^ix^i(1-x)^{n-i} = P(x) = a_0 + n(a_1 - a_0)x$$

$$2(a_1 - a_0)\sum_{i=0}^{n} a_iC_n^ix^i(1-x)^{n-i} = 2(a_1 - a_0)[a_0 + n(a_1 - a_0)x]$$

又因为 $\sum_{i=0}^{n} C_n^ix^i(1-n)^{n-i} = 1$，将它们代入(4)，得

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^2C_n^ix^i(1-x)^{n-i} +$$
$$2(a_1 - a_0)[a_0 + n(a_1 - a_0)x]x + (a_1 - a_0)^2x$$

由归纳假设可知

$$P(x) = (n^2 - n)(a_1 - a_0)^2x^2 + n(a_1^2 - a_0^2)x + a_0^2 +$$
$$2(a_1 - a_0)[a_0 + n(a_1 - a_0)x]x + (a_0 - a_0)^2x =$$
$$[(n^2 - n)\times(a_1 - a_0)^2 + 2n(a_1 - a_2)^2]x^2 +$$

$$[n(a_1^2 - a_0^2) + 2(a_1 - a_0)a_0 + (a_1 - a_0)^2]x + a_0^2 =$$
$$[(n+1)^2 - (n+1)](a_1 - a_0)^2x^2 + (n+1)(a_1^2 - a_0^2)x + a_0^2$$

这说明,公式(4)对于 $n+1$ 也成立.

§4　逼近论中的伯恩斯坦定理

伯恩斯坦多项式的产生是出于函数逼近论的需要.在函数逼近论中一个最基本的问题就是:能不能用结构最简单的函数——多项式去逼近任意的连续函数,而具有预先给定的精确度?1885年德国数学家外尔斯特拉斯(Weirstrass,Karl 1815—1897)对这个问题给了肯定的答案.

这是逼近论中的一个基本定理,有许多不同的证明.前苏联著名数学家И·П·纳唐松推崇的是基于伯恩斯坦定理的证明.

伯恩斯坦证明了:若 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续,则对于 x 一致有 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(f(x);x) = f(x)$.

其实对于区间[0,1]来说伯恩斯坦定理与外尔斯特拉斯定理是等同的,并且它要优于后者,因为它建立了完全确定的多项式 $B_n(f(x);x)$ 的形状,而后者只确认了近似多项式的存在,并未给出其结构来.

用多项式去逼近一个函数如 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,$x \in [-5,5]$,在区间[-5,5]上采用等距节点作Lagrange多项式插值.Runge(一位德国物理学家)发现:如果节点的个数趋向于无穷,那么只有在 $|x| \leqslant 3.63\cdots$ 时插值多项式序列才趋向于函数 $f(x)$,在这个范围之外,那多项式序列竟是发散的!这就是著名的"Runge现象".为了避免此类现象的发生,我们应不拘泥于个别点上函数值的相等,而要求从整体上来说两个函数相当接近,这就是逼近理论.我们特别希望逼近函数在很大程度上继承了被逼近函数的几何形态.这才发展出Bernstein定理.

伯恩斯坦定理的证明可以说是完全初等的,它需要两个引理.

引理1　对于任何 x,都有

$$\sum_{k=0}^{n}(k - nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}$$

证明　将恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (z+1)^n \tag{5}$$

两端求导并乘 z 得到

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k z^k = nz(z+1)^{n-1} \tag{6}$$

将式(6)两端再求导并乘 z 得到

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k z^k = nz(nz+1)(z+1)^{n-2} \tag{7}$$

在式(5)、(6)、(7)中令 $z=\dfrac{x}{1-x}$，并用 $(1-x)^n$ 乘式(5)、(6)、(7)便得到三个组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = 1 \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx(nx+1-x) \tag{10}$$

用 n^2x^2，$-2nx$，1 分别乘以式(8)、(9)、(10)并相加得

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

再注意到
$$x(1-x) \leqslant \left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

可得
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4}$$

引理2　设 $x\in[0,1]$，且 δ 是任意正数，用 $\Delta_n(x)$ 表示整数 $0,1,2,\cdots,n$ 中满足不等式

$$\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta \tag{11}$$

的那些值 k 所成的集合，则

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)} \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

证明　若 $k\in\Delta_n(x)$，由(11)可得

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1$$

所以
$$\sum_{k\in\Delta_n(x)} \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k\in\Delta_n(x)} (k-nx)^2\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

如果在右方的和中，遍取 $k=0,1,2,\cdots,n$ 以求和，则此和只可能增大. 因为当 $x\in[0,1]$ 时所有新添的加数(对应于 $0,1,2,\cdots,n$ 中那些不含 $\Delta_n(x)$ 中的 k)都不是负的，于是由引理 1 可知引理 2 成立.

引理 2 的含义，粗略地说便是：当 n 很大时，在和 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ 中起主要作用的只是满足条件

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$$

的那些 k 值所对应的加数，而其余的项对和的值几乎没有什么贡献.

由此我们不难推断，若 $f(x)$ 连续，则当 n 很大时，它与伯恩斯坦多项式 $B_n(f(x);x)$ 相差极微，由引理2证明中可见在 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ 中 $\frac{k}{n}$ 远离 x 的那些项，几乎不起什么作用，这对于多项式 $B_n(f(x);x)$ 亦是如此. 由于因子 $f(\frac{k}{n})$ 是有界的，所以在多项式 $B_n(f(x);x)$ 中，只有与 $\frac{k}{n}$ 十分靠近 x 的那些加数才是重要的，可是在这些项中，因子 $f(\frac{k}{n})$ 几乎与 $f(x)$ 无异(连续性!). 这就意味着，如果用 $f(x)$ 来代替 $f(\frac{k}{n})$ 的项，多项式 $B_n(f(x);x)$ 几乎没有改变. 换句话说，近似等式

$$B_n(f(x);x)\approx\sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=f(x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=f(x)$$

成立，这就是证明伯恩斯坦定理的大体思路!

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续这一假定是不可缺少的，考察 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$$

容易看出，$B_n(0)=1$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}$ 成立，这说明，若不对函数 f 作一定的限制，$B_n(f)$ 与 f 可能毫无关联.

另外 $B_n(f(x);x)$ 也称伯恩斯坦算子，它有种种变形与推广

C.G.Lorentz 在 1953 年用稍加修饰了的伯恩斯坦算子

$$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}(n+1)\int_{v/(n+1)}^{(v+1)/(n+1)} f(t)\mathrm{d}t$$

解决了一系列有趣定理的证明.

1960 年 D.D.Stancu 在两篇文章中将伯恩斯坦算子推广到多个变数.

对于区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 中变数 x 与 y 的任何连续实值函数 $f(x,y)$ 表示式

$$B_{m,n}(f,x,y)=\sum_{v=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{n}\binom{m}{v}\binom{m}{\mu}x^v(1-x)^{m-v}y^\mu(1-y)^{n-\mu}f\left(\frac{v}{m},\frac{\mu}{n}\right)$$

叫 m,n 阶伯恩斯坦算子.

值得指出的是一个变数的伯恩斯坦多项式的所有重要性质，对 $B_{m,n}(f,x,y)$ 都成立.

D.D.Stancu 还研究了 x 与 y 在三角形区域 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1$ 的情形，并用

$$B_n(f,x,y) = \sum_{v=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-k} P_n^{v,\mu}(x,y) f\left(\frac{v}{n},\frac{\mu}{n}\right)$$

定义 n 阶伯恩斯坦算子. 其中

$$P_n^{v,\mu}(x,y) = \binom{n}{v}\binom{n-v}{\mu} x^v y^\mu (1-x-y)^{n-v-\mu}$$

在伯恩斯坦算子逼近的研究中还有更一般的递推公式：

设 r 是非负整数，记

$$T_{nr}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^r P_{nk}(x)$$

其中

$$P_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

对于 $T_{nr}(x)$ 我们有以下定理：

定理 3　设 r 是非负整数，$x \in [0,1]$ 则有

$$T_{n,r+1}(x) = x(1-n)(T'_{nr}(x_1 + nrT_{n,r-1}(x)))$$

证明　由于对 $x \in [0,1]$ 有

$$x(1-x)P'_{nk}(x) = (k-nk)P_{nk}(x)$$

所以

$$\begin{aligned} x(1-x)T'_{nr}(x) &= \sum_{k=0}^{n}[(k-nx)^r x(1-x)P'_{nk}(x) - \\ &\quad nr(k-nx)^{r-1}x(1-x)P_{nk}(x)] = \\ &\quad \sum_{k=0}^{n}((k-nx)^{r+1}P_{nk}(x) - \\ &\quad nrx(1-x)(k-nx)^{r-1}P_{nk}(x)) = \\ &\quad T_{n,r+1}(x) - nrx(1-x)T_{n,r-1}(x) \end{aligned}$$

稍加整理，便可得到定理 3.

n 个有用的特殊值为

$$T_{n0}(x) = 1$$

$$T_{n1}(x) = 0$$

$$T_{n2}(x) = nx(1-x)$$

$$T_{n3}(x) = n(1-2x)x(1-x)$$

$$T_{n4}(x) = x(1-x)[3n^2x(1-x) - 2nx(1-x) + n(1-2x)^2]$$

与之相关的还有如下几个算子列：

i)Durrmeyer - Bernstein 积分型算子列$\{D_n\}_{n\in\mathbf{N}}$:对 $f\in C[0,1]$, $n\in\mathbf{N}$ 有

$$D_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}P_{nk}(x)\int_0^1 f(t)p_{nk}(t)\mathrm{d}t\quad x\in[0,1]$$

ii)Bernstein - Kantorovič 算子列$\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$:对于 $f\in C[0,1]$, $n\in\mathbf{N}$ 有

$$P_n(f,x)=(B_nE_n)(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)\mathrm{d}t\right)P_{nk}(x)$$

iii)Meyer - Konig and Zeller 算子列$\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$:对于 $f\in C[0,1]$, $n\in\mathbf{N}$,有

$$M_n(f,x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}f\left(\dfrac{k}{n+k}\right)m_{nk}(x) & 0\leqslant x<1\\ f(1) & x=1\end{cases}$$

其中
$$m_{nk}(x)=\binom{n+k}{k}x^k(1-x)^{n+1}$$

利用这些结果还可以编造与试题类似的题目.

§5 数学家的语言——算子

著名数学家 L.Bers 说:数学的力量是抽象,但是抽象只有在覆盖了大量特例时才是有用的.

设 $f(x)$ 表任一实变数或复变数的函数,Δ 为一差分算子,其定义为

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$
$$\Delta[\Delta^k f(x)]=\Delta^{k+1}f(x)$$

以算子 Δ 作成的多项式

$$p(\Delta)=p_0+p_1\Delta+p_2\Delta^2+\cdots+p_n\Delta^n$$

仍可视为一个算子,属实数域或复数域,并规定

$$P(\Delta)f(x)=P_0f(x)+P_1\Delta f(x)+P_2\Delta^2f(x)+\cdots+P_n\Delta^nf(x)$$

几个常用的特殊算子为

单位算子 I　　$\mathrm{I}f(x)=\Delta^0f(x)=f(x)$

零算子 0　　$0f(x)=0\qquad \Delta^k+0=0+\Delta^k=\Delta^k$

位移算子 E　　$\mathrm{E}f(x)=f(x+1)\qquad \mathrm{E}^k=\mathrm{E}^{k-1}\mathrm{E}\qquad \mathrm{E}^0=\mathrm{I}$

许多著名公式用算子表示和证明都很方便,如:

牛顿定理　设 $x\in\mathbf{Z}$,且 $0\leqslant x\leqslant n$,则

$$f(x)=f(0)+C_x^1\Delta f(0)+C_x^2\Delta^2f(0)+\cdots+C_x^n\Delta^nf(0)$$

证明便是几句话就可解决,即

$$f(x)=\mathrm{E}^x f(0)=(\mathrm{I}+\Delta)^x f(0)=\left\{\sum_{k=0}^{x} C_x^k \Delta^k\right\} f(0)=\sum_{k=0}^{x} C_x^k \Delta^k f(0)$$

我们再看一个更复杂的结论:

设 $f(x)$ 为一 k 次多项式,则

$$f(x)=f(-1)+C_{x+1}^1 \Delta f(-2)+C_{x+2}^2 \Delta^2 f(-3)+\cdots+C_{x+k}^k \Delta^k f(-k-1)$$

运用算子语言证明也十分简洁,即

由于等式两端均为 k 次多项式,所以只要对非负整数 n 证明

$$f(n)=\sum_{\gamma=0}^{k} C_{n+\gamma}^{\gamma} \Delta^{\gamma} f(-\gamma-1)$$

即可,我们注意到 $\Delta^n f(x)=0(n=k+1,k+2)$,不难验算

$$(\mathrm{I}-\mathrm{E}^{-1}\Delta)^{n+1}\left\{\sum_{\gamma=0}^{k} C_{n+\gamma}^{\gamma}(\mathrm{E}^{-1}\Delta)^{\gamma}\right\} f(x)=f(x) \Rightarrow$$

$$(\mathrm{I}-\mathrm{E}^{-1}\Delta)^{-n-1} f(x)=\left\{\sum_{\gamma=0} C_{n+\gamma}^{\gamma}(\mathrm{E}^{-1}\Delta)^{\gamma}\right\} f(x) \Rightarrow$$

$$\sum_{\gamma=0}^{k} C_{n+\gamma}^{\gamma} \Delta^{\gamma} f(-\gamma-1)=\mathrm{E}^{-1}\left\{\sum_{\gamma=0}^{k} C_{n+\gamma}^{\gamma}(\mathrm{E}^{-1}\Delta)^{\gamma} f(0)\right\}=$$

$$\mathrm{E}^{-1}(\mathrm{I}-\mathrm{E}^{-1}\Delta)^{-n-1} f(0)=\mathrm{E}^{-1}\mathrm{E}^{n+1}(\mathrm{E}-\Delta)^{-n-1} f(0)=$$

$$\mathrm{E}^n \mathrm{I}^{-n-1} f(0)=f(n)$$

既然数学家创造了这样强有力的抽象语言——算子,那么能不能用它来解决开始提出的竞赛试题呢?

数列 $\{a_n\}$ 不过是以 n 为自变量的函数 $f(n)$,所以

$$\mathrm{E}a_i=a_{i+1} \qquad \Delta=\mathrm{E}-\mathrm{I}$$

$$\Delta a_i=(\mathrm{E}-\mathrm{I})a_i=\mathrm{E}a_i-\mathrm{I}a_i=a_{i+1}-a_i$$

利用 E, I 可以将 $p(x)$ 写为

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i(1-x)^{n-i}(\mathrm{E}^i a_0)=\sum_{i=0}^{n} C_n^i(x\mathrm{E})^i[(1-x)\mathrm{I}]^{n-i} a_0=$$

$$(\mathrm{I}+\Delta x)^n a_0=\sum_{i=0}^{n} C_n^i(\Delta^i a_i)^i=[(1-x)\mathrm{I}+x\mathrm{E}]^n a_0$$

由已知 $\Delta a_i=\Delta a_{i+1}(i=0,1,\cdots)$,故 $\Delta^r a_i=\Delta^r a_{i+1}=0$,所以

$$p(x)=C_n^0\Delta^0 a_0+C_n^1(\Delta a_0)x=\mathrm{I}a_0+n(\Delta a_0)=a_0+n(a_1-a_0)x$$

即 $p(x)$ 为一次函数.

实际上差分算子在数学竞赛中应用非常广泛,有些试题本身就是用算子语言叙述的,如下面:

试题 3 对任一实数序列 $A=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$,定义 ΔA 为序列$(a_2-a_1,$

$a_3-a_2,a_4-a_3,\cdots)$,它的第 n 项是 $a_{n+1}-a_n$,假定序列 $\Delta(\Delta A)$ 的所有的项都是1,且 $a_{19}=a_{92}=0$,试求 a_1.

(第十届(1992年)美国数学邀请赛题8)

解　设 ΔA 的首项为 d,则依条件

$$\Delta(\Delta A)=(d,d+1,d+2,\cdots)$$

其中第 n 项是 $d+(n-1)$.因此序列 A 可写成

$$(a_1,a_1+d,a_1+d+(d+1),a_1+d+(d+1)+(d+2),\cdots)$$

其中第 n 项是 $a_n=a_1+(n-1)d+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

由此可知 a_n 是 n 的二次多项式,首项系数是 $\frac{1}{2}$,因为 $a_{19}=a_{92}=0$,所以

$$a_n=\frac{1}{2}(n-19)(n-92)$$

从而 $a_1=\frac{1}{2}(1-19)(1-92)=819$.

§6　将 B_n 也视为算子

其实 $B_n(f(x);x)$ 相当于将一个子数变为多项式的变换,所以将 B_n 也可视为"算子",即 $f(x)\xrightarrow{B_n}B_n(f(x);x)$.为了应用它我们需要了解这个"算子"有什么特性:

i)

$$1\xrightarrow{B_n}1$$

$$x\xrightarrow{B_n}x$$

即1与 x 在变换 B_n 作用之下不变,仍为自身.

ii)

$$B_n(f;0)=f(0)$$

$$B_n(f;1)=f(1)$$

即在[0,1]上,多项式曲线 $y=B_n(f;x)$ 与代表函数的曲线 $y=f(x)$ 有相同的起点和终点.

iii) B_n 为线性算子,即

① $B_n(f+g;x)=B_n(f;x)+B_n(g;x)$;

② 当 C 为任一常数时,有

$$B_n(Cf;x)=CB_n(f;x)$$

iv) B_n 是正算子,即对任意 $x\in[0,1]$,则 $B_n(f;x)\geqslant 0$.

这一性质可推出:若$f(x)\geqslant g(x)$对$[0,1]$成立,那么$B_n(f;x)\geqslant B_n(g;x)$也对$[0,1]$成立.

以上这几条性质都十分容易验证,但下面这条性质就比较难,我们称之为B_n的磨光性(Smoothing property).它是1967年由两位美国数学家克里斯基(R.P.kelisky)和瑞夫林(T.J.Rivlin)证明的,先介绍一下迭代的概念.

一般而言,设$f(x)$是定义于集合M上,且在M中取值的映射——若M是数集合,$f(x)$就是一个函数,这时,对于M中任一个x,$f(f(x))$,$f(f(f(x)))$都是有意义的,记

$$\left.\begin{array}{l}f^0(x)=x\\ f^{n+1}(x)=f(f^n(x))(x\in M,n=0,1,2,\cdots)\end{array}\right\}$$

则$f^n(x)$对一切非负整数n是有意义的,$f(x)$叫做$f(x)$次n的迭代函数,或简称为f的n次迭代,这里,我们记$B_n^k(f;x)$为B_n对f的k次迭代,即变换B_n对函数$f(x)$连续作用k次所得的多项式.

克里斯基和瑞夫林要回答的问题是:

当$n\in\mathbf{N}$固定后,而让迭代次数k无止境地增加时,多项式序列$B_n^k(f;x)$会趋于一个怎样的极限.他们得到如下结果:

对于给定的$n\in\mathbf{N}$,以及任何定义于$[0,1]$上的函数f,有

$$\lim_{k\to\infty}B_n^k(f;x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$$

为此我们先证一个引理:

引理3 $B_n[x(1-x);x]=(1-\frac{1}{n})x(1-x)$

利用二项式定理和组合恒等式

$$\frac{k}{n}C_n^k=C_{n-1}^{k-1}\qquad(\frac{k}{n})^2C_n^k=\frac{1}{n}C_{n-1}^{k-1}+(1-\frac{1}{n})C_{n-2}^{k-2}$$

容易计算得

$$B_n(x;x)=x\qquad B_n(x;x)=\frac{1}{n}x+(1-\frac{1}{n})x^2$$

所以 $B_n[x(1-x);x]=B_n(x-x^2;x)=$

$B_n(x;x)+B_n(-x^2;x)$(根据特性(1))$=$

$B_n(x;x)-B_n(x^2;x)$(根据特性(2))$=$

$x-[\frac{1}{n}x+(1-\frac{1}{n})x^2]=(1-\frac{1}{n})x(1-x)$

现在我们来证明克里斯基和瑞夫林定理.

首先对一类特殊函数,即$f(x)=x^m(m\in\mathbf{N})$证明定理成立.即

$$\lim_{k\to\infty}B_n^k(x^m;x)=x\tag{12}$$

由于 $x \in [0,1]$，所以

$$0 \leqslant x - x^m = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^{m-1} - x^m) =$$
$$(x + x^2 + \cdots + x^{m-1})(1 - x) \leqslant$$
$$(x + x + \cdots + x)(1 - x) = (m-1)x(1-x)$$

因为 B_n 是正线性算子，可得

$$0 \leqslant x - B_n(x^m;x) = B_n(x;x) - B_n(x^m;x) = B_n(x - x^m;x) \leqslant$$
$$B_n[(m-1)x(1-x);x] = (m-1)B_n[x(1-x);x]$$

由引理可得

$$0 \leqslant x - B_n(x^m;x) \leqslant (m-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)x(1-x)$$

再用 B_n 作用于上式，再一次使用引理，得

$$0 \leqslant x - B_n^2(x^m;x) \leqslant (m-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 x(1-x)$$

用 B_n 连续作用 k 次后，则有

$$0 \leqslant x - B_n^k(x^m;x) \leqslant (m-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x(1-x)$$

注意到 $m-1$ 为常数，$0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$ 亦为常数. 故当 $k \to \infty$ 时 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \to 0$. 故有

$$\lim_{k \to \infty} B_n^k(x^m;x) = x$$

现在我们来证明对于 f 是定义于 $[0,1]$ 上的任一函数定理也成立. 因为 $B_n(f;x)$ 是一个不超过 n 次的多项式，所以可设

$$B_n(f;x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

当经过 $k+1$ 次迭代后，有

$$B_n^{k+1}(f;x) = a_0B_n^k(x^n;x) + \cdots + a_{n-1}B_n^k(x;x) + a_n$$

注意到(12)式，可得

$$\lim_{k\to\infty} B_n^k(f;x) = \lim_{k\to\infty} a_0B_n^k(x^n;x) + \cdots + \lim_{k\to\infty} a_{n-1}B_n^k(x;x) + \lim_{k\to\infty} a_n =$$
$$a_0 \lim_{k\to\infty} B_n^k(x^n;x) + \cdots + a_{n-1} \lim_{k\to\infty} B_n^k(x;x) + a_n =$$
$$a_0x + a_1x + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n - a_n)x + a_n$$

由性质 ii) $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = B_n(f;1) = f(1)$，$a_n = B_n(f;0) = f(0)$. 所以

$$\lim_{k\to\infty} B_n^k(f;x) = [f(1) - f(0)]x + f(0)$$

这个定理的原始证明用到了高深的数学工具，后经中国科技大学常庚哲教授的改进才得以以现在这样初等的面貌出现. 需要指出的是这种初等化的证明

从某种意义上说更难，更见功力，当年匈牙利数学家(Erdös)给出了被Hardy称为永远不可能初等化的素数定理的初等证明，从而一举成名.

现在我们回到开始提到的"磨光性"，从直观上看，曲线 $y = B_n(f;x)$ 比曲线 $y = f(x)$ 要"光滑"一些，即前者的扭摆次数决不会多于后者的扭摆次数. 用 B_n 作用于 f 相当于将较"粗糙"的图像"打磨"了一次，如果反复作用，则在序列

$$f(x), B_n(f;x), B_n^2(f;x), B_n^3(f;x), \cdots$$

中，后一个总比前一个光滑，作为它们的极限，则是一条最光滑的曲线——直线，注意到由性质 ii) 它又必须经过原曲线 $y = f(x)$ 的起点和终点，因此必须取 $[f(1) - f(0)]x + f(0)$.

现在我们可以彻底回答试题1所隐含的全部问题了，由性质 i) 知，1 与 x 是 B_n 变换之下的不动点，再由性质 iii) 知，对任何常数 c 及 d，$cx + d$ 都是 B_n 的不动点. 即

$$B_n(c + dx;x) = B_n(c;x) + B_n(dx;x) = cB_n(1;x) + dB_n(x;x) = c + dx$$

这就是说，一切一次函数都是 B_n 的不动点，试题1中所给条件 $a_{i-1} + a_{i+1} = 2a_i$ 该数列不为常数列表明这是一个等差数列，而等差数列的通项公式为一次函数，注意到有 $n + 1$ 项，所以 $f(x) = a_0 + ndx$ 它是 B_n 作用之下的不动点，故 $p(x) = B_n(f(x);x) = f(x) = a_0 + ndx$. 现在一个自然的问题产生了，是不是 B_n 的不动点只能是一次函数，而不能再有其他函数了呢？克里斯基—瑞夫林定理肯定地告诉了我们：是的，别无选择！

设 B_n 有一个不动点 f，即 $B_n(f;x) = f(x)$，再用 B_n 作用于 $B_n(f(x);x)$，有 $B_n^2(f;x) = B_n(f;x) = f(x)$，这样一直进行下去，得 $B_n^k(f;x) = f(x)$ 对一切自然数都成立，取极限，由克里斯基—瑞夫林定理知

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} B_n^k(f;x) = [f(1) - f(0)]x + f(0)$$

只能是一次函数.

由此可见试题1只是伯恩斯坦多项式这座巨大冰山浮出水面的一角.

§7 来自宾夕法尼亚女研究生的定理

人们在了解到试题1的背景以后，会产生这样的疑问，$a_{i-1} + a_{i+1} = 2a_i$ 相当于一个一次函数 $f(n) = an + b$ 在三点处的值，即然伯恩斯坦多项式 $B_n(f;x)$，将 $f(n) = an + b$ 又变为 $f(n)$，并且一次以上多项式经 B_n 作用后，都会发生改变，那么在这一变换中，会不会将 $f(x)$ 原有的一些特性改变了呢？如单调性、凸凹性等. 我们说这一变换有良好的继承性，并不改变 $f(x)$ 本身的性

质.我们有以下的结论：

i) 当 $f(x)$ 单调增(减)时，$B_n(f;x)$ 也单调增(减)，我们只需考查 $B'_n(f;x)$ 的正负即可

$$B'_n(f;x) = n\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]J_k^{n-1}(x)$$

其中 $J_k^n(x) = C_n^k x^k(1-x)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$ 称为 $B_n(f;x)$ 的基函数.

当 $f(x)$ 为单调增函数时，$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant 0 \Rightarrow B'_n(f;x) \geqslant 0$.

当 $f(x)$ 为单调减函数时，$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant 0 \Rightarrow B'_n(f;x) \leqslant 0$.

ii) 当 $f(x)$ 是凸函数时，$B_n(f;x)$ 也是凸函数.

判断一个函数的凸凹只需考查其二阶导数的情形，注意到

$$B''_n(f;x) = a(a-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - 2f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]J_k^{n-2}(x)$$

若 $f(x)$ 是凸函数时由琴生(Jeson)不等式知

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] \geqslant f\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k+1}{n}\right) + \left(\frac{k-1}{n}\right)\right]\right\} = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

故
$$B''_n(f;x) \geqslant 0$$

关于凸性 1954 年美国宾夕法尼亚大学的一位女研究生 Averbach 证明了一个有趣的结论：

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是凸函数，则有 $B_n(f;x) \geqslant B_{n+1}(f;x)$ 对所有 $n \in \mathbf{N}$ 及 $x \in [0,1]$ 成立.

对于这一必须使用高深工具才能得到的结果，一位中国科技大学数学系 82 级学生陈发来凭借纯熟的初等数学技巧给出了一个证明. 他先证明了一个引理，即所谓

升阶公式 $\quad B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n+1}\left[\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k+1}{n}\right) + \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)\right]J_k^{n+1}(x)$

其意义是：任一个 n 次伯恩斯坦多项式都可看成一个 $n+1$ 次伯恩斯坦多项式.

它的证明是容易的，先注意到

$$J_k^n(x) = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)J_k^{n+1}(x) + \frac{k+1}{n+1}J_{k+1}^{n+1}(x)$$

于是
$$\begin{aligned} B_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left[\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)J_k^{n+1}(x) + \frac{k+1}{n+1}J_{k+1}^{n+1}(x)\right] = \\ &\sum_{k=0}^{n+1}\left[\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]J_k^{n+1}(x) \end{aligned}$$

当 $k=-1, n=1$ 时，$f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.

有了以上的升阶公式,Averbach 定理即可很容易得证.

由于 $f(x)$ 是[0,1] 上的凸函数,所以

$$f\left(\frac{k}{n+1}\right)=f\left[\frac{k}{n+1}\left(\frac{k-1}{n}\right)+\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\frac{k}{n}\right]\leqslant \frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)+\left(1-\frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)$$

从而

$$B_{n+1}(f;x)=\sum_{k=0}^{n+1}f\left(\frac{k}{n+1}\right)J_k^{n+1}(x)\leqslant \sum_{k=0}^{n+1}\left[\frac{k}{n+1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)+\left(1-\frac{k}{n+1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)\right]J_k^{n+1}(x)=$$

$$(\text{由升阶公式})B_n(f;x)$$

由此可见,升阶公式在这里起了关键作用.

作为练习可以证明:以 $(1,0,\varepsilon,0,1)$ 为伯恩斯坦系数的 4 次多项式在[0,1] 上为凸的充要条件是 $|\varepsilon|\leqslant 1$.

1960 年,罗马尼亚数学家 L. kosmak 证明了 Averbach 定理的逆定理,开了逼近论中逆定理证明的先河,后来 Z. ziegler、张景中、常庚哲等对此文作出了改进并给出了初等证明,而陈发来则又利用升阶公式对一类函数证明了 Averbach 定理的逆定理.

俄罗斯数学家 E. V. Voronovskaya 从另一个角度证明了如果函数 $f(x)$ 的二阶导数连续,则

$$f(x)-B_n(f,x)=-\frac{x(1-x)}{2n}f''(x)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

S. N. Bernstein 证明了:如果函数 $f(x)$ 有更高阶的导数,则可以从偏差 $f(x)-B_n(f,x)$ 的渐近展开式中再分出一些项来,E. M. Wright 和 E. V. Kontorom 研究了解析函数 $f(x)$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n(f,x)$ 在区间[0,1] 之外的收敛性,伯恩斯坦得到了关于 $B_n(f,x)$ 的收敛区域对[0,1] 上的解析函数 $f(x)$ 的奇点分布的依赖性的进一步结果. A. O. Gelfond 对函数系 $1,|x^a\lg^k x|$, $a>0,k\geqslant 0$ 构造了伯恩斯坦型多项式并把关于伯恩斯坦多项式的收敛性和收敛速度的一些估计推广到这种情况.

§8　计算几何学与调配函数

计算几何学是一门用计算机综合几何形状信息的边缘学科,它与逼近论、计算数学、数控技术、绘图学等学科紧密联系,涉及的领域异常广阔.

在计算几何中调配函数是一个重要方法，假定已知若干个点的坐标，它们可以是设计人员给出的，也可以是测量的结果，技术人员面临的任务是从这些已知点的坐标数据得到一条理想的曲线或一张曲面，工程上称这些已知的点为型值点，从给定的型值点生成曲线，通常是将型值点的坐标各自配上函数.

举个最简单的例子：

设有两个已知型值点 p_0，p_1（p_0，p_1 表示向量）

$$p_0 = (x_0, y_0, z_0) \qquad p_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

连结 p_0 与 p_1 的直线段可表示为

$$p(t) = (1 - t)p_0 + tp_1 \qquad t \in [0,1]$$

记 $1 - t = \varphi_0(t)$，$t = \varphi_1(t)$，当 t 值给定，则 $\varphi_0(t)$，$\varphi_1(t)$ 表示对型值点 p_0 与 p_1 作加权平均时所用的系数，由于这些系数表现为相应型值点影响的大小，故这类函数我们称之为调配函数.

设 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 为型值点，给每一点配以一个函数，写出如下形式的曲线

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i\varphi_i(t) \qquad t \in [0,1]$$

关键的问题是如何选择调配函数 $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$.

在计算机辅助设计与制造（CAD/CAM）的典型问题中，人们归纳出调配函数生成的一般准则：

i）当 $p_0 = p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ 时，$p(t)$ 应收缩为一点，于是从 $p(t) = p_0 = \sum_{i=0}^{n} p_0\varphi_i(t) = p_0\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(t)$，可以推出 $\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(t) = 1$.

ii）曲线 $p(t)$ 落在以型值点为顶点的凸多边形内，且保持型值点的凸性，这时要求函数满足条件

$$\varphi_i(t) \geqslant 0, i = 0,1,2,\cdots,n \qquad t \in [0,1]$$

iii）为了使给定次序的型值点生成的曲线，在反方向（即将 p_i 换成 p_{i-1}）之下是不变的，要求调配函数满足条件

$$\varphi_i(t) = \varphi_{n-1}(1-t) \qquad i = 0,1,2,\cdots,n \quad t \in [0,1]$$

iv）为了便于计算，调配函数应该有尽量简单的结构，通常取它们为某种多项式，分段多项式或简单的有理函数.

§9　贝齐尔曲线与汽车设计

数学家 H.F.Fehr 指出："数学领域在二十世纪已被新的、有力的、令人振奋

的思想所主宰.这些新概念一方面是想象力的有趣创造,另一方面在科学、技术,甚至在所谓人文科学研究中也是有用的".

伯恩斯坦多项式作为纯数学中的一个理论工具,当它被数学家充分研究之后,发现了它具有许多优良的几何性质.近三十年来,这些性质不仅在理论研究中起到了重要作用,而且在工程实践中也发现了可喜的应用,如在汽车工业中.法国工程师贝齐尔(P.Bézier)提出了一套利用伯恩斯坦多项式的电子计算机设计汽车车身的数学方法.

贝齐尔生于1910年9月1日,是法国雷诺汽车公司的优秀工程师,他从1933年起,独立完成曲线与曲面的拟合研究,提出了一套自由曲线设计方法成为该公司第一条工程流水线的数学基础.

设 $p_0,p_1,\cdots,p_n$ 为 $n+1$ 个给定的控制点,它们可以是平面的点,也可以是空间的点,以伯恩斯坦多项式的基函数为调配函数作成的曲线.

$$B^n(t)=B^n(p_0,p_1,p_2,\cdots,p_n;t)=\sum_{i=0}^{n}p_iB_i^n(t)\qquad t\in[0,1]$$

就叫做以 $\{p_i,i=0,1,2,\cdots,m\}$ 为控制点的 n 次贝齐尔曲线,$\{p_i,i=0,1,2,\cdots,n\}$ 叫做贝齐尔点,顺次以直线段连结 $p_0,p_1,\cdots,p_n$ 的折线,不管是否闭合都叫做贝齐尔多边形.(注:这里的 $B_i^n(t)$ 相当于 $J_n^i(t)$)

但贝齐尔最初定义贝齐尔曲线时是用多边形的边向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$,加上首项点向量 $\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{p}_0$ 来定义曲线

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{a}_if_i^n(t)\qquad t\in[0,1]$$

其中

$$\begin{cases}f_0^n(t)=1\\ f_i^n(t)=\dfrac{(-t)^i}{(i-1)!}\dfrac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}\dfrac{(1-t)^n-1}{t}\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

这个包含了一系列的高阶导数运算的定义令人很费解,日本学者穗坂和黑田满曾评价说:"它是从天上掉下来的".

后来经数学家整理,发现它们的理论基础就是伯恩斯坦多项式,不难验证函数族 $\{f_i^n(x),i=0,1,\cdots,n\}$ 与伯恩斯坦多项式基多项式族 $\{B_i^n(t),i=0,1,2,\cdots,n\}$ 有如下的关系

i) $f_i^n(t)=1-\sum\limits_{j=0}^{i-1}B_j^n(t)\qquad j=1,2,\cdots,n$

ii) $f_i^n(t)-f_{i+1}^n(t)=B_i^n(t)\qquad i=0,1,\cdots,n$

iii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_i^n(t))=nB_{i-1}^{n-1}(t)\qquad i=1,2,\cdots,n$

利用这三个关系式及边向量与顶点向量的关系，$a_i = p_i - p_{i-1}(i = 1, \cdots, n)$不难看出贝齐尔曲线还可定义为一种远比贝齐尔开始的定义更直观的定义形式

$$B^n(t) = B^n(p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n; t) = \sum_{i=0}^{n} p_i B_i^n(t) \quad t \in [0,1]$$

容易验证伯恩斯坦多项式的基多项式具有如下性质：

i) 非负性

$$B_i^n(t) > 0 \quad t \in [0,1]$$

$$B_i^n(0) = B_i^n(1) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1$$

$$B_0^n(1) = B_n^n(0) = 0$$

$$0 < B_0^n(t) \quad B_n^n(t) < 1 \quad t \in (0,1)$$

ii) 对称性 $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t) \quad t \in [0,1]$

iii) 单位分解 $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$

iv) 递推关系 $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$

由此我们发现伯恩斯坦多项式的基多项式满足前面所述准则的大部分．但是只有一个所谓的局部性原则不满足，但这可以通过在使用时采用分段拟合技术加以弥补．

正是由于贝齐尔在计算机辅助工程设计与教育上的贡献，1985 年在 SIGGRAPH 大会上被授予 Coons 奖．事实上比贝齐尔早些时期，F. de Castelian 在 1959 年就独立地在 Citroen 汽车公司创造了这一方法，并同样应用于 CAD 系统．只不过由于雷诺汽车公司以贝齐尔方法为基础的自动化生产流水线于 60 年代初实现，并在一些出版物上公开发表出来，所以现在这些方法被命名为贝齐尔方法．

在 CAD/CAM 中大量用到圆锥曲线，而这些可在有理形式下得到精确统一的表示，为了方便软件设计，人们又把多项式贝齐尔曲线推广到有理贝齐尔曲线，这一转化，只需作变换

$$t(n) = \frac{cu}{1 - u + cu}$$

其中 c 为任意实数，显然 $t(0) = 0, t(1) = 1$，这样一来

$$p(u) = B^n(p_0, p_1, \cdots, p_n; t) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i B_i^n\left(\frac{cu}{1 - u + cu}\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i C_n^i \left(1 - \frac{cu}{1-u+cu}\right)^{n-i} \left(\frac{cu}{1-u+cu}\right)^i =$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i C_n^i \left(\frac{1-u}{1-u+cu}\right)^{n-i} \left(\frac{cu}{1-u+cu}\right)^i =$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} p_i C_n^i (1-u)^{n-i} (cu)^i}{(1-u+cu)^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i c_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(u)}$$

这便是权系数为 c_i 的有理形式的贝齐尔曲线.那么伯恩斯坦多项式作为调配函数是如何构造出来呢?有多种方法,当然有伯恩斯坦本人出于函数逼近论的考虑构造出来的,我们再介绍Friedman利用原先用于研究随机过程的URN模型构造出伯恩斯坦多项式.

假定有一个盒子装有 w 个白球和 b 个黑球,现在从盒中任意取出一个球,并记录其颜色,然后放回盒中,如果取出的是白球,则向盒中增添 c_1 个白球和 c_2 个黑球,并记录其颜色;反之,如果取出的是黑球,则向盒内增添 c_1 个黑球和 c_2 个白球(这里 $c_1, c_2 \in \mathbf{N}$).

在前次试验的基础上,再任意取一个球时,仍依原规则,据抽取的球的颜色来决定增添同色球 c_1 个以及另一色球 c_2 个,这个过程一直进行下去.

设 c_1, c_2 为常数,令 $a_1 = \frac{c_1}{w+b}, a_2 = \frac{c_2}{w+b}$.

t 为第一次试验取出白球的概率,视它为变数,又记 $D_k^N(t) = D_k^N(a_1, a_2, t)$ 为前 N 次试验恰好取出 k 次白球的概率,在前 N 次试验中恰好取出 k 次白球的情况下,第 $N+1$ 次试验取出白球的概率记为

$$S_k^N(t) = S_k^N(a_1, a_2, t)$$

取出黑球的概率记为

$$F_k^N(t) = F_k^N(a_1, a_2, t)$$

显然 $\qquad D_k^N(t) \geqslant 0 \qquad \sum_k D_k^N(t) = 1 \qquad t \in [0,1]$

这样一来,为了考查在 $N+1$ 次试验取 k 次白球,那么必然在前 N 次试验中或者取 k 次白球,或者取 $k-1$ 次白球,故

$$D_k^{N+1}(t) = S_{k-1}^N(t) D_{k-1}^N(t) + F_k^N(t) D_k^N(t)$$

显然

$$S_k^N(t) = \frac{t + ka_1 + (N-k)a_2}{1 + N(a_1 + a_2)}$$

$$F_k^N(t) = \frac{1 - t + (N-k)a_1 + ka_2}{1 + N(a_1 + a_2)}$$

初始条件为 $\qquad D_0^1(t) = 1 - t \qquad D_1^1(t) = t$

当 $k > N$ 或 $k < 0$ 时规定 $D_k^N = S_k^N = F_k^N = 0$. 当我们取 $s_1 = a_2 = 0$,即不向盒中增添任何球时, $S_k^N(t) = t$, $F_k^N(t) = 1 - t$. 上述递推式可化简为

$$D_k^{N+1}(t) = tD_{k-1}^N(t) + (1-t)D_k^N(t)$$

注意到 $D_0^1(t) = 1 - t$, $D_1^1(t) = t$.

当 $N = 2$ 时,有 $D_2^2(t) = t^2$, $D_1^2(t) = 2t(1-t)$, $D_0^2(t) = (1-t)^2$.

当 $N = 3$ 时,有 $D_3^3(t) = t^3$, $D_2^3(t) = 3t^2(1-t)$, $D_1^3(t) = 3t(1-t)^2$, $D_0^3(t) = (1-t)^3$.

如此递推下去,不难发现这恰好是伯恩斯坦多项式的基函数(基多项式)

$$B_j^n(t) = C_n^j(1-t)^{n-j}t^j$$

关于贝齐尔曲线可参见《曲线曲面设计技术与显示原理》(方逵等编著,国防科技大学出版社出版)和《自由曲线曲面造型技术》(朱心雄著,科学出版社出版).

§10　推广到三角形域

利用移位算子,我国著名数学家,中国科技大学的常庚哲教授将伯恩斯坦多项式推广到三角域上,并研究了它的凸性.

在三角形 T 上定义

$$B_n(f;p) = \sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k}\frac{n!}{i!j!k!}u^iv^jw^k$$

称为 T 上的 n 次伯恩斯坦多项式,其中 (u,v,w) 是点 p 关于三角形 T 的重心坐标.

这里重心坐标是这样定义的:首先了解一下仿射空间(affine space),对于实数域 $\mathbf{R}$ 上的向量空间 V 与集合 A,在任意的向量 $\boldsymbol{a} \in V$ 与任意的元素 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{A}$ 之间定义和 $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{a} \in A$,设它满足以下条件:

i) $\boldsymbol{p} + 0 = \boldsymbol{p}$(0 是零向量);

ii) $(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{V})$;

iii) 对任意的元素 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{A}$,存在惟一的向量 $\boldsymbol{a} \in V$,使得 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}$.

这时,$\boldsymbol{A}$ 称为仿射空间(在中学阶段我们所遇到的都是 n 维仿射空间 $\mathbf{E}^n$),取有关的 $n+1$ 个点,$A_0, A_1, \cdots, A_n$,设从 $\boldsymbol{O}$ 到这些点的位置向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$,这时,任意点 $Z \in E^n$ 可以由使得 $Z = O + \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j$, $\sum_{j=0}^{n}\lambda_j = 1$ 的数组 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 表示,称它为 E^n 的重心坐标(barycentric coordinates) 它与点

O 的取法无关.

由于近年来三角域上的伯恩斯坦多项式已被广泛地应用于"计算机辅助几何设计"

$$B_n(f;p)=\sum_{i+j+k=n} f_{i,j,k}\frac{n!}{i!j!k!}u^i v^j w^k$$

可以视为一个曲面,令 $f=\{f_{i,j,k}:i+j+k=n\}$ 称为此曲面的贝齐尔坐标集.这是设计人员事先给定并可以调整的一组数据,由于此曲面要用于汽车外型设计,所以对这一组数据提出若干易于检验的条件以保证曲面在 T 上是凸的.

1984 年常庚哲教授与他的合作者,美国数学家 P.J.Davis 在《Approximation Theory》上发表文章,证明了如果

$$\Delta_{i,j,k}^{(1)}\triangleq(\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_1)(\mathrm{E}_3-\mathrm{E}_1)f_{i,j,k}\geqslant 0$$
$$\Delta_{i,j,k}^{(2)}\triangleq(\mathrm{E}_3-\mathrm{E}_2)(\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2)f_{i,j,k}\geqslant 0$$
$$\Delta_{i,j,k}^{(3)}\triangleq(\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3)(\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_3)f_{i,j,k}\geqslant 0$$

这里 $i+j+k=n-2$,而 $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_3$ 是移位算子

$$\mathrm{E}_1f_{i,j,k}=f_{i+1,j,k}$$
$$\mathrm{E}_2f_{i,j,k}=f_{i,j+1,k}$$
$$\mathrm{E}_3f_{i,j,k}=f_{i,j,k+1}$$

这里 $i+j+k=n-1$,那么 $B_n(f;p)$ 在 T 上是凸的,后来在《自然杂志》7 卷 10 期上,又将其改进为如果 f 适合条件

$$\Delta_{i,j,k}^{(2)}+\Delta_{i,j,k}^{(3)}\geqslant 0$$
$$\Delta_{i,j,k}^{(3)}+\Delta_{i,j,k}^{(1)}\geqslant 0$$
$$\Delta_{i,j,k}^{(1)}+\Delta_{i,j,k}^{(2)}\geqslant 0$$
$$\Delta_{i,j,k}^{(2)}\Delta_{i,j,k}^{(3)}+\Delta_{i,j,k}^{(3)}\Delta_{i,j,k}^{(1)}+\Delta_{i,j,k}^{(1)}\Delta_{i,j,k}^{(2)}\geqslant 0$$

其中 $i+j+k=n-2$,那么 $B_n(f;p)$ 在 T 上是凸的.

可惜的是对于二维情况,Averbach 定理仍然成立,但逆定理就不成立了.

设 T 是平面上任给的一个三角形,三顶点分别为

$$T_1(x_1,y_1),T_2(x_2,y_2),T_3(x_3,y_3)$$

$(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 为直角坐标,对平面上任意点 $p(x,y)$,存在惟一的数组 (u,v,w),使得 $p=uT_1+vT_2+wT_3$(或写成 $(x,y)=(x_1u+vx_2+wx_3,y_1u+y_2v+y_3w)$),其中 $0\leqslant u,v,w\leqslant 1,u+v+w=1$.

$p(u,v,w)$ 称为 p 的面积坐标,设 $F(x,y)$ 是 T 上的任一函数,定义

$$f(u,v,w)=F(x_1u+x_2v+x_3w,y_1u+y_2v+y_3w)$$

$f(x,y)$ 的伯恩斯坦多项式定义为

$$B_n(f;p)=\sum_{i+j+k}f(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n})J_{i,j,k}^n(p)$$

其中 $J_{i,j,k}^n(p)=\frac{n!}{i!j!k!}u^iv^jw^k,0\leqslant u,v,w\leqslant 1,u+v+w=1.$

比如取 T 为这样的三角形，其三顶点为 $T_1(0,0),T_2(1,0),T_3(0,1)$，定义

$$F(x,y)=x^2+8xy+8y^2$$

则按定义易得

$$B_n(f;p)=(1-\frac{1}{n})(u^2+8uv+8v^2)+\frac{1}{n}(u+8v)$$

容易证明，当 $0\leqslant u,v,u+v\leqslant 1$ 时

$$B_n-B_{n-1}=\frac{1}{n(n+1)}(u+8v-u^2-8uv-8v^2)\geqslant 0$$

但是 $F(p)$ 并不是凸的！

我们可以直接按凸函数定义去验证看它是否满足

$$F(\frac{p_1+p_2}{2})\leqslant\frac{F(p_1)+F(p_2)}{2}$$

取两点 $(1,0),(0,\frac{1}{2})$，计算可知

$$F(1,0)+F(0,\frac{1}{2})=3<\frac{7}{2}=2F(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$$

最近人们进一步研究发现，伯恩斯坦多项式还与组合数学的重要对象幻方有关．在计算几何学中有人发现以幻方为控制网数据矩阵而生成的 Bézier-Bernstein 曲面，具有单向积分不变的特性，而这一特性是其他熟知的逼近方式所不具备的．

设有方阵 $F=(f_{ij}),i,j=0,1,\cdots,n$ 满足条件：

i) $\sum_i f_{ij}=\sum_j f_{ij}=\delta_{n+1}$（常数与 n 无关）；

ii) $\sum_{i=j}f_{ij}=\sum_{i+j=n+1}f_{ij}=\delta_{n+1}.$

则称 F 为 $n+1$ 阶幻方，如果 F 的元素为前 $(n+1)^2$ 个自然数，则 $C_n=n(n^2+1)/2.$

记 $[0,1]\times[0,1]$ 上的曲面

$$B(u,v)=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n f_{ij}B_i^n(u)B_j^n(v)\qquad u,v\in[0,1]$$

其中

$$B_i^n(t)=\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i\qquad i=0,1,\cdots,n$$

f_{ij} 为幻方 F 的元素,我们称 $B(u,v)$ 为幻曲面.

类似于幻方的结构对称性,Bezier - Bernstein 算子也有类似的性质

$$\int_0^1 B(u,v)\mathrm{d}u = c, \forall v \in [0,1];$$

$$\int_0^1 B(u,v)\mathrm{d}v = c, \forall u \in [0,1].$$

§11 伯恩斯坦多项式的多元推广

考虑 k 维方体

$$S_k = \{(x_1,x_2,\cdots,x_k) \in \mathbf{R}^k \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,k\}$$

对于给定的 k 元实值连续函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k) \in C(S_k)$ 构造 k 元乘积型伯恩斯坦多项式

$$B^f_{n_1,\cdots,n_k}(x_1,\cdots,x_k) = \sum_{v_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{v_k=0}^{n_k} f\left(\frac{v_1}{n_1},\cdots,\frac{v_k}{n_k}\right) p_{n_1,v_1}(x_1)\cdots p_{n_k,v_k}(x_k)$$

可以证明在 S_k 上一致地有

$$\lim_{n_i\to\infty} B^f_{n_1,\cdots,n_k}(x_1,\cdots,x_k) = f(x_1,\cdots,x_k) \qquad i = 1,\cdots,k$$

与此相对应地,还可考虑 k 维单纯形上的伯恩斯坦多项式,定义

$$\Delta_k = \{(x_1,\cdots,x_k) \in R^k \mid x_1 + \cdots + x_k \leqslant 1, x_i \geqslant 0, i = 1,\cdots,k\}$$

函数 $f(x_1,\cdots,x_k) \in C(\Delta_k)$ 的 Bernstein 多项式定义为

$$\overline{B}^f_n(x_1,\cdots,x_k) = \sum_{\substack{v_1,\cdots,v_k\geqslant 0\\ v_1+\cdots+v_k\leqslant n}} f\left(\frac{v_1}{n},\cdots,\frac{v_k}{n}\right) p_{n;v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_n)$$

式中

$$p_{n,v_1,\cdots,v_k}(x_1,\cdots,x_k) =$$

$$\binom{n}{v_1,\cdots,v_k} x_1^{v_1}\cdots x_k^{v_k}(1 - x_1 - \cdots - x_k)^{n-v_1-\cdots-v_k}$$

$$\binom{n}{v_1,\cdots,v_k} = \frac{n!}{v_1!v_2!\cdots v_k!(n - v_1 - \cdots - v_k)!}$$

对此我们有如下:

定理 4 若 $f(x_1,\cdots,x_k) \in C(\Delta_k)$,则在 Δ_k 上一致地有

$$\lim_{n\to\infty} \overline{B}^f(x_1,\cdots,x_k) = f(x_1,\cdots,x_k)$$

由此可见算子是数学家语言中的重要词汇,犹如文学家使用成语一样,试

想一下如果一篇文章中全是大白话，没有一个成语，那将会多么冗长、乏味啊！

最后，我们提出一个判断竞赛试题优劣的标准：构思独特，解法优美，历史悠长，背景深刻，触角广泛.

编后语 对竞赛问题的背景研究是有其上限的，即对竞赛试题所涉及的高等背景只宜进行“导游式”的简介并提供进一步了解的路径，借本文的发表之机，我们向大家推荐由法国国家数学教育名誉总监 Gilbert Demengel 教授和 MAFPEN 及 IREM 数学所模型学专家 Jean－Pierre Pouget 博士的著作《曲线与曲面的数学贝齐尔模型 B—样条模型 NURBS 模型》一书（商务印书馆 2000 年北京），该书全面且权威的介绍了伯恩斯坦多项式及贝齐尔曲线，并附有多幅利用贝齐尔曲线设计的飞机、汽车、摩托车外型曲线图及丰富的文献.

此外欲了解最新进展，中国科技大学出版社出版的《计算几何和几何设计最新进展》（2006 年）也是一本有价值的书.

Beatty 定理与 Lambek-Moser 定理

刘培杰

§0 引子

普特南促进学术奖金基金会赞助并由美国数学协会主办的威廉·罗韦尔·普特南数学竞赛(The William Lowell Putnam Mathematical Competition),其试题由名家组成的命题委员会制定,背景深刻,极富独创性,为国际数学界所瞩目.

在第20届普特南数学竞赛中有一道试题为:

试题1 设正无理数 α 与 β 满足下列等式

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \tag{1}$$

求证:两序列 $\{[n\alpha]\}$, $\{[n\beta]\}$ 合在一起恰好不重复地构成自然数集,记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

正如美国和加拿大数学奥林匹克的主教练 M.S.Klamkin 所指出:数学竞赛试题的一种产生方法就是"将某些不那么新的数学论文中的漂亮结果加以改造".而上面的题目正是用此法炮制的.1926年加拿大多伦多大学的S.贝蒂(Sam Beatty)发现了如下的贝蒂定理:

Beatty 定理 设 x 是任何一个正的无理数,y 是它的倒数,那么两个序列 $\{n(1+x)\}$, $\{n(1+y)\}$ 合起来,恰好包含了每对相邻正整数构成的区间 $(n,n+1)$ 中的一个数.

显然前面的题目是贝蒂定理的一个推论,因为如果设 $\alpha=1+x$, $\beta=1+y$,则

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x}=1$$

§1　题目的证明

1927 年，由 A. 奥斯特洛夫斯基(Ostrowski) 与 A. C 艾特肯(Aitken) 给出了 Beatty 定理的一个简洁的证明，仿此思路我们也给出前述竞赛题的一个证明.

证法 1　我们只需证：任何自然数 k，不在 $\{[n\alpha]\}$ 中出现一次，就在 $\{[n\beta]\}$ 中出现一次，二者必居其一.

显然 $[n\alpha]\in \mathbf{N}$，$[n\beta]\in \mathbf{N}(n=1,2,\cdots)$，定义

$$p=\max\{n\mid [n\alpha]\leqslant k\}$$
$$q=\max\{n\mid [n\beta]\leqslant k\}$$

即 p,q 是两序列 $\{[n\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]\}$ 中不超过 k 的正整数的个数，由式(1) 有 $\alpha>1,\beta>1$，所以

$$[p\alpha]\leqslant k\leqslant [(p+1)\alpha]\Rightarrow p\alpha<k+1<(p+1)\alpha\Rightarrow p<\frac{k+1}{\alpha}<p+1 \tag{2}$$

综述

同理可得

$$q<\frac{k+1}{\beta}<q+1 \tag{3}$$

式(2) + 式(3) 并注意到式(1) 有

$$p+q<k+1<p+q+2\Rightarrow p+q-1<k<p+q+1\Rightarrow p+q=k$$

这即是说，在 $\{[n\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]\}$ 中，不超过 k 的正整数恰好共有 k 个，但由 k 的任意性，可知，其中不大于 $k-1(k>1)$ 的正整数也恰好共有 $k-1$ 个，于是比较两者可知，在 $\{[n\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]\}$ 中大于 $k-1$ 而不大于 k 的正整数有且仅有一个，它正好是 k.

证法 2　我们只需证 $\{[n\alpha]\}$，$\{[n\beta]\}$ 两序列满足：

i) 严格单调递增；ii) 两序列的项不重复；iii) 两序列合起来后不漏掉任何一个自然数.

先证 i)，显然 $\alpha>1,\beta>1$，所以

$$[(n+1)\alpha]=[n\alpha+\alpha]\geqslant [n\alpha]+[\alpha]\geqslant [n\alpha]+1>[n\alpha]$$

这说明 $\{[n\alpha]\}$，$\{[n\beta]\}$ 均严格单调上升.

ii) 用反证法，假设存在 $k,l\in \mathbf{N}$，使得 $[k\alpha]$，$[l\beta]$ 表示同一个自然数 p，于是注意到 α,β 是无理数，可得 $p<k\alpha<p+1$，$p<l\beta<p+1$，由此可得

$$\frac{k}{p+1}<\frac{1}{\alpha}<\frac{k}{p}\qquad \frac{1}{p+1}<\frac{1}{\beta}<\frac{1}{p}$$

两式相加得

$$\frac{k+1}{p+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{k+1}{p} \Rightarrow p < k+l < p+1$$

后一不等式是不可能的，因为在两连续自然数 $p, p+1$ 中不可能再"夹"一个自然数 $k+l$.

iii) 亦用反证法：假设存在一个自然 q 不在两序列中，则也会找到两个 $k, l \in \mathbf{N}$，使得

$$k\alpha < q < q+1 < (k+1)\alpha \qquad l\beta < q < q+1 < (l+1)\beta$$

由此可得

$$\frac{k}{q} + \frac{l}{q} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{k+1}{q+1} + \frac{l+1}{q+1}$$

所以有

$$k+l < q < q+1 < k+l+2$$

这相当于在两"间距"为2的自然数 $k+l$ 和 $k+l+2$ 中"夹"有两个自然数 q 和 $q+1$，而这是不可能的.

综合 i)、ii)、iii) 可知命题成立.

§2　题目的加强

本节我们将 α, β 是无理数这一限制取消，而代之以任意不等于 1 的实数，也可得到和题目相同的结果. 我们首先引入一个记号 $[x]^-$，其定义为：当 x 不是整数时为 $[x]$；当 x 是整数时为 $[x]-1$. 我们有如下的：

定理 1　若 $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$，则每一正整数在下列两序列 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 中恰好出现一次的充要条件是

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

证明　1) 必要性. 若 $k \in \mathbf{Z}^+$，则满足不等式

$$0 < m\alpha < k+1 \qquad 0 < n\beta \leqslant k+1 \tag{4}$$

的正整数 m 与 n 之和 M 为

$$M = \left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^- + \left[\frac{k+1}{\beta}\right]$$

而显见

$$\frac{k+1}{\alpha} + \frac{k+1}{\beta} - 2 < M < \frac{k+1}{\alpha} + \frac{k+1}{\beta} \tag{5}$$

若 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \theta$，则上式左、右两端的数分别为 $(k+1)\theta - 2$ 和 $(k+1)\theta$. 以下证 $\theta = 1$.

i) 若 $\theta<1$，则当 k 充分大时，$(k+1)\theta<k$，即 $M<k$，这表明在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 内不超过 k 的项不到 k 个，亦即在前 k 个正整数之中至少有一个不在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 内，与题设矛盾.

ii) 若 $\theta>1$，则当 k 充分大时，$(k+1)\theta-2=k+(\theta-1)k+\theta-2>k$，即 $M>k$，故在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 的项中其值不超过 k 的项比 k 多，由此可见，在前 k 个正整数中至少有一个在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 中不止出现一次. 必要性得证.

2) 充分性：设 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，则

$$M=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+\left[k+1-\frac{k+1}{\alpha}\right]=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+\left[k-\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)\right]=$$

$$\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-+k-\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]^-=k$$

故在 $\{[m\alpha]\}$，$\{[n\beta]\}$ 内其值不超过 k 的项数为 k，同时由 k 的任意性中其值不超过 $k-1$ 的项数为 $k-1$，故其值为 k 的项数是 1.

综合 1)，2) 命题得证.

我们还可以将上述定理推广为：

定理 2 （闵嗣鹤） 设 i) $\alpha(0)\geqslant1$，$\beta(1)\geqslant0$；ii) 当 $x\geqslant1$ 时，$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是关于 x 的严格递增函数；iii) 若 $\alpha^{-1}(x)$ 和 $\beta^{-1}(x)$ 分别为 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 的反函数，且 $\alpha^{-1}(x)+\beta^{-1}(x)=lx\,(l\in\mathbf{N})$.

则每一个正整数一定在以两个序列 $\{[\alpha(n)]\}$，$\{[\beta(n)]^-\}$ 内恰好出现 l 次，而 0 则恰好出现 $l-1$ 次.

证明 适合 $\alpha(n)<k$ 或 $\beta(n)\leqslant k+1\,(k\in\mathbf{Z}^+)$ 的正整数 n 就是适合 $n<\alpha^{-1}(k+1)$ 或 $n\leqslant\beta^{-1}(k+1)$ 的正整数. 这样的正整数显然共有 $[\alpha^{-1}(k+1)]^-+[\beta^{-1}(k+1)]$ 个. 由 iii) 上式又可写成

$$[\alpha^{-1}(k+1)]^-+[l(k+1)-[\alpha^{-1}(k+1)]]=$$

$$[\alpha^{-1}(k+1)]^-+[l(k+1)-1-[\alpha^{-1}(k+1)]^-]=l(k+1)-1$$

这正是在 $\{[\alpha(n)]\}$，$\{[\beta(n)]^-\}$ 中其值不超过 k 的项数.

i) 若 $k>0$，则 $\{[\alpha(n)]\}$，$\{[\beta(n)]^-\}$ 内其值不超过 $k-1$ 的项数应是 $lk-1$，故在两序列中其值为 k 的项数为

$$l(k+1)-1-[l(k-1)-1]=l$$

ii) 若 $k=0$，在两序列 $\{[\alpha(n)]\}$，$\{[\beta(n)]^-\}$ 中其值为 k 的项数，显然为

$$[\alpha^{-1}(1)]+[\beta^{-1}(1)]=l-1$$

作为定理 2 的一个推论，我们还有如下的：

定理 3 若 α,β,γ 都是正数，则每一正整数在以下两序列

$\{[\alpha(\frac{n}{\beta})^{\gamma}+n]\}$,$\{[\beta(\frac{n}{\alpha})^{\frac{1}{\gamma}}+n]^{-}\}$ 中恰好出现一次.

请读者仿定理 2 自己给出证明.

有趣的是在第 26 届国际数学奥林匹克的候选题中也出现了类似于定理 1 的命题.现将它写出来作为:

定理 4 $N=\{1,2,3,\cdots\}$,对实数 x,y 令

$$S(x,y)=\{S\mid S=[nx+y],n\in\mathbf{N}\}$$

证明:若 $r>1$ 为有理数,则存在实数 u,v,使

$$S(r,0)\cap S(u,v)=\varnothing \qquad S(r,0)\cup S(u,v)=\mathbf{N}$$

证明 设 $r=\frac{p}{q}$,$p,q\in\mathbf{Z}$,$p>q$,则 $u=\frac{p}{p-q}$ 及适合 $-\frac{1}{p-q}\leqslant v<0$ 的 v 即为所求.

i) 如果 $S(r,0)\cap S(u,v)\neq\varnothing$,则有 $[nr]=[mu+v]=k$,从而

$$np=kq+c \qquad 0\leqslant c\leqslant q-1$$

$$mp+v(p-q)=k(p-q)+d \qquad 0\leqslant d<p-q$$

相加得

$$(m+n)p+v(p-q)=kp+c+d$$

由于 $v(p-q)<0$,$c+d\geqslant 0$,所以有

$$k>m+n \tag{6}$$

但另一方面 $v(p-q)\geqslant -1$,$c+d<p-1$,所以

$$k>m+n-1 \tag{7}$$

式(6)、(7)矛盾,因此 $S(r,0)\cap S(u,v)=\varnothing$.

ii) 在 $n>m$ 时,$[nr]>[mr]$,$[nu+v]>[mu+v]$,所以 $S(u,v)$ 中没有相同的元素,$S(u,v)\cap\{1,2,\cdots,k-1\}$ 的元素个数等于满足 $[mu+v]<k$ 的 m 最大值 m_1.由 $m_1u+v<k$ 及 $(m_1+1)u+v\geqslant k$,解得

$$\frac{k-v}{u}-1\leqslant m_1<\frac{k-v}{u}$$

即
$$\frac{v-k}{u}\geqslant -m_1>-\frac{k-v}{u}$$

所以
$$m_1=-\left[\frac{u+v-k}{u}\right]$$

同样 $S(r,0)\cap\{1,2,\cdots,k-1\}$ 的元素个数为

$$n_1=-\left[\frac{r-k}{r}\right]$$

因为 $-m_1-n_1\leqslant\frac{u+v-k}{u}+\frac{r-k}{r}=2-k+\frac{v(p-q)}{p}<2-k$

所以 $m_1+n_1>k-2$,即 $m_1+n_1\geqslant k-1$,结合 i) 便得

$$(S(u,v)\cap S(r,0)\cap\{1,2,\cdots,k-1\})=\{1,2,\cdots,k-1\}$$

上式对所有 k 均成立,所以

$$S(u,v)\cup S(r,0)=N$$

贝蒂定理还可推广如下:

定理 5 设两个正无理数 α 和 β 满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,两个有理数 a 和 b 满足 $1-\alpha<1$,$b=-\frac{\beta}{\alpha}a$,定义两个递增的数列

$$A=\{[\alpha n+a]\mid n=1,2,3,\cdots\},B=\{[\beta n+b]\mid n=1,2,3,\cdots\}$$

则 A、B 满足 $A\cap B=\varnothing$ 和 $A\cup B=\mathbf{N}$.

证明 先证明 $A\cap B=\varnothing$. 用反证法,假定存在 $i,j\in\mathbf{N}$,使得 $[\alpha i+a]=[\beta i+b]=k$,因 α,β 为无理数,a,b 为有理数,从而

$$k<\alpha i+a\qquad \beta i+b<k+1$$

也即是

$$\frac{k-a}{\alpha}<i<\frac{k+1-a}{\alpha}\qquad\frac{k-b}{\beta}<j<\frac{k+1-b}{\beta}$$

因 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,$b=-\frac{\beta}{\alpha}a$,上两式相加得

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)k-\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\beta}<i+j<\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)(k+1)-\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\beta}$$

有 $k<i+j<k+1$,这是不可能的,假设不成立,从而得证 $A\cap B=\varnothing$.

再证明 $A\cup B=\mathbf{N}$,因 $1-\alpha<a<1$,则

$$[\alpha+a]\geqslant 1\qquad A\subset\mathbf{N}$$

因 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,$b=-\frac{\beta}{\alpha}a$,则 $b>\frac{\beta}{\alpha}-\beta$,$[\beta+b]\geqslant 1$,$B\subset\mathbf{N}$.

仍用反证法,假设存在正整数 $k\notin A\cup B$,则存在 i_0,j_0 使得 $i_0\alpha+a<k$,$(i_0+1)\alpha+a>k+1$,$j_0\beta+b<k$,$(j_0+1)\beta+b>k+1$,从而

$$\frac{k+1-a}{\alpha}-1<i_0<\frac{k-a}{\alpha}\qquad\frac{k+1-b}{\beta}-1<j_0<\frac{k-b}{\beta}$$

相加得 $k-1<i_0+j_0<k$,又产生了矛盾,从而得证 $A\cup B=\mathbf{N}$.

§3 应　　用

本节我们将介绍前述试题在数学竞赛命题中的一个应用,它们看起来与定理毫无联系,使我们颇有"异邦闻乡音"之感,然而这正体现了数学的所谓"意外美",表现了数学竞赛命题者的匠心独运.

例 1 以下是一道美国普特南数学竞赛试题，给定 A，B，C 三列数．A 列为十进制的形如 10^k 的数，其中 $k \geqslant 1$ 是整数，B 列和 C 列分别是将 A 列的数化为二进制和五进制的数

A	B	C
10	1010	20
100	1100100	40
1000	1111101000	13000
⋮	⋮	⋮

求证：对于任意的整数 $n > 1$，恰好有一个 n 位数存在于 B 列或 C 列中．

证明 由 Betty's 定理给定两个正无理数 x 和 y，使得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，则正整数集可以写成两个不相交序列的并

$$[x],[2x],[3x],\cdots,\quad [y],[2y],[3y],\cdots$$

10^k 在二进制下有 $[k\lg_2 10]+1$ 位，10^k 在五进制下有 $[k\lg_5 10]+1$ 位，取 $x=\lg_2 10$，$y=\lg_5 10$，应用引理即可证明原结论．

例 2 设 $f,g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{Z}^+$ 为严格递增数列，且 $f(\mathbf{Z}^+)\cap g(\mathbf{Z}^+)=\varnothing$，$F(\mathbf{Z}^+)\cup g(\mathbf{Z}^+)=\mathbf{Z}^+$，$g(m)=f(f(m))+1$，求 $f(2m)$．

（第 20 届 IMO 试题英国供题）

解 我们取 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，则显见 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，$\beta=\alpha^2$，并且 α、β 是满足上述两条件的惟一一对无理数．构造两个函数 $f(m)=[\alpha m]$，$g(m)=[\beta m]$，它们显然满足 $f,g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{Z}^+$ 为严格递增函数，由"试题"的结论可知它们又满足 $f(\mathbf{Z}^+)\cap g(\mathbf{Z}^+)=\varnothing$，$f(\mathbf{Z}^+)\cup g(\mathbf{Z}^+)=\mathbf{Z}^+$，所以只需验证：$g(m)=f(f(m)+1)$．事实上，一方面 $[\alpha m]<\alpha m\Rightarrow\alpha[\alpha m]<\alpha^2\Rightarrow\alpha[\alpha m]<\beta m\Rightarrow[\alpha[\alpha m]]<[\beta m]$（因 $\alpha>1$，所以不能取等号）；另一方面，有 $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$，$\beta=1+\alpha$，$\alpha[\alpha m]=(1+\frac{1}{\alpha})[\alpha m]=[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}[\alpha m]>[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}(\alpha m-1)$ $=[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha m-\frac{1}{\alpha}=[(\alpha+1)m]-\frac{1}{\alpha}>[\beta m]-1$，故 $[\alpha[\alpha m]]\geqslant[\beta m]-1$，综合以上有 $[\alpha[\alpha m]]=[\beta m]-1$，所以

$$f(2m)=[\alpha(2m)]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}(2m)\right]=[(1+\sqrt{5})m]=m+[\sqrt{5}m]$$

例 3 1907 年数学家威索夫(Wythoff)发明了一种两个人玩的游戏，有个数任意的两堆物体，两个局中人按下列规则来轮流操作．规则如下：(1) 可以由一

堆中取任意个(一次全部拿走也行,但不能一个不拿).(2) 可以从两堆中拿走同样多物体(个数也是任意的,但不能少于 1).

这样,谁取走最后一个物体,那么谁获胜.

如果我们用有序数对 (k,l) 表示两堆中分别有 k 个和 l 个物体,则上述操作规则相当于:i) $(k-t,l)$;ii) $(k,l-t)$;iii) $(k-t,l-t)$,其中 $t\geq 1$,我们将状态 (k,l) 称为一个局势.

我们将用"试题"的结论去证明:存在一种着法(操作手段)使得对某一类局势先着者必胜,对另一类局势后着者必胜.

如果将先着者必胜的局势称为非奇异局势,后着者必胜的局势称为奇异局势,我们说例 1 中的 $f(n)$ 与 $g(n)$ 即可构成奇异局势的两个分量.即奇异局势 (a_n,b_n) 中,$a_n=f(n)=[\alpha n]$,$b_n=g(n)=[\beta n]$.例如:$a_{100}=[100\cdot\alpha]=\left[100\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=[100\times 1.618\,033\,98\cdots]=161$;而 $b_{100}=[100\cdot\beta]=\left[100\times\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=[100\times 2.618\,033\,98\cdots]=261$.

很容易计算出前面的一些奇异局势如表 1 所示.

表 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_n	0	1	3	4	6	8	8	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44

从表 1 中我们可以观察出奇异局势的三个特征:

i) $a_0=b_0=0$;

ii) 奇异局势 $(a_n,b_n)(n=1,2,\cdots)$ 的分量 a_n 为在前 n 个奇异局势 $(a_0,b_0),(a_1,b_1),\cdots,(a_{n-1},b_{n-1})$ 中从未出现的最小自然数;

iii) $b_n=a_n+n$.

i) 是显然的,我们仅证明 iii),ii) 请读者自证.事实上

$$b_n-a_n=[n\beta]-[n\alpha]=[n\alpha]^2-[n\alpha]=$$
$$[n(1+\alpha)]-[n\alpha]=[n+n\alpha]-[n\alpha]=n+[n\alpha]-[n\alpha]=n$$

另外由奇异局势的构造法和例 1 的结论可知:对任意一个自然数 k,它必出现且仅出现在一个奇异局势中.据此我们有如下的引理:

引理 1 (1) 威索夫游戏中的任意着法都使奇异局势变为非奇异局势;(2) 对任一非奇异局势,采用适当的着法,可将其变为奇异局势.

证明 先证(1):若奇异局势 (a_n,b_n) 经操作一次后得到的局势 $(a_n-t,$

$b_n)(t \geqslant 1)$ 仍为奇异局势，则 b_n 同时出现在两个奇异局势中，这是不可能的，故 $(a_n - t, b_n)(t \geqslant 1)$ 为非奇异局势.

同理 $(a_n, b_n - t)(t \geqslant 1)$ 亦为非奇异局势.

若奇异局势 (a_n, b_n) 经一次操作变为 $(a_n - t, b_n - t)(t \geqslant 1)$，则 $a_k - b_k = (a_n - t) - (b_n - t) = a_n - b_n = n \neq k$，由奇异局势的特征 iii) 知，$(a_n - t, b_n - t)$ 为非奇异局势.

再证(2). 如果给定的非奇异局势为 (m, m)，$m \neq 0$，那么，令 $t = m$，作如下操作 $(m - t, m - t) = (0,0)$ 后变为奇异局势.

如果给定的非奇异局势 (m, k)，$m < k$，分以下几种情况讨论：

i) $m = a_n, k > a_n + n = b_n$，显然只需令 $t = k - b_n$. 再作如下操作 $(m, k - t)$，就给出了奇异局势 (a_n, b_n).

ii) $m = a_n, k < a_n + n$，即 $k - a_n = k - m = l < n$，这时只需令 $t = a_n - a_l$，作如下操作

$$(m - (a_n - a_l), k - (a_n - a_l)) = (a_l, a_l + l) = (a_l, b_l)$$

也得到了奇异局势.

iii) $m = b_n$，则令 $t = k - a_n$，再施行操作 $(m, k - t)$ 可得奇异局势 (b_n, a_n)，亦即 (a_n, b_n).

定理 6 在威索夫游戏中的两对弈者，如果都采用正确的着法，那么胜负将由初始局势所确定. 即如果初始局势是非奇异的，则先着者必胜；若初局是奇异的，后着者必胜.

证明 由引理可知任何一个对弈者只要面对奇异局势又行了一着，那么他将会使局势变为非奇异的，而他的对手总有办法再行一着使局势恢复为奇异的. 且对手间每次操作后，总使局势中的分量之和 $a_n + b_n$ 逐渐减少，由于初始局势的分量和为一有限值，所以一定存在那样一个时刻使得局势为 $(a_0, b_0) = (0,0)$. 由于当初始值为奇异局势时，先着者总是将局势变为非奇异的，而后着者又总有办法将局势变回到奇异的，但 $(0,0)$ 是奇异的，所以后着者必胜.

同理当局势初始时为非奇异的，因先着者总有办法使之变为奇异的，所以仿上推理知，先着者必胜.

此定理要求对弈时我们手里应有一张大范围的奇异局势表.

§4 互补序列与可逆序列

我们在前几节讨论的均是具有以下两性质：i) $\{a_n\} \cup \{b_n\} = \mathbf{N}$; ii) $\{a_n\} \cap$

$\{b_n\}=\varnothing$的两序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$.我们形象地将这两个序列称为互补序列.数学家J.拉姆贝克(Lambek)与L.莫斯尔(Leo Moser)深入研究了这种序列,发表了如下的有趣结果:

Lambek – Moser 定理　设$f(n)$是一个$\mathbf{Z}'\to\mathbf{Z}'$的不减函数,其中$\mathbf{Z}'=\mathbf{Z}^{+}+\{0\}$,定义$f^{*}(n)=|\{k\mid f(k)<n\}|$,其中$|Z|$表集合$Z$中元素的个数,记$F(\mathbf{Z}')$和$G(\mathbf{Z}')$分别为两函数$F(n)=f(n)+n$,$G(n)=f^{*}(n)+n$的值域,则$F(\mathbf{Z}')$与$G(\mathbf{Z}')$是互补的.

证明　易见$f^{*}(n)$可等价地表示为$\max\{k\mid f(k)<n\}$.显然$f^{*}(n)$是不减的,又$f(n)$是不减的,故$F(n)$与$G(n)$为严格递增函数.

以下验证:i)$F(\mathbf{Z}')\cup G(\mathbf{Z}')=\mathbf{Z}'$;ii)$F(\mathbf{Z}')\cap G(\mathbf{Z}')=\varnothing$.

i)若存在$\alpha\geqslant 1,\alpha\in\mathbf{Z}'$但$\alpha\notin F(\mathbf{Z}')$即不存在一个$\beta$,使得$\alpha=f(\beta)+\beta$.我们分两种情况讨论.

1)$\alpha\leqslant f(0)+0=f(0)$,这时注意到$f(n)$的不减性,知不存在这样的整数$k$使$f(k)<\alpha$,则由$f^{*}(n)$的定义知$f^{*}(\alpha)=0$,且$\alpha=f^{*}(\alpha)+\alpha$,则$\alpha\in G(\mathbf{Z}')$.

2)$\alpha>f(0)+0$,这时注意到$f(n)$的不减性,一定存在一个$\alpha\in\mathbf{Z}^{*}$,使得$f(p)+p<\alpha<f(p+1)+p+1$.由于不等式中各项均为整数,所以有

$$f(p)+p<\alpha\leqslant f(p+1)+p\Rightarrow f(p)<\alpha-p\leqslant f(p+1) \tag{8}$$

当$p=0$时,式(8)变为

$$f(0)<\alpha\leqslant f(1)\Rightarrow f^{*}(\alpha)=0\Rightarrow\alpha=f^{*}(\alpha)+\alpha\Rightarrow\alpha\in G(\mathbf{Z}')$$

当$p\geqslant 1$时,由式(8)可得$p=f^{*}(\alpha-p)$,并且由于$\alpha-p>f(p)\geqslant 0\Rightarrow\alpha-p\geqslant 1\Rightarrow\alpha=(\alpha-p)+p=(\alpha-p)+f^{*}(\alpha-p)\Rightarrow\alpha\in G(\mathbf{Z}')$.

综合以上可知结论i)成立.

ii)我们只需证:如果某一$\beta\in\mathbf{Z}'$,且$\beta\geqslant 1$.β若在$G(\mathbf{Z}')$中,则它一定不在$F(\mathbf{Z}')$中.

若$\beta\in G(\mathbf{Z}')$,则存在$\gamma\in\mathbf{Z}'$,使得$\beta=f^{*}(\gamma)+\gamma,\beta\geqslant 1,\gamma\geqslant 1$,有

$$\beta-\gamma=f^{*}(\gamma) \tag{9}$$

若$\beta=\gamma$,则式(9)变为$0=f^{*}(\gamma)=f^{*}(\beta)$.就是说不存在整数$q\geqslant 1$,使得$f(p)<\beta\Rightarrow f(1)\geqslant\beta$.再注意到$f$是不减的,所以我们有:对于所有$s\geqslant 1$,$f(s)+s>\beta\Rightarrow\beta\notin F(\mathbf{Z}')$.

若$\beta-\gamma\geqslant 1$,由(9)并顾及到f^{*}的定义有

$$f(\beta-\gamma)<\gamma\leqslant f(\beta-\gamma+1)$$

将上式各项加上$\beta-\gamma$得

$$\beta-\gamma+f(\beta-\gamma)<\beta\leqslant\beta-\gamma+f(\beta-\gamma+1)<\beta-\gamma+1+f(\beta-\gamma+1)$$

所以我们可以断言，对所有 $q = \beta - \gamma \geqslant 1, \beta \notin F(\mathbf{Z}')$.

综合 i)、ii) 可知命题为真.

在 Lambek－Moser 定理中的 f^* 与 f 被称为互逆序列，因为可以证明 $f^{**} = f$，即：

设 $f^*(y) = \max\{x \geqslant 0 \mid f(x) \leqslant y\}$，当 $x \geqslant 0, f(x)$ 是一个严格递增函数时，有 $f^*(f(x)) = x$.

事实上，设 $f(x_0) = n$. 现在 $f^*(n)$ = 使得 $f(x)$ 小于等于 n 的最大 x，亦即，使得 $f(x)$ 小于等于 $f(x_0)$ 的最大的 x. 显然，x_0 是满足这个不等式的一个值. 因为 f 是严格递增的，所以 x_0 就是最大的这样的 x. 于是 $f^*(n) = f^*(f(x_0)) = x_0$，对任意 x_0 都成立.

对于互逆序列我们有下面 Lambek－Moser 定理的逆定理：

逆定理 如果 $F(n)$ 与 $G(n)$ 是互逆序列，则序列 $f(n) = F(n) - n$，$g(n) = G(n) - n$ 是互逆的. 即 $g(n) = f^*(n), f(n) = g^*(n)$.

例 4 求证：在正整数列删去所有的完全平方数后，第 n 项等于 $n + \langle\sqrt{n}\rangle$，其中 $\langle\sqrt{n}\rangle$ 表示最接近 $\sqrt{n}$ 的整数.

证明 此问题可转化为：对于两个互补序列

$F(n)$：1，4，9，16，25，36，49，…； $G(n)$：2，3，5，6，7，8，10，…

求证：序列 $G(n)$ 的第 n 项公式为 $G(n) = n + \langle\sqrt{n}\rangle$.

只需构造两个互逆序列 f 与 f^*，如果我们得到了 $f^*(n)$ 的公式，则由 $G(n) = f^*(n) + n$. $G(n)$ 的公式立即可得. $f(m) = F(m) - m = m^2 - m$，由 f^* 的定义，并注意到 $m(m-1)$ 的递增性

$$f^*(n) = \max\{m \mid f(m) < n\} = \max\{m \mid F(m) - m < n\} = \max\{m \mid m^2 - m < n\} = \max\{m \mid m(m-1) < n\}$$

因为 $m, n \in \mathbf{Z}^+$，所以

$$\max\{m \mid m(m-1) < n\} = \max\{m \mid m^2 - m < n - \frac{1}{4}\} =$$

$$\max\{m \mid m^2 - m + \frac{1}{4} < n\} = \max\{m \mid (m - \frac{1}{2})^2 < n\} =$$

$$\max\{m \mid m - \frac{1}{2} < \sqrt{n}\} = \max\{m \mid m < \sqrt{n} + \frac{1}{2}\}$$

$$f^*(n) = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$$

$$G(n) = f^*(n) + n = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] + n$$

现在证明：$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = \langle\sqrt{n}\rangle$.

事实上,存在 $k\in\mathbf{N}$,使 $k\leqslant\sqrt{n}<k+1$.

i) 若 $k\leqslant\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$,则 $k+\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1$,所以 $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k$.

ii) 若 $k+\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{n}<k+1$,则 $k+1\leqslant\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1+\frac{1}{2}$,所以 $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k+1$.

无论 i)、ii) 哪种情况,$\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right]$ 都是最接近 $\sqrt{n}$ 的整数.

§5　再谈数列的 N - 互补性

上海市杨浦区教育学院的严华祥先生从另一个角度研究了这一问题.

我们先考察下列两对整数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 它们的通项依次为:

i) $a_n=3n$, $b_n=n+\left[\frac{2n-1}{4}\right]$, $n\in\mathbf{N}$, 这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(下同).

ii) $a_n=n+[\ln n]$, $b_n=n+[\mathrm{e}^n]$, $n\in\mathbf{N}$, 这里 $\ln x$ 为自然对数, $\mathrm{e}=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$, 是自然对数底. 它们的前 n 项如表 2 所示.

表 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$3n$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	…
$n+\left[\frac{2n-1}{4}\right]$	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	…
$n+[\ln n]$	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	…
$n+[\mathrm{e}^n]$	3	9	23	58	153	409	1103	2988	8112	22036	…	…

发现在每一对数列中,任一个自然数恰好出现一次. 就是说,一对数列中每个数列的项不相同,构成的集合 $\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ 和 $\{b_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ 满足两条:

i) $\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{b_n\mid n\in\mathbf{N}\}=\mathbf{N}$;

ii) $\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}\cap\{b_n\mid n\in\mathbf{N}\}=\varnothing$.

如前述我们称这样的一对数列为 N - 互补的.

这两对数列的问题及与此有关的问题引出了一个猜测,一个一般的结论,

想法是从第二对数列提出来的.

第二对数列的证明相当难,但它的形式很有启发性,若令 $\varphi(x)=\ln x$,则其反函数 $\varphi^{-1}(x)=e^x$.从而 $a_n=n+[\varphi(n)]$,$b_n=n+[\varphi^{-1}(n)]$.第一对数列也可有类似的关系,于是有了下面的一般化结果.

定理 7 设 $\varphi(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的严格单调增函数,值域包含区间 $[1,\infty)$,且对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\varphi(n)\notin\mathbf{Z}$,那么数列 $f(n)=n+[\varphi(n)]$ 与 $g(n)=n+[\varphi^{-1}(n)]$ $(n\in\mathbf{N})$ 是 N - 互补的.

证明 显见,$f(n)$ 与 $g(n)$ 是 n 的单调函数,故只需证明:

i) 对任何 $m,n\in\mathbf{N}$,有 $f(m)\neq g(n)$.用反证法:

若 $f(m)=g(n)$.对某 $m,n\in\mathbf{N}$ 成立.即 $m+[\varphi(m)]=n+[\varphi^{-1}(n)]$.令 $k=[\varphi(m)]$,$l=[\varphi^{-1}(n)]$,则有 $\varphi(m)=k+\alpha$,$\varphi^{-1}(n)=l+\beta$.且因为 $\varphi(m)$ 和 $\varphi^{-1}(n)\notin Z$.有 $0<\alpha,\beta<1$ 及 $\varphi(l+\beta)=n$.从而有

$$m+\varphi(m)>m+[\varphi(m)]=n+[\varphi^{-1}(n)]+1=\varphi(l+\beta)>\varphi(l)+1$$

由 $\varphi(x)$ 的单调性知 $m>l$,即 $m\geqslant l+1$.所以

$$m+[\varphi(m)]\geqslant l+1+[\varphi(l+1)]=[\varphi^{-1}(n)]+[\varphi(l+1)]+1\geqslant$$
$$[\varphi(1+\beta)]+1=[\varphi^{-1}(n)]+n+1$$

即 $f(n)\geqslant g(n)+1$,与 $f(m)=g(n)$ 矛盾.

ii) 证明:对任何 $k(\in\mathbf{N})$ 恰是某个 $f(n)$ 或 $g(n)$.

考虑到 $\varphi(x)$ 是单调增的.若 $\varphi(1)>1$,必有 $\varphi^{-1}(1)<1$.即 $\varphi(1)$ 与 $\varphi^{-1}(1)$ 中恰有一个小于1,不妨设 $\varphi(1)<1$.从而 $f(1)=1+[\varphi(1)]\leqslant 1$.如果对 $k\in\mathbf{N}$,有 $k\notin\{f(n)\mid n\in\mathbf{N}\}$.下面寻求 l,使 $g(l)=k$.

显见,集 $\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<k\}\neq\varnothing$.(注意,若 $k=1$,则 $f(1)<1$).于是可令 $n_0=\max\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<k\}$.则有不等式

$$k_0=f(n_0)<k<f(n_0+1)=k'$$

从而,$k_0+2\leqslant k+1\leqslant k'$.就有 $k'-k_0\geqslant 2$.

$$k_0=f(n_0)=n_0+[\varphi(n_0)]<k<n_0+1+[\varphi(n_0+1)]=k'$$

所以 $\quad k_0-n_0=[\varphi(n_0)]<k-n_0<1+[\varphi(n_0+1)]=k'-n_0$

$$\varphi(n_0)<k-n_0\leqslant[\varphi(n_0+1)]<\varphi(n_0+1)$$

因为 $\varphi^{-1}(n)$ 与 $\varphi(x)$ 一样也是单调增的,两边取 φ^{-1},则有 $n_0<\varphi^{-1}(k-n_0)<n_0+1$,所以 $[\varphi^{-1}(k-n_0)]=n_0$.取 $l=k-n_0$,则 $l+n_0=k$,从而有 $l+[\varphi^{-1}(l)]=k$,即 $g(l)=k$.

由定理7,第二对数列 N - 互补就易证了,因为 $\varphi(x)=e^x$ 单调增,定义域取 $[0,\infty)$ 时,值域包含 $[1,\infty)$.对自然数 $n>1$,$e^n\notin\mathbf{Z}$,其反函数 $\varphi^{-1}(x)=\ln x$.考虑到 $n=1,2,3$ 在表中已列出,可见 $f(n)=n+[\varphi(n)]$ 和 $g(n)=$

$n+[\varphi^{-1}(n)]$ 为 N – 互补数列.

至于第一个数列,从 $a_n=3n$,有$[\varphi(n)]=2n$,但若取 $\varphi(x)=2x$,会有 $\varphi(n)=2n\in\mathbf{N}$,就不合定理 7 的要求,由 $b_n=n+\left[\frac{2n-1}{4}\right]$有$[\varphi(n)]=\left[\frac{2n-1}{4}\right]$,取 $\varphi(x)=\frac{2x-1}{4}$,则 $\varphi^{-1}(x)=2x+\frac{1}{2}$,$\varphi(n)=\frac{2n-1}{4}\in\mathbf{Z}(n\notin\mathbf{N})$ 且 $\varphi(x)$ 的定义域和值域也合定理 7 的要求,并且

$$f(n)=n+[\varphi(n)]=n+\left[\frac{2n-1}{4}\right]=b_n$$

$$g(n)=n+[\varphi^{-1}(n)]=n+\left[2n+\frac{1}{2}\right]=3n=a_n$$

由定理 7,$f(n)$ 与 $g(n)$ 是 N – 互补的,$\{a_n\}$ 与$\{b_n\}$ 也就 N – 互补.

定理 7 证明中多次用到 $\varphi(n)\notin\mathbf{Z}$ 的性质.这是重要的.例如 $a_n=n+[\sqrt{n^3+1}]$和 $b_n=n+[\sqrt[3]{n^2-1}](n\in\mathbf{N})$.它们的前 n 项如表 3 所示.

表 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$n+[\sqrt{n^3+1}]$	2	5	8	12	16	20	25	30	36	41	…
$n+[\sqrt[3]{n^2-1}]$	1	3	5	6	7	9	10	11	13	14	…

综述

它们的项中没有 4,而却有 $a_2=b_3=5$,因为不定方程 $y^2=x^3+1$ 的整数解只有 $x=2,y=3$(由 $x^3=(y-1)(y+1)$ 可看出),所以这一对数列除此之外,所有自然数都出现一次,改动一点,使 $a_n=n+\left[\sqrt{n^3+\frac{1}{2}}\right]$,$b_n=n+\left[\sqrt[3]{n^2-\frac{1}{2}}\right]$就 N – 互补了.

由定理 7,容易得到下面的:

推论 若 $\alpha>0,\beta>0$ 为无理数,且$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$,则数列$[n\alpha]$和数列$[n\beta]$是$N$ – 互补的.

证明是简单的,由$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$构造 $\varphi(x)$.使$f(n)=[n\alpha]$,$g(n)=[n\beta]$.这只要令$\varphi(x)=(\alpha-1)x$.这是正比例函数,且易见$\alpha>1$,$\varphi(x)$单调增,满足定理 7 对 $\varphi(x)$ 的全部条件,这时的 $\varphi^{-1}(x)=\frac{x}{\alpha-1}$.而由$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$得 $\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$,$g(n)=n+[\varphi^{-1}(n)]=[n+\varphi^{-1}(n)]=\left[n+\frac{n}{\alpha-1}\right]=$

$\left[n\cdot\frac{\alpha}{\alpha-1}\right]=[n\beta]$, $f(n)=n+[\varphi(n)]=[n+(\alpha-1)n]=[n\alpha]$. 由定理 7 知 $f(n)$ 与 $g(n)$ 是 N - 互补的,即$[n\alpha]$与$[n\beta]$是N - 互补的.

例 5 从自然数集 N"筛选"数列$\{a_n\}$:设 $a_1=1$,删去 $b_1=a_1+k$,其中 k 是某个自然数,接着取 a_2 为 N 中除去 a_1,b_1 后最小的数,删去 $b_2=a_2+2k$,取 a_3 为 N 中除去 a_1,a_2,b_1,b_2 后最小的数,删去 $b_3=a_3+3k$,如此继续下去,得到数列$\{a_n\}$,求 a_n 的表达式.

解 由数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的构成,知它们是 N - 互补的,$\{a_n\}$的惟一性是明显的,用构造法,给其一个形式,找出通项来:令 $a_n=[n\alpha]$,$(\alpha>0,\alpha\notin\mathbf{Q})$. 则 $b_n=a_n+nk=[n\alpha]+nk=[n(\alpha+k)]$,再令 $\beta=\alpha+k\notin\mathbf{Q}$. 由$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ 求得 $\alpha=\frac{1}{2}(2-k+\sqrt{k^2+4})>0$. 由于 $k>0$ 为自然数,k^2+4 不是完全平方数,从而 α 是一个正的无理数,又$\{a_n\}$与$\{b_n\}$互补. $a_n=[n\alpha]$为所求.

由定理 7 可以编拟和解答下列问题:

i) 任何一个公差 $d=k-1$, $a_1\in\mathbf{N}$ 的等差数列都有一个形如 $b_n=n+[\varphi(n)]$ 的 N - 互补数列(取 $\varphi(x)=(k-1)x+a_1-k+\alpha$, $\alpha>0$ 为无理数).

ii) 已知数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=n+\left[\csc\frac{\pi}{2(n+1)}\right]$,数列$\{b_n\}$的通项 $b_n=n-1+\left[\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n}\right]$,则$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是 N - 互补的.

iii) 数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=3n^2-2n$,数列$\{b_n\}$的通项 $b_n=n+\left[\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}\right]$, $n\in\mathbf{N}$. 则$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是 N - 互补的.(取 $\varphi(x)=\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}$).

iv) 已知数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=n+\left[\sqrt{3n}+\frac{1}{2}\right]$,数列$\{b_n\}$的通项 $b_n=\left[\frac{n^2+2n}{3}\right]$,则$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是 N - 互补的.

(提示:取 $\varphi(x)=\sqrt{3x}+\frac{1}{2}$,则 $\varphi^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})^2$,这时 $b_n=n+[\varphi^{-1}(n)]=\left[n+\frac{n^2-n}{3}+\frac{1}{12}\right]=\left[\frac{n^2+2n}{3}+\frac{1}{12}\right]=\left[\frac{n^2+2n}{3}\right]$. 可见这里的 $\varphi(x)$ 中所用常数$\frac{1}{2}$还可以改为其他小于 1 的正数).

可见解决这些例题和练习题的关键在于构造函数 $\varphi(x)$,而它不惟一,因为我们只利用其函数值的整数部分.

§6 Beatty 定理与一道 34th IMO 试题

在 1993 年举行的第 34 届 IMO 中的第 5 题为：

试题 2 设 $N = \{1,2,3,\cdots\}$，论证是否存在一函数 $h:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，使得

(1) $h(1) = 2$；

(2) $h(h(n)) = h(n) + n$ 对一切 $n \in \mathbf{N}$ 成立；

(3) $h(n) < h(n+1)$ 对一切 $n \in \mathbf{N}$ 成立.

从公布的解答来看，有一种很唐突的感觉，因为它一开始就构造了一个函数

$$h(n) = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

（其中 $[x]$ 表示 Gauss 函数），然后逐条验证它满足题中的条件，（解答见《中等数学》1993 年第 5 期或《福建中学数学》1993 年第 6 期），这两个解答都像一块"飞来之石"来路不明，给人以很大的疑问，这个函数是怎么想到的？

前苏联教育专家苏霍姆林斯基说："你要使你的学生……面前出现疑问，如果你能做到这一点，事情就成功了一半"（《谈教师的建议》）所以我们要珍惜这个疑问，要回答这个问题必须从 1978 年在罗马尼亚举行的第 20th IMO 中英国所提供的第 3 题的解法谈起.

试题 3 设 $f,g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{Z}^+$ 严格递增函数，且 $f(\mathbf{Z}^+)\cup g(\mathbf{Z}^+) = \mathbf{Z}^+$，$f(\mathbf{Z}^+)\cap g(\mathbf{Z}^+) = \varnothing$，$g(n) = f(f(n)) + 1$，求 $f(2n)$，（$\mathbf{Z}^+$ 是正整数集合，$\varnothing$ 是空集）.

此题有多种解法，但比较有价值的解法是利用 Beatty 定理的解法（见《互补与互逆序列》湖南数学通讯 1992.4），其解法的关键是导出 $g(n)$ 与 $f(n)$ 的一个关系式，即

$$g(n) = f(n) + n \tag{8}$$

又注意到已知条件中的 $g(n) = f(f(n)) + 1$，故有

$$f(f(n)) + 1 = f(n) + n \tag{9}$$

而这与试题 2 中的条件（2）何其相似，有相似的条件必有相似的结果，试题 3 最后的答案为

$$f(n) = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right] \qquad g(n) = \left[\frac{\sqrt{5}+3}{2}n\right]$$

其中显然 $f(n+1) > f(n)$ 与试题 2 中的条件（3）相似，以上的解题经验告诉我们，可以猜测：$h(n)$ 应与 $f(n)$ 差不多，由 $h(1) = 2$，$f(1) = 1$，$h(1) = f(1) + 1$，

一般会猜测：$h(n)=f(n)+1$.

但遗憾的是验证不了它满足条件(3). 所以我们必须换一种猜测，注意到 $f(2)=3, h(1)=3-1=f(2)-1$，故可猜测 $h(n)=f(n+1)-1$，即 $f(n+1)=h(n)+1$，剩下的只需验证 $h(n)$ 满足条件(2)，(3) 即可.

由试题 3 证明中的式(2)

$$f(f(n))=f(n)+n-1\Leftrightarrow f(h(n-1)+1)=$$
$$h(n-1)+n\Leftrightarrow h(h(n-1))+1=h(n-1)+n\Leftrightarrow$$
$$h(h(n-1))=h(n-1)+(n-1)$$

即
$$h(h(n))=h(n)+n$$

再由 $f(n)$ 的递增性可推知 $h(n)$ 的递增性，至此

$$h(n)=f(n+1)-1=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)\right]-1=$$
$$\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1\right]=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

完全符合试题 2 的三个条件. 所以从这个意义上讲试题 2 与试题 3 是等价的. 即严格说来试题 2 并不是一个新题.

单墫教授给出了一个易于接受的讲叙过程.

这是一个需要判断的问题. 满足要求的函数是否存在？如果存在，它是什么？如果不存在，为什么？

面对一个难题，解决的方法只有先“尝试”(有一位哲人说过：“自古成功在尝试”).

尝试(也就是探索) 应从简单情况入手. 最简单的情况莫过于一次函数 $an+b$，而 $b=0$ 则是它最简单的情况. 因此，不妨设 $h(n)=an(n\in\mathbf{N})$ 试试. 由于(3) 的要求，函数递增，所以，a 应当大于 0.

$a=1$ 时，$h(n)=n$，这时，$h(1)=1$，不符合条件(1).

$a=2$ 时，$h(n)=2n$. 此时(1)，(3) 满足，(2) 怎样呢？

$$h(h(n))=2f(n)=f(n)+f(n)=f(n)+2n$$

很遗憾，(2) 不满足！

更大的 a，导致比 $h(n)+2n$ 更大的 $h(h(n))$，因此，没有使(2) 成立的 a.

$h(n)=an+b(a>0, b\neq 0)$ 也不能使(2) 成立，这是因为，这样将导致

$$h(h(n))=ah(n)+b=a(an+b)+b=a^2n+(ab+b)=$$
$$(an+b)+n=(a+1)n+b$$

即
$$(a^2-a-1)n=-ab(n\in\mathbf{N})$$

显然，上式是不可能成立的.

一次函数不能满足要求，能否断言满足要求的函数不存在了呢？不能，线性

函数不满足要求，其他函数还可能满足要求．如果将次数升高，比如二次函数

$$h(n)=an^2+bn+c(a\neq 0)$$

此时，$h(h(n))$ 变成 4 次，(1) 式更不能成立，由此断定，次数不能升高，还是回到一次较接近目标(因为 $h(n)=2n$ 已满足(1)．但在 $a=1$ 及 $a\geqslant 2$ 时尝试都告失败，真是"山重水复疑无路"了！)

仔细回顾一下，$a=1$ 太小，$a=2$ 又大了．a 在 1,2 之间如何呢？这样就必须放弃 a 为整数的要求(这一限制是我们自己加的，可以放弃)．为探索 a，用待定系数法．

对于 $h(n)=an$，有 $h(h(n))=a^2n$．要使(2)成立，即 $a^2n=an+n$，我们应取

$$a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

遗憾的是 $h(n)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}n$ 不是整值函数，它的值是无理数，虽然它能使(2)成立．

我们真是陷入"顾此失彼"的绝境．

冷静分析题目对 $h(n)$ 的三个要求．(2) 是关键，既然 $h(n)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}n$ 满足不了(2)，千万不要轻易放弃．

为使 $f(n)$ 为整值，这并不难，取

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right]$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

它首先满足(3)，但 $f(1)=1\neq 2$，为此，修正它，令

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right]+1$$

此时，$h(n)$ 满足(1)，(3)．而

$$\begin{aligned}h(h(n))&=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}h(n)\right]+1=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}h(n)\right]+h(n)+1=\\&\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right]+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+h(n)+1=\\&\left[n-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right\}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+h(n)+1=h(n)+n+1\end{aligned}$$

不满足(2)，但已相差不远，再作"微调"，令

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right]\qquad 0<b<1$$

这时

$$h(h(n))=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}h(n)+b\right]=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}h(n)+b\right]+h(n)=$$

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right]+b\right]+h(n)=$$

$$h(n)+n+\left[b+\frac{\sqrt{5}-1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}\right]$$

这里 $\{x\}=x-[x]$，当 x 为无理数时，$\{x\}$ 表示一个 0，1 之间的纯小数.

我们希望上式中··为 0，则

$$0<\frac{\sqrt{5}+1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1$$

为此，取 $b=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，此时

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)-1$$

是无理数. 从而

$$0<\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1$$

更有

$$0<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1$$

因此

$$0<\frac{\sqrt{5}+1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1$$

从而

$$h(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

就满足所有要求，它就是所求函数.

§8　几种不同解法

1981 年，香港大学数学系的杨森茂教授和福建师范大学数学系副教授陈圣德合作编译了《第一届至第二十二届国际中学数学竞赛题解》，其中给出了两个解法. 值得一提的是，陈圣德先生在刚刚完成书稿于 1981 年 10 月不幸病故. 记

录于此，以示纪念.

解法 1　由题设知

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(n) < \cdots$$

$$g(1) < g(2) < g(3) < \cdots < g(n) < \cdots$$

$$u \leqslant f(u) \leqslant f[f(u)] < g(u) \tag{10}$$

现在先算出开头的几个函数值. 显然

$$f(1) = 1 \qquad g(1) = f(1) + 1 = 2$$

因为 $g(2) > f(2) > f(1)$，而 3 必有一函数值和它相等，故 $f(2) = f(3)$，从而 $g(2) = f(3) + 1$，于是得

$$f(3) = 4 \qquad g(2) = 5$$

再则 $g(3) = f(4) + 1$，故得

$$f(4) = 6 \qquad g(3) = 7$$

依此推算下去，可得

$$f(5) = 8 \qquad g(4) = 19$$

$$f(6) = 10 \qquad g(5) = 11$$

$$f(7) = 12 \qquad g(6) = 13$$

$$\cdots$$

若 $f(s) = m$，则在首 m 个正整数中，f 值恰好出现 s 次，而其余 $m - s$ 个正整数中，每一个必有一 g 值和它相等. 设 t 是满足不等式

$$g(t) < f(s) \tag{11}$$

的最大整数，则 $t = m - s$，即

$$f(s) = s + t \tag{12}$$

又因 $f[f(t)] + 1 = g(t)$，由式(11) 得

$$f[f(t)] < f(s)$$

由于 f 的严格单调性，上式等价于

$$f(t) < s \tag{13}$$

这里 t 是满足式(13) 的最大整数. 一般地讲，$f(t)$ 的值接近于 s，即

$$s \approx f(t) \tag{14}$$

以式(14) 除式(12) 的两边得

$$\frac{f(s)}{s} \approx 1 + \frac{t}{f(t)}$$

这样我们就可以看出 f 值和它的自变量的值的比约等于下面方程的一个正根

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

或

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{15}$$

式(15)的正根为$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$,故

$$f(s) \approx \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s \tag{16}$$

计算得

$$f(1) \approx 1.6, f(2) \approx 3.2, f(3) \approx 4.9, f(4) \approx 6.4, \cdots$$

把这些值与前面算得的准确值进行比较,不难看出只要去掉近似值的小数部分,就都成为等式,即

$$f(s) = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s\right] \tag{17}$$

这里$[x]$表示x的整数部分.

假如式(17)对于小于s的t成立,即

$$f(t) = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})t\right]$$

则t就满足

$$\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})t\right] < s \tag{18}$$

的最大整数.由于s是整数,故

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})t < s \quad 或 \quad t < 2s/(1+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)s \tag{19}$$

因为满足式(18)的最大整数亦即满足式(19)的最大整数,故

$$t = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)s\right]$$

于是由式(12)得

$$f(s) = s + \left[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)s\right] = \left[s + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)s\right] = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s\right]$$

这样就证明了对于任何s,等式(17)都能成立.

令$s = 2u$,得

$$f(2u) = [(1+\sqrt{5})u]$$

解法 2 由题设知f, g的值都不互相重复,而且每一个正整数都有一个f值或g值和它相等,所以若$g(n) = k$,则在首k个正整数中,g值出现n次,f值出现$k-n$次.又因$g(n) = f[f(n)]+1$,故小于$g(n)$的f值有$f(n)$个.由此可知$f(n) = k-n$,即

$$g(n) = f(n) + n \tag{20}$$

由式(20)及解法1,开头n个函数值就可以算出.

设在 $g(n-1)$ 和 $g(n)$ 之间有 t 个 f 值，则下面的一组函数值是连续整数

$$f(m-1),g(n-1),f(m),f(m+1),\cdots,f(m+t-1),g(n)$$

由于

$$g(n-1)=f(m-1)+1 \qquad g(n)=f(m+t-1)+1$$

故有

$$f[f(n-1)]=f(m-1) \qquad f[f(n)]=f(m+t-1)$$

又由于 f 的严格单调性，得

$$f(n-1)=m-1 \qquad f(n)=m+t-1$$

于是 $m,m+1,\cdots,m+t-2$ 这 $t-1$ 个数是 g 的 $t-1$ 个值. 但由 $g(n)=f[f(n)]+1$ 知两个 g 值之间至少有一个 f 值，故 $t-1=0$ 或 1，即 $t=1$ 或 2. 故两个 g 值之间至多有两个 f 值. 由此又知

$$f(n)=f(n-1)+1 \quad 或 \quad f(n-1)+2 \tag{21}$$

现在我们用归纳法证明不等式

$$[f(n)]^2-nf(n)<n^2<[f(n)+1]^2-n[f(n)+1] \tag{22}$$

当 $n=1$ 时，$f(1)=1$，式(22)显然成立.

假设当 $1\leqslant n\leqslant s$ 时，式(22)都成立. 当 $n=s+1$ 时，则由式(21)知 $f(s+1)=f(s)+j$，$j=1$ 或 2.

情形 1：$f(s+1)=f(s)+1$.

这时式(22)的左边可写成

$$[f(s)+1]^2-(s+1)[f(s)+1]=[f(s)]^2-sf(s)+f(s)-s \tag{23}$$

由归纳假设，$[f(s)]^2-sf(s)<s^2$，又显然 $f(s)<2s$，故式(23)的左边小于

$$s^2+f(s)-s<s^2+s<(s+1)^2$$

这样就证明了式(22)左边的不等式.

因为 $f(s-1),g(t),f(s),f(s+1),g(t+1)$ 是连续整数，故有

$$f[f(t)]=f(s-1) \qquad f[f(t+1)]=f(s+1)$$

于是

$$f(t)=s-1 \qquad f(t+1)=s+1$$

所以存在

$$g(r)=s \qquad f[f(r)]=s-1=f(t)$$

即 $f(r)=t$. 而

$$s=g(r)=f(r)+r=t+r$$

即 $r=s-t$. 又

$$f(s+1)=g(t+1)-1=f(t+1)+(t+1)-1=s+t+1$$

所以

$$f(r)=t=f(s+1)-(s+1)$$
$$r=s-t=(2s+1)-f(s+1)$$

因为 $r<s$，所以由归纳假设，式(22)右边不等式成立. 把 r 和 $f(r)$ 代入并移项得

$$r[f(r)+r+1]<[f(r)+1]^2$$

即 $$[2s+1-f(s+1)](s+1)<[f(s+1)-s]^2$$

展开并移项，得

$$[f(s+1)]^2-(s-1)f(s+1)-s>s^2+2s+1$$

所以 $$[f(s+1)+1]^2-(s+1)[f(s+1)+1]>(s+1)^2$$

这样，式(22)右边的不等式也证明了.

情形 2：$f(s+1)=f(s)+2$.

由于 $f(s)$，$g(t)$，$f(s+1)$ 是连续整数，故

$$s=f(t)$$
$$f(s+1)=g(t)+1=f(t)+t+1=s+t+1$$

即 $t=f(s+1)-(s+1)$.

因为 $t\leqslant f(t)=s$，所以由归纳假设，式(22)右边的不等式成立. 把 t 和 $f(t)$ 代入得

$$t^2<[f(t)+1]^2-s[f(t)+1]$$

即 $$[f(s+1)-(s+1)]^2<(s+1)^2-[f(s+1)-(s+1)](s+1)$$

展开并移项得

$$[f(s+1)]^2-(s+1)f(s+1)<(s+1)^2$$

这样就证明了式(22)左边的不等式. 再则

$$[f(s+1)+1]^2-(s+1)[f(s+1)+1]=$$
$$[(f(s)+1)+2]^2-(s+1)[f(s+1)+1]=$$
$$[f(s)+1]^2-s[f(s)+1]+3f(s)-2s+5>s^2+3f(s)-2s+5$$

要证明式(22)右边的不等式成立，只要证明

$$s^2+3f(s)-2s+5>(s+1)^2 \quad 或 \quad 3f(s)-4s+4>0$$

现在 $$f(s)=f(s+1)-2=f(t)+t-1 \quad s=f(t)$$

故

$$3f(s)-4s+4=3f(t)+3t-3-4f(t)+4=$$
$$3t-f(t)+1>t+1>0$$

至此，我们证毕不等式(22)，此即

$$[f(s)]^2-sf(s)-s^2<0$$
$$[f(s)+1]^2-s[f(s)+1]-s^2>0$$

现在方程 $x^2 - sx - s^2 = 0$ 的正根为$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s$，故若 $x > 0, x^2 - sx - s^2 < 0$，则 $x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s$；若 $x > 0, x^2 - sx + x^2 > 0$，则 $x > \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s$. 这证明了

$$f(s) < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s \qquad f(s)+1 > \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s$$

因 $f(s)$ 是正整数，故

$$f(s) = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})s\right]$$

令 $s = 2u$，得

$$f(2u) = [(1+\sqrt{5})u]$$

以下解法选自江仁俊先生1978年在湖北省暨武汉市数学年会上所作的专题介绍.（见《国际数学竞赛试题讲解》(Ⅰ) 湖北人民出版社）

解法3 我们已经用过符号"$\Rightarrow$"，它表示"由左端可推出右端"，有时还在箭头上标出推理的根据或理由.

为了叙述的方便，我们将题给条件依次标记为：

$$f, g: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+ \text{ 为严格递增函数} \tag{24}$$

$$f(\mathbf{Z}^+) \cup g(\mathbf{Z}^+) = \mathbf{Z}^+ \text{（正整数集）} \tag{25}$$

$$f(\mathbf{Z}^+) \cap g(\mathbf{Z}^+) = \varnothing \text{（空集）} \tag{26}$$

$$g(m) = f[f(m)] + 1 \quad (m \in \mathbf{Z}^+) \tag{27}$$

下面分三个步骤来求 $f(2m)$.

第一步：求值列表.

由式(25)知，$f(m) = \max\{f(1), f(2), \cdots, f(m)\}$，因而显然有

$$f(m) \geqslant m \tag{28}$$

而且，由式(28)知

$$f[f(m)] \geqslant f(m) \overset{(24)}{\Rightarrow} f[f(m)] + 1 > f(m) \overset{(27)}{\Rightarrow} g(m) > f(m) \tag{29}$$

由式(24)，(25)及(29)知 $f(1) = 1$，故 $g(1) = f[f(1)] + 1 = f(1) + 1 = 2$.

由式(24)与(26)分别得到

$$\left.\begin{array}{l} f(2) > f(1) \\ f(2) \neq 2 = g(1) \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) \geqslant 3$$

但若 $f(2) > 3$，则将产生矛盾，因为

$$f(2) > 3 \overset{(29)}{\Rightarrow} g(2) > 3 \overset{(24),(25)}{\Rightarrow} 3 \notin f(\mathbf{Z}^+) \cup g(\mathbf{Z}^+) = \mathbf{Z}^+$$

所以

$$f(2) = 3$$

综述

由(24)，$f(3) \geqslant 4$，但 $f(3)$ 不能大于 4，否则将产生矛盾. 因为

$$g(2) = f[f(2)] + 1 = f(3) + 1 > 4 \overset{(24),(25)}{\Rightarrow} 4 \notin \mathbf{Z}^+$$

所以 $$f(3) = 4 \qquad g(2) = 5$$

由(24)，$f(4) > f(3) = 4 \overset{(26)}{\Rightarrow} f(4) > 5 \Rightarrow f(4) \geqslant 6$，但若 $f(4) > 6$，则将又产生矛盾. 因为

$$g(3) = f[f(3)] + 1 = f(4) + 1 > 6 \overset{(24),(25)}{\Rightarrow} 6 \notin \mathbf{Z}^+$$

所以 $$f(4) = 6 \qquad g(3) = 7$$

仿照前面的推理，可陆续求出

$f(5) = 8, f(6) = 9, g(4) = 10, f(7) = 11, f(8) = 12, g(5) = 13, \cdots$

于是列出自变量 m 与函数值 $f(m)$，$g(m)$ 的对应数值表如表 4 所示.

表 4

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
$f(m)$	1	3	4	6	8	9	11	12	…	
$g(m)$	2	5	7	10	13	15	18	…		

由于表 4 中的数值是根据式(24)，(25)，(26)，(27) 推求出来的，所以表中数值是满足题给全部条件的. 此外，还可从表中看出以下两点：

对于任意的 $m \in \mathbf{Z}^+$，都有

$$g(m) = f(m) + m \tag{30}$$

函数值 $f(m+1)$ 是 $\mathbf{Z}^+$ 中除 $f(1), f(2), \cdots, f(m), g(1), g(2), \cdots, g(m)$ 外的最小正整数. (30′)

对式(30) 的一般证明见后面的附注；我们来证结论式(30′) 成立.

事实上，设式(30′) 中的最小正整数为 l，则由式(24) 与式(26) 得

$$f(m+1) \geqslant l$$

但若 $f(m+1) > l$，就有

$$f(m+1) > l \overset{(24),(29)}{\Rightarrow} g(m+1) > l \Rightarrow l \notin \mathbf{Z}^+$$

与(25) 矛盾，所以 $f(m+1) = l$.

根据式(30) 与式(30′)，可将表 4 续写至任何已知的正整数，所得结果不但符合题设全部条件，而且是惟一决定的. 比如

$$g(8) = f(8) + 8 = 12 + 8 = 20$$

此时 $\mathbf{Z}^+$ 中已出现过的正整数为 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,⑭,15,⑯,⑰,18,⑲,20,…(圆圈内的数是未出现过的). 因此

$f(9) = 14, g(9) = f(9) + 9 = 14 + 9 = 23$；

$f(10)=16, g(10)=f(10)+10=16+10=26;$

$f(11)=17, g(11)=f(11)+11=17+11=28;$

$f(12)=19, g(12)=f(12)+12=19+12=31;$

$f(13)=21, g(13)=f(13)+13=21+13=34.$

由此可见,符合题设条件的函数 $f(m)$ 与 $g(m)$ 值就这样惟一无重复地共同组成了正整数列.

第二步:求 $f(m)$ 与 $g(m)$ 的一般表达式.

使 $f(m)$ 与 $g(m)$ 无重复地共同组成正整数列,其一般表达式是怎样的呢?为了解决这一问题,需要用到数论中的结论,先证下面的引理:

引理 2　如果正无理数 α 与 β 满足

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \tag{31}$$

那么 $[\alpha m]$ 与 $[\beta m]$ 就无重复地共同组成正整数列.其中 $m\in\mathbf{Z}^+$,$[x]$ 表示不超过正数 x 的最大整数.

证明　这实际上就是要证:对于任意一个正整数 N,不在数列 $\{[\alpha m]\}$ 中出现,就在数列 $\{[\beta m]\}$ 中出现且仅出现一次.

数列 $\{[\alpha m]\}$ 与 $\{[\beta m]\}$ 中的各项,显然都是正整数,用 m_1 与 m_2 分别表示各数列中不大于 N 的正整数的个数,则

$$m_1=\max\{m\mid[\alpha m]\leqslant N\}$$

由式(31),有

$$0<\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}\Rightarrow\alpha>1,\beta>1 \tag{32}$$

所以

$$[\alpha m_1]\leqslant N\leqslant[\alpha(m_1+1)]\overset{(32)}{\Rightarrow}\alpha m_1<N+1<\alpha(m_1+1)\Rightarrow$$

$$m_1<\frac{N+1}{\alpha}<m_1+1 \tag{33}$$

同理可得

$$m_2<\frac{N+1}{\beta}<m_2+1 \tag{34}$$

式(33)+(34),并根据式(31)整理,得

$$m_1+m_2<N+1<m_1+m_2+2\qquad m_1+m_2-1<N<m_1+m_2+1$$

所以

$$m_1+m_2=N$$

这就是说,在 $\{[\alpha m]\}$ 和 $\{[\beta m]\}$ 中,不大于 N 的正整数恰好共有 N 个.但由正整数 N 的任意性,同样可知,其中不大于 $N-1(N>1)$ 的正整数也恰好共

有 $N-1$ 个,于是,两者一比较,即得在 $\{[\alpha m]\}$ 和 $\{[\beta m]\}$ 中,大于 $N-1$ 而不大于 N 的正整数有且仅有一个,它正好就是 N. 换句话说,任何正整数 N 不在 $\{[\alpha m]\}$ 和 $\{[\beta m]\}$ 中,大于 $N-1$ 而不大于 N 的正整数有且仅有一个,它正好就是 N. 换句话说,任何正整数 N 不在 $\{[\alpha m]\}$ 中出现一次,就在 $\{[\beta m]\}$ 中出现一次,二者必居其一. 引理 2 证毕.

满足式(31) 的正无理数组 $\{\alpha,\beta\}$ 有无限多组. 例如

$$\alpha=\sqrt{2},\beta=2+\sqrt{2};$$

$$\alpha=\sqrt{5},\beta=\frac{5+\sqrt{5}}{4};$$

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

$$\cdots$$

但是,如果引理 2 中的 α、β 不仅满足条件(31),且又满足条件

$$\beta=\alpha^2 \tag{35}$$

那么正无理数组 (α,β) 就是惟一的.

事实上,将式(31) 与式(35) 联立求解,并取正根,则

$$\alpha^2-\alpha-1=0 \qquad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{36}$$

$$\beta=\alpha^2=1+\alpha \qquad \beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \tag{37}$$

设 α,β 为满足式(31) 与式(35) 的两个确定的正无理数,则 $m(\in \mathbf{Z}^+)$ 的函数

$$f(m)=[\alpha m] \qquad g(m)=[\beta m] \tag{38}$$

满足式(24),(25),(26),(27).

事实上,因为两个正无理数 α 与 β 满足式(31),故由引理 2 知,式(38) 满足式(24),(25),(26). 需要证明的只是式(38) 满足条件式(27).

一方面,因 α 为大于 1 的无理数,故有

$$[\alpha m]<\alpha m\Rightarrow\alpha[\alpha m]<\alpha^2 m\overset{(35)}{\Rightarrow}\alpha[\alpha m]<\beta m\overset{(26)}{\Rightarrow}[\alpha(\alpha m)]<[\beta m] \tag{39}$$

另一方面,又由式(31) 与式(35),有 $\alpha=1+\frac{1}{\alpha},\beta=\alpha+1$. 于是

$$\begin{aligned}\alpha[\alpha m]&=(1+\frac{1}{\alpha})[\alpha m]=[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}[\alpha m]>[\alpha m]+\frac{1}{\alpha}(\alpha m-1)=\\&[\alpha m]+m-\frac{1}{\alpha}=[\alpha m+m]-\frac{1}{\alpha}=\\&[(\alpha+1)m]-\frac{1}{\alpha}>[\beta m]-1\end{aligned}$$

所以

$$[\alpha[\alpha m]] \geqslant [\beta m]-1 \tag{40}$$

比较式(39)与式(40)得,$[\alpha[\alpha m]]=[\beta m]-1$,即

$$[\beta m]=[\alpha[\alpha m]]+1 \tag{41}$$

式(41)即说明式(38)满足条件(27)

$$g(m)=f(f(m))+1$$

第三步:最后求出 $f(2m)$ 的一般表达式.

不难依次算出式(38)中的两个函数

$$f(m)=[\alpha m]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right] \qquad g(m)=[\beta m]=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}m\right]$$

$(m\in \mathbf{Z}^{*})$ 的取值与表 4 完全一致,比如

$$f(1)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=[1.618\cdots]=1$$

$$g(1)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=[2.618\cdots]=2$$

$$f(2)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 2\right]=[3.236\cdots]=3$$

$$g(2)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot 2\right]=[5.236\cdots]=5$$

$$f(3)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 3\right]=[4.854\cdots]=4$$

$$g(3)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot 3\right]=[7.854\cdots]=7$$

$$f(4)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 4\right]=[6.472\cdots]=6$$

$$g(4)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot 4\right]=[10.472\cdots]=10$$

$$f(5)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 5\right]=[8.090\cdots]=8$$

$$g(5)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot 5\right]=[13.090\cdots]=13$$

…

表 4 由题设条件知是惟一的,又式(38)满足题设的全部条件,所以本题的最后条件是

$$f(2m)=[\alpha(2m)]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}(2m)\right]=$$

$$[(1+\sqrt{5})m]=m+[\sqrt{5}m]$$

附　注

1. 关于(30)，即 $g(m)=f(m)+m$ 的一般证明.

对于任意的 $m\in\mathbf{Z}^+$，都有
$$g(m)+1\in f(\mathbf{Z}^+) \tag{42}$$
否则
$$g(m)+1\notin f(\mathbf{Z}^+)\overset{(26)}{\Rightarrow}g(m)+1\in g(\mathbf{Z}^+)\overset{(27)}{\Rightarrow}$$
$$g(m)+1=f(f(m'))+1\Rightarrow g(m)=f(f(m'))$$
与式(26)矛盾，其中 $m'\in\mathbf{Z}^+$.

对于任意的 $m\in\mathbf{Z}^+$，都有
$$g(m+1)\geqslant g(m)+2 \tag{43}$$
由式(24)，$g(m+1)-g(m)\geqslant 1$，但 $g(m+1)-g(m)\neq 1$，否则由式(42)得 $g(m+1)=g(m)+1\in f(\mathbf{Z}^+)$ 与式(26)矛盾，所以式(43)成立.

若 $m\in g(\mathbf{Z}^+)$，则
$$f(m+1)=f(m)+1 \tag{44}$$
先证，对于 $g(\mathbf{Z}^+)$ 中的 m 有 $f(m)+1\in f(\mathbf{Z}^+)$.

设 $m\in\mathbf{Z}^+$，且 $\mu=g(m)$，如果此时 $f(\mu)+1\notin f(\mathbf{Z}^+)$，则必有 $m'\in\mathbf{Z}^+$
$$f(\mu)+1\in g(\mathbf{Z}^+)\overset{(27)}{\Rightarrow}f(g(m))+1=f(f(m'))+1\Rightarrow$$
$$f(g(m))=f(f(m'))\overset{(24)}{\Rightarrow}g(m)=f(m')$$
与式(26)矛盾，判断成立.

再证式(44)成立. 由式(24)
$$f(m+1)>f(m)\Rightarrow f(m+1)\geqslant f(m)+1$$
但若上式的不等号成立，则对任何 $\mu\in\mathbf{Z}^+$ 均有，$f(m+\mu)>f(m)+1\overset{(28)}{\Rightarrow}g(m+\mu)>f(m)+1\Rightarrow$ 正整数 $f(m)+1\notin\mathbf{Z}^+$，与式(25)矛盾，式(44)证毕.

若 $m\in f(\mathbf{Z}^+)$，则
$$f(m+1)=f(m)+2 \tag{45}$$
显然
$$\left.\begin{array}{l} m\in f(\mathbf{Z}^+)\overset{(27)}{\Rightarrow}f(m)+1\in g(\mathbf{Z}^+)\\ (24)\overset{(28)}{\Rightarrow}f(m+1)\geqslant f(m)+2\overset{(27)}{=}g(m')+1\\ (42)\Rightarrow g(m')+1\in f(\mathbf{Z}^+)\end{array}\right\}\Rightarrow f(m)+2\in f(\mathbf{Z}^+)\xrightarrow{(24),(25),(28)}(45)$$

用归纳法证明：$g(m)=f(m)+m$ 对 $\mathbf{Z}^+$ 中任意正整数成立.

当 $m=1$ 时，$g(1)=2$，$f(1)+1=1+1=2$，即 $g(1)=f(1)+1$ 成立.

设 $m=k$ 时，命题成立，即
$$g(k)=f(k)+k \tag{46}$$
这里 $k\in\mathbf{Z}^+$，下面就两方面的情况分别进行研究.

对于 $k\in f(\mathbf{Z}^+)$ 的情况，由(45)得

$$f(k+1)=f(k)+2 \tag{47}$$

但是,由

$$k\in f(\mathbf{Z}^*)\overset{(27)}{\Rightarrow}f(k)+1\in g(\mathbf{Z}^*)\overset{(44)}{\Rightarrow}f[f(k)+2]=f[f(k)+1]+1 \tag{48}$$

由式(47),可知

$$f[f(k+1)]+1=f[f(k)+2]+1\overset{(48)}{=}f[f(k)+1]+2\overset{(45)}{=}$$
$$f[f(k)]+1+3\overset{(27)}{\Rightarrow}g(k+1)=g(k)+3 \tag{49}$$

式(49) - 式(47)

$$g(k+1)-f(k+1)=g(k)-f(k)+1\overset{(46)}{\Rightarrow}$$
$$g(k+1)-f(k+1)=f(k)+k-f(k)+1\overset{(27)}{\Rightarrow}$$
$$g(k+1)=f(k+1)+(k+1) \tag{50}$$

这就是说,当 $m=k+1$ 时命题仍成立.

对于 $k\in g(\mathbf{Z}^*)$ 的情况,由式(44)得

$$f(k+1)=f(k)+1 \tag{51}$$

$$f(k)\in f(\mathbf{Z}^*)\overset{(45)}{\Rightarrow}f[f(k)+1]=f[f(k)]+2 \tag{52}$$

由式(51),可知

$$f[f(k+1)]=f[f(k)+1]\overset{(52)}{=}f[f(k)]+2\Rightarrow f[f(k+1)]+1=$$
$$f[f(k)]+1+2\overset{(27)}{\Rightarrow}g(k+1)=g(k)+2 \tag{53}$$

式(53) - 式(51)

$$g(k+1)-f(k+1)=g(k)-f(k)+1\overset{(46)}{\Rightarrow}$$
$$g(k+1)-f(k+1)=f(k)+k-f(k)+1\Rightarrow$$
$$g(k+1)=f(k+1)+(k+1) \tag{54}$$

这就是说,当 $m=k+1$ 时命题仍成立.

由式(50)与式(54),对于任意的 $m\in\mathbf{Z}^*$,都有等式

$$g(m)=f(m)+m$$

2. 关于式(35)的由来.

可以证明,两个正整数 m 的一次函数

$$F(m)=\alpha m \qquad G(m)=\beta m \tag{55}$$

满足条件

$$G(m)=F(F(m)) \tag{56}$$

时,函数 $f(m)=[F(m)]=[\alpha m]$ 与 $g(m)=[G(m)]=[\beta m]$ 一定满足题设全部条件,特别是包括第(27)个条件. 其中 α,β 都是满足式(31)的正无理数(此问题的证明,不仅篇幅长,而且又要用到整数论的其他结论,因而从略).

由式(55),(56)不难推出 $\beta=\alpha^2$. 这是因为

$$\beta m=Gm=F(F(m))=F(\alpha m)=\alpha(\alpha m)=\alpha^2 m$$

3. 本题也可采用下述步骤求解.

第一步，由题设条件具体算出 f 与 g 的前若干个值，并将它们按由小到大的顺序排列，其分布概况是

$$f,g,f,f,g,f,g,f,f,g,f,f,g,f,g,f,\cdots$$

第二步，为寻求 f 与 g 的一般分布规律，构造一个序列：$P_N=\{f,g,\cdots\}$，其中有 N 个元，第 k 个元是 f 或是 g，应视 $k\in f(\mathbf{Z}^+)$ 或 $k\in g(\mathbf{Z}^+)$ 而定.

用数学归纳法证明：P_{F_n} 是 $P_{F_{n-1}}$ 与 $P_{F_{n-2}}$ 的依次合并.

此处 F_n 是斐波那契(Fibonacci)数列的第 n 项

$$F_1=1,F_2=2,\cdots,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\cdots$$

第三步，用数学归纳法证明：P_{F_n} 中恰含 F_{n-1} 个 f 值和 F_{n-2} 个 g 值. 由此进一步归纳为

$$f(F_{n-1}+m)=F_n+f(m)\quad(1\leqslant m\leqslant F_{n-2})$$

$$g(F_{n-2}+m)=F_n+g(m)\quad(1\leqslant m\leqslant F_{n-3})$$

第四步，再用归纳法证明

$$f(m)=\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}m\right]\quad(F_{n-1}<m\leqslant F_n,m\geqslant 3)$$

第五步，证明 $\frac{F_n}{F_{n-1}}$（当 $n\to\infty$ 时）的极限是 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，从而求出

$$f(m)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}m\right]$$

$$f(2m)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 2m\right]=[(1+\sqrt{5})m]=[m+\sqrt{5}m]=m+[\sqrt{5}m]$$

关于这一试题最繁杂的解答当属发表于江苏师范学院《中学数学研究与讨论》1978 年第二期的如下解答.（见《国际数学奥林匹克》江苏科学技术出版社，1980 年南京）

解法 4　为求 $f(2\mu)$，先讨论函数 f,g 的一些性质.

性质 1　$f(1)=1,g(1)=2$.

事实上，由题意，数 1 只能被 $f(1)$ 或 $g(1)$ 所取到，但 $g(1)=f[f(1)]+1>1$，所以，$f(1)=1$，并且 $g(1)=f[f(1)]+1=f(1)+1=2$.

性质 2　对于给定的 n，命 k_n 为不等式 $g(x)<f(n)$ 的正整数解的个数，则

$$f(n)=n+k_n$$

事实上，由假设可知

$$f(1)=1<g(1)<\cdots<g(k_n)<\cdots<f(n)$$

是代表 $f(n)$ 个连续的正整数，但另一方面，它显然由 n 个正整数 $f(1),\cdots,f(n)$ 及 k_n 个正整数 $g(1),\cdots,g(k_n)$ 所组成，故 $f(n)=n+k_n$.

性质 3　若 $f(n)=N$，则

i) $f(N)=N+n-1$;

ii) $f(N+1)=(N+1)+n$.

事实上，因为 $g(n-1)=f[f(n-1)]+1\leqslant f(N-1)+1\leqslant f(N)$ 及 $g(n)=f[f(n)]+1=f(N)+1>f(N)$，所以适合 $g(x)<f(N)$ 的最大整数 x 必为 $n-1$. 因此

$$f(N)=N+n-1$$

同理可证

$$f(N+1)=N+n+1$$

性质 4　$g(n)=f(n)+n$

事实上，由性质 3，$g(n)=f[f(n)]+1=[f(n)+n-1]+1=f(n)+n$.

性质 5

$$1\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 2$$

$$2\leqslant g(n+1)-g(n)\leqslant 3$$

事实上，不等式 $f(n+1)-f(n)\geqslant 1$ 是显然的. 于是 $g(n+1)-g(n)=[f(n+1)+n+1]-[f(n)+n]=f(n+1)-f(n)+1\geqslant 2$. 不等式 $g(n+1)-g(n)\geqslant 2$ 说明了在 $g(n)$ 与 $g(n+1)$ 之间至少有一个函数 f 的值存在. 由此也就说明了在 $f(n)$ 与 $f(n+1)$ 之间至多只含有一个函数 g 的值. 所以 $f(n+1)-f(n)\leqslant 2$. 从而可得 $g(n+1)-g(n)\leqslant 3$.

如令 $f_n=f(n)$，$g_n=g(n)$，那么从 $f(1)=1$ 出发，利用上面的性质可以把 f 和 g 的值逐个推算出来

$$f_1,g_1,f_2,f_3,g_2,f_4,g_3,f_5,f_6,g_4,f_7,f_8,g_5,\cdots$$

不难发现，这个序列与斐波那契数列①

$$F_1=1,F_2=2,F_3=3,F_4=5,F_5=8,F_6=13,\cdots,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\cdots$$

有密切关系. 为此，我们定义一个序列 P_n，规定 P_n 的第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 项是 f 或 g，视 $k\in f(\mathbf{Z}^+)$ 或 $k\in g(\mathbf{Z}^+)$ 而定，例如

$$P_1=\{f\},P_2=\{f,g\},P_3=\{f,g,f\},P_4=\{f,g,f,f\}\cdots$$

并用记号 P_nP_m 表示两个序列 P_n、P_m 的依次合并，即把序列 P_m 衔接于序列 P_n 之末尾. 那么

$$P_{F_3}=P_3=\{f,g,f\}=P_2P_1=P_{F_2}P_{F_1}$$

$$P_{F_4}=P_5=\{f,g,f,f,g\}=P_{F_3}P_{F_2}$$

一般地，启发我们：$P_{F_{n+1}}$ 是 P_{F_n} 与 $P_{F_{n-1}}$ 的合并

① 所谓斐波那契数列，是指这样的一个数列

$$F_0=1,F_1=1,F_2=2,F_3=3,F_4=5,F_5=8,F_6=13,\cdots$$

它的通项满足循环方程

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$

也就是说，斐波那契数列的每一项 $F_n(n\geqslant 2)$，可以用它前面的两项 F_{n-1} 与 F_{n-2} 的和来表示.

斐波那契数列的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$P_{F_{n+1}} = P_{F_n}P_{F_{n-1}}$$

也就有 $P_{F_{n+1}}$ 中恰好有 F_n 个 f 值及 F_{n-1} 个 g 值. 而且 $F_{n+1}+M$ 与 M 同为 f 值或同为 g 值 $(1 \leqslant M \leqslant F_n)$, 这句话也就是等价于等式

$$f(F_n + r) = F_{n+1} + f(r) \quad (1 \leqslant r \leqslant F_{n-1})$$

$$g(F_{n-1} + s) = F_{n+1} + g(s) \quad (1 \leqslant s \leqslant F_{n-2})$$

下面我们继续讨论 f, g 的一些性质, 以证明这些猜测是正确的:

性质 6　$f(F_{2k-1}) = F_{2k} - 1, f(F_{2k}) = F_{2k+1}$

用数学归纳法来证明性质 6. 当 $k = 1$ 时有

$$f(F_1) = f(1) = 1 = F_2 - 1, f(F_2) = f(2) = 3 = F_3$$

假定性质 6 对自然数 k 为真, 则由性质 3 可知

$$f(F_{2k+1}) = f[f(F_{2k})] = F_{2k+1} + F_{2k} - 1 = F_{2(k+1)} - 1$$

$$f(F_{2(k+1)}) = f[f(F_{2k+1}) + 1] = F_{2(k+1)} + F_{2k+1} = F_{2k+3} = F_{2(k+1)+1}$$

所以对自然数 $k+1$ 亦为真.

性质 6 说明, 当 n 为奇数时 F_n 为 f 值; 当 n 为偶数时, F_n 为 g 值.

性质 7　若 $k > 1$, 则 $F_k + 1$ 恒为 f 值.

事实上, 若 k 为偶数, 则 F_k 为 g 值, 故 $F_k + 1$ 为 f 值; 若 k 为奇数, 令 $k = 2s+1$, 则 $F_{2s+1} = f(F_{2s})$, 要是 $F_k + 1 = F_{2s+1} + 1 = f(F_{2s}) + 1$ 为 g 值, 于是必可表为 $f[f(t)] + 1$ 的形式, 如此, $F_{2s} = f(t)$ 为 f 值, 此为不可能, 故 $F_k + 1$ 仍为 f 值.

性质 8　P_{F_n} 中恰有 F_{n-1} 个 f 值和 F_{n-2} 个 g 值.

事实上, 若 n 为奇数, $n = 2k+1$, 则因

$$F_{2k+1} = f(F_{2k})$$

可知 $P_{F_{2k+1}}$ 中有 F_{2k} 个 f 值, 于是 g 值有 $F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1}$ 个.

若 n 为偶数, $n = 2k$, 则由性质 6 知

$$F_{2k} = f(F_{2k-1}) + 1 = f[f(F_{2(k-1)})] + 1 = g(F_{2(k-1)})$$

故 $P_{F_{2k}}$ 中有 F_{2k-2} 个 g 值, 而有 $F_{2k} - F_{2k-2} = F_{2k-1}$ 个 f 值. 总之, 在 P_{F_n} 中不论 n 为奇数或偶数, 恰有 F_{n-1} 个 f 值, 而有 F_{n-2} 个 g 值.

性质 9　$F_{k+1} + M$ 与 $M(1 \leqslant M \leqslant F_k)$ 同为 f 值或同为 g 值等价于等式

$$f(F_k + r) = F_{k+1} + f(r) \quad (1 \leqslant r \leqslant F_{k-1}),$$

$$g(F_{k-1} + s) = F_{k+1} + g(s) \quad (1 \leqslant s \leqslant F_{k-2}).$$

事实上, 如果 $F_{k+1} + M$ 与 M 同为 f 值或同为 g 值, 则可写成等式

$$P_{F_{M}+M} = P_{F_{k+1}}P_M$$

注意到在序列 $P_{F_{k+1}}$ 中恰有 F_k 个 f 值. 现在考虑 $P_{F_{k+1}+M}$ 中第 F_k+r 个 f 值,它位于序列 $P_{F_{k+1}+M}$ 的第 $f(F_k+r)$ 项,而它又位于 $P_{F_{k+1}}P_M$ 中的第 $F_{k+1}+f(r)$ 项,故等式:$f(F_k+r)=F_{k+1}+f(r)$ 成立.

同理可得另一等式.

性质 10　当 $n>1$ 时,F_n+M 与 $M(1\leqslant M\leqslant F_{n-1})$ 同为 f 值或同为 g 值.

当 $n=2,3$ 时,可直接检验结论为真,设 $n=k$ 时已为真,当 $n=k+1$ 时,再对 M 用归纳法,由性质 7 可知当 $M=1$ 时已为真,故假定对于 $1\leqslant m\leqslant M$ 已为真,要证明对于 $M+1$ 亦为真.

事实上,若 $M\in g(\mathbf{Z}^+)$,$F_{k+1}+M\in g(\mathbf{Z}^+)$,则必有

$$M+1\in f(\mathbf{Z}^+)\qquad F_{k+1}+M+1\in f(\mathbf{Z}^+)$$

又若 $M-1\in f(\mathbf{Z}^+)$,$M\in f(\mathbf{Z}^+)$ 及 $F_{k+1}+M-1\in f(\mathbf{Z}^+)$,$F_{k+1}+M\in f(\mathbf{Z}^+)$,势必得出 $M+1\in g(\mathbf{Z}^+)$ 及 $F_{k+1}+M+1\in g(\mathbf{Z}^+)$. 故在这两种情形之下,结论是正确的. 剩下来必须考虑当 $M-1\in g(\mathbf{Z}^+)$,$M\in f(\mathbf{Z}^+)$,及 $F_{k+1}+M-1\in g(\mathbf{Z}^+)$,$F_{k+1}+M\in f(\mathbf{Z}^+)$ 这一情形.

令
$$M=f(r)\qquad M-1=g(s)$$
则
$$M=f(r)=r+s$$
$$f(s)=g(s)-s=(M-1)-(M-r)=r-1$$
若设
$$f(s+1)=r+t\quad(t=0,1)$$
则
$$g(s+1)-g(s)=(s+1)+(r+t)-(M-1)=t+2$$
由归纳假定 $F_{k+1}+m(1\leqslant m\leqslant M)$ 与 m 同为 f 值或同为 g 值,故由性质 9 可知
$$f(F_k+r)=F_{k+1}+f(r)=F_{k+1}+M$$
且
$$g(F_{k-1}+s)=F_{k+1}+g(s)=F_{k+1}+M-1$$
又因为
$$\begin{aligned}g(F_{k-1}+s+1)=&F_{k-1}+s+1+f(F_{k-1}+s+1)=\\&F_{k-1}+s+1+F_k+f(s+1)=\\&F_{k-1}+s+1+F_k+r+t=\\&F_{k+1}+M+t+1\end{aligned}$$
所以
$$g(F_{k-1}+s+1)-g(F_{k-1}+s)=t+2=g(s+1)-g(s)$$
利用这个等式,就可说明若 $t=0$,则
$$g(s+1)=g(s)+2=(M-1)+2=M+1\in g(\mathbf{Z}^+)$$
$$\begin{aligned}g(F_{k-1}+s+1)=g(F_{k-1}+s)+2=&F_{k+1}+M-1+2=\\&F_{k+1}+M+1\in g(\mathbf{Z}^+)\end{aligned}$$
即 $M+1$ 与 $F_{k+1}+M+1$ 同为 g 值.

若 $t=1$,则 $g(s+1)=M+2\in g(\mathbf{Z}^+)$,故 $M+1\in f(\mathbf{Z}^+)$,

$$g(F_{k-1}+s+1)=F_{k+1}+m+2\in g(\mathbf{Z}^+)$$

故
$$F_{k+1}+M+1\in f(\mathbf{Z}^+)$$

即 $M+1$ 与 $F_{k+1}+M+1$ 同为 f 值.

有了以上这些准备,再利用斐波那契数列的性质就可以计算 $f(\mu)$. 由性质1、2,即得 $f(1)=1$,$f(2)=3$. 对于给定的 $\mu\geqslant 3$,一定存在这样的 n,使 $F_{n-1}<\mu\leqslant F_n$. 下面我们证明

$$f(\mu)=\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right],F_{n-1}<\mu\leqslant F_n,\mu\geqslant 3 \tag{57}$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

用数学归纳法. 当 $n=3$ 时,μ 只能等于3,此时 $f(3)=4$,而 $\left[\frac{F_3}{F_2}\times 3\right]=\left[\frac{3}{2}\times 3\right]=4$,所以等式成立.

假设对于 $3\leqslant n\leqslant k$ 的 n,式(57)成立,要证明 $n=k+1$ 时也成立. 令 $\mu=F_k+M(1\leqslant M\leqslant F_{k-1})$.

若 $M=1$,则一方面由性质9、10可得

$$f(F_k+1)=F_{k+1}+f(1)=F_{k+1}+1$$

另一方面,由于

$$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=\left[\frac{F_k+F_{k-1}}{F_k}\right]=\left[1+\frac{F_{k-1}}{F_k}\right]=1$$

故
$$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}(F_k+1)\right]=\left[F_{k+1}+\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=F_{k+1}+\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=F_{k+1}+1$$

所以,当 $M=1$ 时等式(57)成立.

若 $M=2$,则由于

$$\left[\frac{2F_{k+1}}{F_k}\right]=\left[\frac{2(F_k+F_{k-1})}{F_k}\right]=\left[\frac{3F_k+F_{k-1}-(F_k-F_{k-1})}{F_k}\right]=$$
$$3+\left[\frac{F_{k-1}-F_{k-2}}{F_{k-1}+F_{k-2}}\right]=3$$

及 $f(2)=3$,便可推知等式仍然成立. 于是可设 $M\geqslant 3$,并取 l,使

$$F_{l-1}<M\leqslant F_l\quad(3\leqslant l\leqslant k-1)$$

对于这样的 l,由归纳假定知

$$f(M)=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]F_{l-1}<M\leqslant F_l$$

因为 M 可能取值是 $F_{l-1}+1,\cdots,F_{l-1}+F_{l-2}$,所以 M 必不能被 F_{l-1} 所整除,又因

为 F_l 与 F_{l-1} 互素①，故 F_lM 必不能被 F_{l-1} 所整除．用 S 代表 $\frac{F_lM}{F_{l-1}}$ 的分数部分，即

$$\frac{F_l}{F_{l-1}}M=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+S$$

那么

$$\frac{1}{F_{l-1}}\leqslant S\leqslant\frac{F_{l-1}-1}{F_{l-1}}$$

利用斐波那契数列的一个性质②

$$\frac{F_k}{F_{k-1}}-\frac{F_{k+l+1}}{F_{k+l}}=\frac{(-1)^kF_l}{F_{k-1}F_{k+l}}$$

就有

$$\left|\left(\frac{F_l}{F_{l-1}}-\frac{F_{k+1}}{F_k}\right)M\right|=\left|\left(\frac{F_l}{F_{l-1}}-\frac{F_{l+(k-l)+1}}{F_{l+(k-l)}}\right)M\right|=\frac{F_{k-l}M}{F_{l-1}F_k}\leqslant\frac{F_{k-l}F_l}{F_{l-1}F_k}$$

又当 $k>l$ 时，有

$$F_{k-l}F_l<F_k\quad③$$

所以

综述

---

① 若用 (a,b) 表示两个整数 a 与 b 的最大公约数，则明显地有：$(F_{l+1},F_l)=(F_{l-1}+F_l,F_l)=(F_l,F_{l-1})=\cdots=(F_1,F_0)=1$.

② 这个性质可对 l 用数学归纳法予以证明．

i）当 $l=0$ 时，即要证明

$$\frac{F_k}{F_{k-1}}-\frac{F_{k+1}}{F_k}=\frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}$$

因为

$$\frac{F_k}{F_{k-1}}-\frac{F_{k+1}}{F_k}=\frac{F_k^2-F_{k-1}F_{k+1}}{F_{k-1}F_k}$$

所以我们只要证明等式

$$F_k^2-F_{k-1}F_{k+1}=(-1)^k$$

对 k 用归纳法．当 $k=1,2$ 时，可直接验证是正确的．设等式对 k 成立，则有

$$\begin{aligned}F_{k+1}^2-F_kF_{k+2}&=(F_k+F_{k-1})^2-F_k(F_k+F_{k+1})=\\&F_{k-1}^2+2F_kF_{k-1}-F_kF_{k+1}=\\&F_{k-1}^2+2F_kF_{k-1}-F_k(F_k+F_{k-1})=\\&-F_k^2+F_kF_{k-1}+F_{k-1}^2=\\&-F_k^2+F_{k-1}F_{k+1}=(-1)^{k+1}\end{aligned}$$

即等式对 $k+1$ 也成立．

ii）假定性质对于 $\leqslant l-1$ 时为真，那么对于 l 也成立，因为

$$\begin{aligned}&F_k/F_{k-1}-F_{k+l+1}/F_{k+l}=\{F_k(F_{k+l-1}+F_{k+l-2})\\&-F_{k-1}(F_{k+l}+F_{k+l-1})/F_{k-1}F_{k+l}\}=\\&\{(F_kF_{k+l-1}-F_{k-1}F_{k+l})+(F_kF_{k+l-2}-F_{k-1}F_{k+l-1})\}/F_{k-1}F_{k+l}=\\&\{(-1)^kF_{l-1}+(-1)^kF_{l-2}\}/F_{k-1}F_{k+l}=(-1)^kF_l/F_{k-1}F_{k+l}.\end{aligned}$$

③ 这个不等式由下面的等式即可推得

$$F_k=F_lF_{k-l}+F_{l-1}F_{k-(l+1)}$$

我们对 l 用数学归纳法证明这个等式．

i）当 $l=1$ 时，等式为

$$F_k=F_{k-1}+F_{k-2}$$

即循环方程，显然是成立的；

ii）假定等式对于 $l-1$ 成立，则有

$$\begin{aligned}F_k&=F_{l-1}F_{k-(l-1)}+F_{l-2}F_{k-l}=F_{l-1}(F_{k-l}+F_{k-(l+1)})+F_{l-2}F_{k-l}=\\&(F_{l-1}+F_{l-2})F_{k-l}+F_{l-1}F_{k-(l+1)}=F_lF_{k-l}+F_{l-1}F_{k-(l+1)}\end{aligned}$$

即等式对 l 也成立．

$$\left|\frac{F_l}{F_{l-1}}M - \frac{F_{k+1}}{F_k}M\right| < \frac{1}{F_{l-1}} \quad (k > l) \tag{58}$$

去掉绝对值符号，从式(58)可以得到

$$\frac{F_{k+1}}{F_k}M < \frac{F_l}{F_{l-1}}M + \frac{1}{F_{l-1}} = \left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right] + S + \frac{1}{F_{l-1}} \leqslant$$

$$\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right] + \frac{F_{l-1} - 1}{F_{l-1}} + \frac{1}{F_{l-1}} = \left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right] + 1$$

及
$$\frac{F_{k+1}}{F_k}M > \frac{F_l}{F_{l-1}}M - \frac{1}{F_{l-1}} \geqslant \frac{F_l}{F_{l-1}}M - S = \left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]$$

即
$$\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right] < \frac{F_{k+1}}{F_k}M < \left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right] + 1$$

所以
$$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}M\right] = \left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right] \quad (k > l) \tag{59}$$

于是
$$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}(F_k + M)\right] = F_{k+1} + \left[\frac{F_{k+1}}{F_k}M\right] = F_{k+1} + \left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right] =$$

$$F_{k+1} + f(M) = f(F_k + M)$$

这样式(57)获得全证.

另一方面，从上面的证明中可以看出，形如(58)的不等式，从而形如(59)的等式，只要 $k > l$，总是成立的. 现在任取一个充分大的 $k > n$，就有

$$\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right] = \left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right] \quad (k > n)$$

所以
$$f(\mu) = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right] = \left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right] \quad (k > n)$$

既然上式对任意大的 $k(k > n)$ 都成立，于是可用

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

来代替等式 $f(\mu) = \left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right]$ 中的比值 $\frac{F_{k+1}}{F_k}$，可得

$$f(\mu) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu\right]$$

从而即有

$$f(2\mu) = [(1+\sqrt{5})\mu]$$

证明 $f(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$，$g(n) = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$ 就满足要求，其中 $[x]$ 为 Guass 函数.

为了验证方便，我们设

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2}=\beta$$

则有$\left.\begin{matrix}\beta=\alpha^2\\ \alpha^2-\alpha-1=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\beta=\alpha+1\Rightarrow\beta n=n\alpha+n\Rightarrow\{\beta n\}=\{\alpha n\}$.（$\{x\}$表$x$的小数部分）

故可设

$$\begin{matrix}\alpha n=[\alpha n]+\theta_n\\ \beta n=[n\beta]+\theta_n\end{matrix}\quad 0<\theta_n<1$$

于是 $$\alpha n+\beta n=[\alpha n]+[\beta n]+2\theta_n$$

又注意到 $$\alpha\beta=\alpha+\beta$$

故 $$\alpha\beta n=\alpha n+\beta n$$

又 $\alpha\beta n=\alpha[\beta n]+\alpha\theta_n=[\alpha[\beta n]]+\theta'_n+\alpha\theta_n$，这里 $0<\theta'_n<1$.

$$f(g(n))=f(n)+g(n)\Leftrightarrow[\alpha[\beta n]]=[\alpha n]+[\beta n]\Leftrightarrow\Delta_n=(\theta'_n+\alpha\theta_n)-2\theta_n=0\Leftrightarrow\Delta_n=(2-\alpha)\theta_n-\theta_n=0$$

$$1<\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2\Rightarrow\left.\begin{matrix}0<2-\alpha<1\\ 0<\theta_n<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0<(2-\alpha)\theta_n<1$$

$$\left.\begin{matrix}0<(2-\alpha)\theta_n<1\\ 0<\theta'_n<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow -1<(2-\alpha)\theta_n-\theta'_n<1$$

而 $\Delta_n=[\alpha[\beta n]]-[\alpha n]-[\beta n]\in\mathbf{Z}$，所以 $\Delta_n=0$，即 $[\alpha[\beta n]]=[\alpha n]+[\beta n]$.（证毕）

古语道："学贵知疑，疑者，觉悟之机也"．一个自然的问题又提出来了：为什么要在数学竞赛中反复地出现$[n\alpha]$与$[n\beta]$这两个函数？这两个函数又有何来历？

早在1907年威索夫(Wythoff)研究并提出了一种现在以他的名字命名的游戏：

地上摆了两堆数量不同的石子，甲、乙两人轮流从其中拣起石子，每次可以从任何一堆中拣起任意多个石子，也可以从两堆中同时拣起一样多的石子．谁恰好拣起最后的石子，谁就赢．

1931年中国已故的数论大师闵嗣鹤先生在中国最早的一本中等数学杂志《中国数学杂志》中证明了：如果两堆石子，一堆是$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$，另一堆是$\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$，那么先拣者必输无疑，如果两堆不恰好是$[\alpha n]$和$[\beta n]$，则先拣者总有办法能赢．（详细证明可参见《数学竞赛》5，湖南教育出版社）．

这样一个历史名题在数学竞赛中有所反映是很自然的，恰好在 20st IMO 举行的 1978 年的全苏联中学生数学竞赛中也出现了以威索夫游戏为背景的试题.

例 6　有两堆火柴，一堆中有 m 根，另一堆中有 n 根，$m > n$，两个人轮流各从一堆中取火柴，每次从一堆中所取火柴的根数(异于 0) 是另一堆中火柴根数的倍数，能在一堆中取最后一根火柴的人就赢.

(1) 证明：如果 $m > 2n$，那么第一个取火柴的人能保证自己赢.

(2) 当 α 取何值时下列结论成立：如果 $m > \alpha n$，则先取火柴的人能保证自己赢.

由 Wythoff 博弈的方法容易断定：当 $\alpha \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，先取者必胜.（详细证明可见《全苏数学奥林匹克试题》，山东教育出版社）.

§10　围棋盘上的游戏

1986 年倪进和朱明书在《智力游戏中的数学方法》(江苏教育出版社) 中将其与围棋盘上的游戏结合起来.

图 1 是普通的围棋盘，它有 $18 \times 18 = 324$ 个小的正方形格子，在右上顶处的格子里标有"▲"的符号代表山顶. 游戏由 A，B 两人来玩：由 A 把一位"皇后"(以一枚棋子代表) 放在棋盘的最下面一行或最左边一列的某个格子里，然后由 B 开始，两人对弈. "皇后" 只能向上、向右或向右上方斜着走，每次走的格数不限，但不得倒退，也不得停步不前；谁先把"皇后" 走进标有"▲" 的最右最上的那格就得胜.

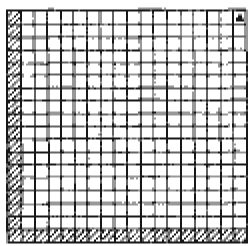


图 1

显然，双方对弈下去决不可能出现"和棋"，在有限个回合后，必有一胜一负.

10.1　游戏的策略

为了扼要说明"制高点" 的意义，不妨先考虑简化的问题，在 8×8 格的国际象棋盘上讨论"皇后登山" 游戏，参见图 2.

如果 A 把皇后走进图 2 中带阴影的格子，由 B 就可一步把皇后走到山顶而获胜. 因此，任何一方都应该避免把皇后走进有阴影的格子，而都应该迫使对方不得不把皇后走到带阴影的格子里去.

从图2中尚可看到,如果B能把皇后走进标号为①或②的格子,那么A只能把皇后走进有阴影的格子;由此我们可以明白,如果谁占领了①或②,只要以后走法得当,就必操胜券,所以①和②这两个位置就像军事上的"制高点".

那么,怎样才能占领①或②呢?请参看图3.如果A把皇后走进有虚线的方格[⋮]或[⋯]或[⋰]里,则B就能占领①或②,从而获胜.而B又怎样能迫使A不得不把皇后走进有虚线的方格呢?同样的分析方法,只要B能够占领第二对制高点③或④的任一格.

继续运用上述分析方法(数学里称之为递推法),就可以最终得到围棋盘上的全部制高点,请参看图4.

在图4中共有12个制高点,它们可分为6组:①和②,③和④,⑤和⑥,⑦和⑧,⑨和⑩,⑪和⑫,每组里的两个制高点关于山顶是对称的.

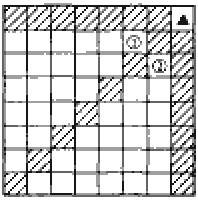


图2

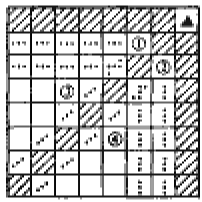


图3

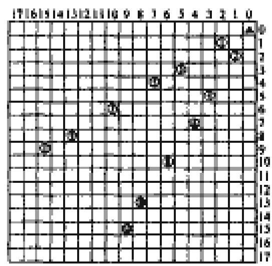


图4

一旦制高点分布的秘密被参加游戏者掌握,按游戏的规则,B就必胜无疑.因为在最左一列和最下一行里都没有制高点,所以不论A把皇后如何放,B第一步就可抢占到一个制高点(或者B第一步就直接到达▲),往后B总能在每一步都抢占制高点,直到最后胜利.但是,我们仍感"白璧有瑕",是不是游戏者要携带一张图4,一边对照着图一边弈棋.参照图4的坐标记法,再根据对称性,只要记住六个制高点的坐标:$A_1(1,2)$,$A_2(3,5)$,$A_3(4,7)$,$A_4(6,10)$,$A_5(8,13)$,$A_6(9,15)$.这样,谁能先抢占这种位置,就可稳操胜券.

然而,蔑视辩证法是不能不受惩罚的.当"皇后登山"游戏的秘密被揭开之时,游戏的末日也就来临了.

10.2　数列与级数

在上一节里，我们粗略地考察了 18 × 18 格棋盘上的皇后登山问题，弄清共有 12 个制高点，由对称性，可以把它们归为 6 个不同的组，或者说只有 6 个本质不同的制高点．用同样的方法，可知在 19 × 19 格棋盘上有 14 个制高点，而在对称意义下则只有 7 对．现在自然会问：在 30 × 30，40 × 40，…，100 × 100（一般 $N\times N$）格的棋盘上，制高点分布有什么规律?

仿照前面已引进的坐标记法，把制高点按自然顺序排为(1,2)，(3,5)，(4,7)，(6,10)，(8,13)，(9,15)，(11,18)，…；对称性的意思在这里就是(1,2) 与 (2,1)，(3,5) 与(5,3) 等等，都只需用其中的一个来代表即可，不必赘述．

亲爱的读者，您注意到图 4 上制高点分布的几何特征了吗?

除了可看出 ① 与 ②，③ 与 ④，⑤ 与 ⑥ 等皆关于棋盘对称以外，制高点的总体分布呈现出很强的直觉上的规律性，形状宛如"人" 字形的两行飞雁，相交于山顶"▲".

倘若读者已感到兴趣，请不辞辛劳，花点时间在更大的棋盘上把制高点画出来，例如 30 × 30，40 × 40．说实在的，我们曾一直求至第 100 个制高点，希望能由此而获得发现的快乐，并以此作为报偿.

实际上我们并不是每次必须画出 $N\times N$ 格的棋盘，而是暂时脱离几何图形，转向数学分析的方法，把已经研究过的制高点列成一张表，并试图找寻某种规律，使之能把这张表扩充下去．开始我们先把①，②，…，⑥这 6 个制高点的坐标 $A_1(1,2)$，$A_2(3,5)$，$A_3(4,7)$，$A_4(6,10)$，$A_5(8,13)$ 和 $A_6(9,15)$ 按照 $A_n(x_n,y_n)$ 形式列进表 5 里去，并记 $x_n=f(n)$，$y_n=g(n)$．哈!这下可发现了一个很明显的规律

$$g(n)=n+f(n) \tag{60}$$

这说明如果我们想确定第 n 个本质的制高点时，只需在 $f(n)$ 和 $g(n)$ 中确定一个即可．例如倘若对于任给的正整数 n，能求出 $f(n)$，便完全解决了问题．似乎到此已找到了解开谜的关键．但是，对于数学家来说，公式(60) 是否关于任何正整数 n 都成立的问题必须用数学方法证明．为了加强信念，我们可以先扩大表 5，再多求出一些制高点，在表中出现的有限多的情况都符合式(60)．后来，经证明，关系式(60) 确实是普遍成立的．然而式(60) 只给出 n，$f(n)$，$g(n)$ 之间的一个关系，还不能解决从 n 求出 $f(n)$ 和 $g(n)$ 的问题．后来的事实反过来说明，这后一个问题的求解是十分困难的.

表 5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f(n)$	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22
$g(n)$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$f(n)$	24	25	27	29	30	32	33	35	37	38	40	42	43	45
$g(n)$	39	41	44	47	49	52	54	57	60	62	65	68	70	73
n	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$f(n)$	46	48	50	51	53	55	56	58	59	61	63	64	66	67
$g(n)$	75	78	81	83	86	89	91	94	96	99	102	104	107	109

10.3 探索

现在让我们一起来审视表 5:第一行是自然数序列;第二行是自然数序列的一个子序列,也即当 $n,m\in\mathbf{N}$,且 $n<m$ 时,必有 $f(n)<f(m)$,而 $\mathbf{N}$ 表示自然数集合;第三行也具有第二行的类似性质;并且还有上节中的公式(60),它说明表 5 里每个列中的 $n,f(n),g(n)$ 之间的关系,但是到现在为止的一些结果尚不足以完全解开谜.

让我们再对数列 $f(n)$ 和 $g(n)$ 考察一番.1,3,4,6,8,9,… 是一个严格递增的自然数序列,有些自然数未出现在其中.而那些所缺的自然数恰在表示 $g(n)$ 的第三行中出现,也即表 5 里的第二行中所未出现的自然数恰好在第三行中按从小到大的顺序依次出现.这是一个新的重大发现,可以和关系式(60)相提并论.有了这些性质以后,就较为容易发现构造表 5 的递推法则:

假设我们已求得 $f(1),f(2),\cdots,f(n)$ 和 $g(1),g(2),\cdots,g(n)$,则集合 $S_n=\{f(1),f(2),\cdots,f(n);g(1),g(2),\cdots,g(n)\}$ 便已确定.设 T_n 是 S_n 关于自然数集 $\mathbf{N}$ 的余集,也即 $T_n=N-S_n$,则 $f(n+1)$ 即是 T_n 中最小的自然数

$$g(n+1)=n+1+f(n+1) \tag{61}$$

由公式(60)和法则(61),据数学归纳法,只要写出表 5 的第一列,就可相继写出其他各列,而且在具体执行时(用手算)还用不着写出 S_n 和 T_n,只需用到左边已经写出的各列.

10.4 思索

我们已经把谜底交给读者了,但是实际猜谜的过程因人而异,由不同的思路,循不同的线索,存在许多解法.例如作者的一些友人,试图研究表 5 的第二行,想从数列 $f(n)=\{1,3,4,6,8,9,11,12,14,16,17,\cdots\}$ 中找寻规律.从其中

可看出的性质有：出现的自然数最多只有两个是紧接的（例如 3，4；8，9；11，12；16，17；…），而缺少的自然数排列起来正是 $g(n)$ 数列，希望能从中找出某种简单的规律性或某种形式的周期性. 其中一定有规律是毫无疑问的，然而这个规律是不是很简单（可用简单公式表达出来）却不是能预料的. 有人又想到，在较大的棋盘上，把更多的制高点画上去，看看有什么几何特点，结果发现两排对称的制高点仍旧形如"人"字飞雁，而且对应于表 5 的一行飞雁(1,2)，(3,5)，(4,7)，(6,10)，… 几乎都在一条直线附近（这条直线的斜率 = ?是非常有趣和有意思的问题）.

现在我们再回到表 5，根据公式(60) 和法则(61)，有了第一个本质制高点(1,2) 后，便可完全决定表 5. 它在原则上可以无限地构造下去，所以表 5 本质上是一张无穷的表（无穷矩阵），根据这张表，任意的 $N \times N$ 格棋盘上的皇后登山游戏问题便都解决了. 至此，是否一切有关问题均已研究完毕?这却是一个可争议的问题.

10.5　问题的变形

新中国成立的初期，《中国数学杂志》（即后来的《数学通报》）上刊登了我国数学界老前辈闵嗣鹤教授的《从拣石子得到的定理》一文.

该文从两人拣石子游戏谈起，饶有风趣地引入数论中一个定理的探讨及证明. 题设有两堆石子，分别有 m，n 粒石子，A，B 两人依次轮流取石子；每次至少取走一粒，规定可从任一堆石子中取走任何多少粒，若同时在两堆中取石子，则必须每堆中被取走的粒数相同（取出的石子不再放回去），谁先把石子取光就算得胜. 论文的中心课题是：这种游戏有没有取胜秘诀（设 $m, n \geqslant 1$）.

乍一看，A 可以从两堆石子$\{m, n\}$ 中有很多取法，例如 A 可以取成$\{0, n\}$，$\{m, 0\}$，$\{a, b\}$，而 $0 \leqslant a = m - x < m$，$0 \leqslant b = n - x < n$，等等. 把 A 取石子后所成的新的两堆石子记为$\{m_1, n_1\}$（当 m_1 和 n_1 中有 0 时，实际上不是两堆石子），然后由 B 来取；这样轮流下去，直到决出胜败，不可能有"和棋"的情况. 每一方都不知道对方将会怎样取石子，只能决定自己怎样取，这种拣石子游戏有必胜法吗?

我们建议大家再一次运用美国数学家波利亚（G. Pólya）在《怎样解题》（HOW TO SOLVE IT）一书中反复告诫的方法"倒着干". 如果 A 被逼得只能把石子取成$\{0, n_k\}$，$\{n_k, 0\}$ 或$\{n_k, n_k\}$ 形式（$n_k \geqslant 1$），则 B 就可必胜. 对于一般形式$\{m, n\}$ 表示的两堆石子，以后我们总可假设 $m \leqslant n$ 并且记为(m, n). 通过不多几次的试探，很快可以发现，谁能把两堆石子取成(1,2)，(3,5)，(4,7)，(6,10)，… 就能有必胜之法.

啊，原来闵先生的"拣石子游戏"与"皇后登山"是貌异实同的，用数学行话

来说，它们本质上是“同构的”.

读者还可把这种游戏改头换面化妆成另外的游戏：由 A 在 $2 \times N$ 格的棋盘上任意放两位皇后 Q_1 和 Q_2，如图 5.

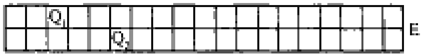


图 5

然后，由 B 开始先走棋，如果走一个皇后，则可把任一皇后向右（向 E 方向）走任意多少格；如果同时走两个皇后，则必须向右同时走相同的格子；不得不走棋，也不可倒走；这样轮流走棋，直至谁先把两个皇后都走到终点 E（而另一方无棋可走时），即获胜.

图 5 中 $N = 19$ 不是本质的，而 Q_1 和 Q_2 至 E 的空格数目 16 和 13 却是决定这一盘游戏的关键，可记为 (13, 16). 它不是“制高点”，所以 A 这样放 Q_1 和 Q_2 是一个失着. B 如掌握秘诀，他就应把棋走成 (8, 13) 或 (4, 7)，往后只要不犯错误，便必可取胜.

这些面目不同的游戏，在数学家看来，实质上只是一个游戏. 它们由表 5 和公式 (60) 及法则 (61) 所完整地解决了.

现在我们列出闵嗣鹤教授用初等方法推得的结果：对于任意给定的自然数 n，直接计算 $f(n)$ 的公式如下

$$f(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}N\right] \tag{62}$$

其中 $[x]$ 是指不超过 x 的最大整数；再与公式 (60) 联合，即可计算 $g(n)$.

§11 两个《美国数学月刊》征解题

1982 年，北京大学马希文教授曾在《中学生数学》（北师院办）中向中学生介绍几个有趣的自然数函数. 其中他举了如下例子：

$$f(n) = \begin{cases} 1 \\ \text{不存在 } f(1), \cdots, f(n-1), g(1), \cdots, g(n-1) \end{cases}$$

中出现的最小正整数

$$g(n) = f(n) + n$$

即要计算 $f(n)$ 必须先计算 $f(1), \cdots, f(n-1), g(1), \cdots, g(n-1)$. 马希文先生指出这两个函数是从研究外索夫博弈中得来的，其实 $f(n), g(n)$ 就是

$[\alpha n]$,$[\beta n]$,其中 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.关于 $f(n)$ 和 $g(n)$ 这两个不同定义的等价性,早在 1952 年《美国数学月刊》(American Mathematical Monthly)59 卷第一期中的第 4399 号征解问题中证明了,原题为:

试题 4　设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 为由下列三个条件所确定的两个自然数列:

(1)$f(1) = 1$;

(2)$g(n) = na - 1 - f(n)$,a 是一个大于 4 的整数;

(3)$f(n+1)$ 是与 $2n$ 个数:$f(1), f(2), \cdots, f(n); g(1), g(2), \cdots, g(n)$ 不同的最小自然数.

证明存在常数 α 和 β,使得 $f(n) = [\alpha n]$,$g(n) = [\beta n]$.

证明　设 α, β 为 $x^2 - ax + a = 0$ 的根,因 $a > 4$,故 $\Delta = a^2 - 4a > 0$,所以 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,且取 $\alpha < \beta$,则由韦达定理有

$$\alpha + \beta = a \quad \alpha\beta = a \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \quad 1 < \alpha \leqslant 2 \quad 2 \leqslant \beta$$

此外,α, β 必须都是无理数,因为假设有一个为有理数,那么 $\Rightarrow \alpha, \beta \in \mathbf{Z} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 2, a = 4$,与 $a > 4$ 矛盾.

下面我们来验证这样的 α, β 满足三个条件:

(1)因 $1 < \alpha < 2$,显然 $[\alpha \times 1] = 1$.

(2)对于 $n \geqslant 1$,注意到 $a \in \mathbf{Z}$,则

$$g(n) = [\beta n] = [(a - \alpha)n] = na - 1 - [\alpha n] = na - 1 - f(n)$$

(3)i)先验证 $\{[\alpha n]\} \cap \{[\beta n]\} = \varnothing$.

假设 $[\alpha n] = [\beta m] = k$,其中 $m, n \in \mathbf{N}$,则

$$\alpha n = k + \theta$$
$$\beta m = k + \varphi$$

其中 $0 < \theta < 1$,$0 < \varphi < 1$,并且有

$$n + m = k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\theta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta} = k + \frac{\theta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta}$$

因为 $0 < \frac{\theta}{\alpha} + \frac{\varphi}{\beta} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,所以 $\alpha\theta + \beta\varphi \notin \mathbf{Z}$,这与 $n + m \in \mathbf{Z}$ 矛盾.因此对任何 $m, n \in \mathbf{N}$,都有 $[\alpha n] \neq [\beta m]$.

ii)再验证 $f(n)$,$g(n)$ 都是严格增函数,且

$$g(n) > f(n)[\alpha(n+1)] = [\alpha n + \alpha] \geqslant [\alpha n] + [\alpha] = [\alpha n] + 1$$
$$[\beta(n+1)] \geqslant [\beta n] + [\beta] = [\beta n] + 2[\alpha n] + 1$$

iii)对每一个 $k \in \mathbf{N}$,则 k 不在 $\{f(n)\}$ 中出现就在 $\{g(n)\}$ 中出现,设 $n = \left[\frac{k+1}{\alpha}\right]$:

如果 $n > \frac{k}{\alpha}$，则

$$k < \alpha n < \frac{\alpha(k+1)}{\alpha} = k+1 \Rightarrow [\alpha n] = k$$

如果 $n < \frac{k}{\alpha}$，则

$$\left.\begin{array}{l}\beta(k-n) > \beta k - \frac{\beta}{\alpha}k = \beta k(1-\frac{1}{\alpha}) = k \\ \beta(k-n) < \beta k - \beta(\frac{k+1}{\alpha}-1) = k+1\end{array}\right\} \Rightarrow [\beta(k-n)] = k$$

由 i) ~ iii) 可知：

$[\alpha(n+1)]$ = 异于 $[\alpha 1],[\alpha 2],\cdots,[\alpha n]$；$[\beta 1],[\beta 2],\cdots,[\beta n]$ 的最小自然数. 故(1),(2),(3) 恰是 $f(n)$，$g(n)$ 的定义，由 α,β 的选取知这样的序列是惟一的，故 $f(n)=[\alpha n]$，$g(n)=[\beta n]$.（证毕）

其实从严格的意义上讲这个征解问题也并不是一个新题. 如前所述，因为早在 1926 年加拿大多伦多大学的 S. 贝蒂(Sam Beatty) 同一刊物的 33 期中就曾提出并证明了如下的问题(编号为 3177)：

试题 5 如果 z 是一正无理数，而 $\overline{y}$ 是它的倒数，证明在每一对相邻的正整数间，序列

$$(1+z),2(1+z),3(1+z),\cdots$$
$$(1+\overline{y}),2(1+\overline{y}),3(1+\overline{y}),\cdots$$

被且只被包含一个.

要证明试题 5 必须先证明如下的：

引理 3 设 $x=\frac{p}{q}$，$y=\frac{q}{p}$，其中 p,q 是正整数，$p<q$，$(p,q)=1$，而 $[x]$ 是 Gauss 函数，则序列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{q-1} \quad a_i = i(1+x)$$
$$b_1,b_2,\cdots,b_{p-1} \quad b_j = j(1+y)$$

具有以下性质：对应的序列 $\{[a_i]\}\{[b_i]\}$ 是整数 $1,2,\cdots,p+q-2$ 无重复或遗漏的某种排列.

证明 我们首先分析一下什么样的数在 $\{[a_i]\}$ 中被遗漏

$$a_m = m(1+x) = m + \frac{mp}{q} = m+k+\frac{r}{q}$$

$$a_{m-1} = (m-1)(1+x) = m-1+k+\frac{(m-1)p}{q} = m-1+k+\frac{r-p}{q}$$

其中 k,r 满足 $mp=kq+r$，$r<g$.

因此，当 $r<p$ 时，$[a_m]=m+k$，$[a_{m-1}]=m+k-2$，故 $m+k-1$ 被遗

漏.

下面我们证明:当 $m+k-1$ 被遗漏时,它恰好出现在$\{[b_j]\}$中,因为当 $r<p$ 时

$$b_k = k + \frac{kq}{p} = k + \frac{mp-r}{p} = m + k - \frac{r}{p}$$

故
$$[b_k] = m + k - 1$$

我们将所有在$\{[a_i]\}$中漏掉的数用上面的办法找回来

$$m_1 p = q + r_1$$
$$m_2 p = 2q + r_2$$
$$\vdots$$
$$m_k p = kq + r_k \quad 1 \leqslant r_k < p < q \quad k \leqslant p-1$$

很显然 $m_1 \geqslant 2$,且 $m_k \geqslant m_{k-1}+1$,所以在$\{[a_i]\}$中被漏掉的数为 $m_1, m_2+1, m_3+2, \cdots, m_{p-1}+p-2$.而这些数都刚好出现在$\{[b_j]\}$中.(引理3证毕)

现在我们来证明试题5,如果 z 是一个无理数,$0<z<1$,$\overline{y}=\frac{1}{z}$,则由有理数对无理数的逼近定理知

$$z - \frac{p}{q} = \epsilon_1 = \frac{\theta_1}{q^2}$$

$$y' - \frac{q}{p} = \epsilon_2 = \frac{\theta_2}{p^2}$$

其中 $|\theta_i|<1(i=1,2)$.故我们可以构造一个新的序列,令

$$z' = z - \epsilon_1$$
$$y' = \overline{y} - \epsilon_2$$

则 $z'=\frac{p}{q}$,$y'=\frac{q}{p}$,得到新序列如下

$$\{[i(1+z')]\} \quad 1 \leqslant i \leqslant q-1$$
$$\{[j(1+\overline{y'})]\} \quad 1 \leqslant j \leqslant p-1$$

由引理知是依某种顺序取遍整数 $1,2,\cdots,p+q-2$,因为

$$|i\epsilon_1| < \frac{1}{q} \qquad |j\epsilon_2| < \frac{1}{p}$$

按收敛的$\frac{p}{q}$阶的增加,我们能无限地增大 p 和 q,因此这些序列趋于问题中的序列.

贝蒂的证明很巧妙,它先证明了一个易于处理的有理数问题,然后通过有理数对无理数的逼近定理过渡到无理数的情形.

次年由 Oxterowski 和 Aitken Solution 在34卷《美国数学月刊》159页给出了

一个简单的证明.

正是由于有了这样一个漂亮的初等证明,使得贝蒂定理成为 1959 年 11 月 21 日举行的 20 届美国普特南数学竞赛试题 B－6.

后来这一问题引起了许多人的兴趣,此类文章陆续出现在一些数学杂志上,如 1962 年 H·格罗斯曼(H.Grossman)在《美国数学月刊》532 页上发表了"一个包括所有整数的集合"的有趣文章,1976 年 S·W 高勒姆(S.W.Golomb)在《数学杂志》49 期的 187 页上以"销售税"为题再次讨论了这个问题.1952 年苏联著名数论大师伊凡·邓脱维也维赤·维诺格拉陀夫院士出版了他的《数论基础》,在书中维氏罗列了大量的习题,正如华罗庚教授在为其中译本所写的序中所指出的那样:"这些问题大部分都是有根据有源流的,很多是历史上的著名问题".其中第二章的问题 3 即为贝蒂定理的另一种形式:

试题 6 设 α,β 是这样的正数,使得下面的数

$$[\alpha x]:x=1,2,\cdots$$
$$[\beta y]:y=1,2,\cdots$$

共同组成全部自然数列而且没有重复的.证明这事实在而且只在 α 是无理数并且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ 时才成立.

§ 12 Beatty 定理与两道竞赛题

Beatty 定理作为一个初等数论定理确定是既精巧别致而又有源流,所以在竞赛中经常会被用到,下面的试题是 28st IMO 预选题:

试题 7 求出方程 $[n\sqrt{2}]=[2+m\sqrt{2}]$ 的所有整数解.其中 $[x]$ 为 Gauss 函数.

解 设 $m\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}$,则显然有 $n>m$,且

$$[(m+3)\sqrt{2}]=[m\sqrt{2}+3\sqrt{2}]>[m\sqrt{2}]+4$$

所以 $n=m+1$ 或 $n=m+2$.

在 Beatty 定理中取 $\alpha=\sqrt{2},\beta=2+\sqrt{2}$,则

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

故 $\{[m\sqrt{2}]\}$ 和 $\{[(2+\sqrt{2})h]\}$ 为互补序列.

i) 若 $n=m+1$,因

$$2>[(m+1)\sqrt{2}]-[m\sqrt{2}]>1$$

故 $[m\sqrt{2}]$ 与 $[(m+1)\sqrt{2}]$ 之间含且仅含一个整数.由 Beatty 定理知一定为

$[(2+\sqrt{2})h]$ 型,即

$$m\sqrt{2} < (2+\sqrt{2})h < (m+1)\sqrt{2} \Rightarrow m < (\sqrt{2}+1)h < m+1$$

即 $m = [(\sqrt{2}+1)h]$.

ii) 若 $n = m+2$,则 $[(m+2)\sqrt{2}] = [m\sqrt{2}]+2$,故 $[m\sqrt{2}]$ 与 $[(m+2)\sqrt{2}]$ 间一定含有一个整数,因为 $[m\sqrt{2}] < [(m+1)\sqrt{2}] < [(m+2)\sqrt{2}]$,所以 $[m\sqrt{2}]$,$[(m+1)\sqrt{2}]$,$[(m+2)\sqrt{2}]$ 是三个连续整数,又由于

$$3 < [(2+\sqrt{2})(h+1)] - [(2+\sqrt{2})h] \leqslant [2+\sqrt{2}+1] = 4$$

所以 $[m\sqrt{2}]$ 前面的整数为 $[(2+\sqrt{2})h]$,$[n\sqrt{2}]$ 后面的整数为 $[(2+\sqrt{2})(h+1)]$,并且 $[(2+\sqrt{2})h]$ 前面的整数是 $[(m-1)\sqrt{2}]$,从而

$$(m-1)\sqrt{2} < (2+\sqrt{2})h < m\sqrt{2} < (m+2)\sqrt{2} < (2+\sqrt{2})(h+1) \Rightarrow$$

$$(m-1) < (1+\sqrt{2})h < m < m+2 < (1+\sqrt{2})(h+1)$$

故 $m = [(1+\sqrt{2})h]+1$.(解毕)

最为有趣的是 H.W 戈劳德(H.W.Gould)还将 Beatty 定理与著名的斐波那契数列联系起来.他在很有名的《斐波那契季刊》(Fibonacci Quarterly 3 P117)中发表了"非斐波那契数"(Non - Fibonacci Numbers).从中我们得到这样的启示.能不能用斐波那契数列证明那些原来用 Beatty 定理的竞赛试题呢?应该是能的!我们以试题 5 为例.

其实试题 5 原来只是要求 $f(240)$,但由于最早将它介绍到我国来的 1978 年 8 月 19 日的《参考消息》印刷有误,所以才变成为 $f(2n)$.现在我们来求 $f(240)$.

解 设 $\{f_i\}$ 为斐波那契数列,令 $b_i = f_{i+1}$,则 $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 3, b_4 = 5, \cdots$ 则每一个 $n \in \mathbf{N}$,都可惟一表示为

$$n = a_k b_k + a_{k-1} b_{k-1} + \cdots + a_0 b_0$$

这里 $a_i \in \{0,1\}(i = 0,\cdots,n)$,且没有两个相邻的 a_i 都等于 1.我们称 $(a_k a_{k-1} \cdots a_0)$ 为 n 在斐波那契基下的表示,记为 $n = (a_k a_{k-1} \cdots a_0)_f$,例如

$$1 = (1)_f, 2 = (10)_f, 3 = (100)_f, 4 = (101)_f,$$

$$5 = (1000)_f, 6 = (1001)_f, 7 = (1010)_f, \cdots$$

我们定义一个函数 $\mu(n)$,它表示 n 在斐氏基下尾部 0 的个数.令

$$N_1 = \{n \mid \mu(n) \equiv 0 \pmod 2\}$$

$$N_2 = \{n \mid \mu(n) \equiv 1 \pmod 2\}$$

则 $N = N_1 \cup N_2$,且 $N_1 \cap N_2 = \varnothing$,并记 $f(n)$ 为 N_1 中的第 n 个元素,$g(n)$ 为 N_2 中的第 n 个元素.

下面我们给出一种在斐氏基下计算 $f(n)$ 的方法:我们规定 $f(n)$ 的值如下

$$f(n)=f((a_ka_{k-1}\cdots a_0)_f)=\begin{cases}(a_ka_{k-1}\cdots a_00)_f-1 & \mu(n)\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\(a_ka_{k-1}\cdots a_00)_f & \mu(n)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\end{cases}$$

容易计算
$$f(1)=f((1)_f)=(10)_f-1=2-1=1$$
$$f(2)=f((10)_f)=(100)_f=3$$
$$f(3)=f((100)_f)=(1000)_f-1=5-1=4$$
$$\vdots$$
$$f(240)=f((100000001010)_f)=(1000000010100)_f=377+8+3=388$$

以下只需证明：$f(n)$，$g(n)$ 满足条件 $g(n)=f(f(n))+1$ 对每一个 $f(n)=(C_kC_{k-1}\cdots C_0)f$，$\mu(f(n))\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$，$f(f(n))=(C_kC_{k-1}\cdots C_00)_f-1$，则 $f(f(n))+1=(C_kC_{k-1}\cdots C_00)_f$，则 $\mu(f(f(n)))\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$，则 $f(f(n))+1\in N_2$，且恰好为 $g(n)$.

§13　互补序列的进一步研究及其在数学竞赛中的应用

1954年夏天，《美国数学月刊》发表了两位加拿大数学家J.拉姆贝克(J.Lambek)和L.莫斯尔(Leo Moser)对互补序列的进一步研究，他们首次将互补序列与互逆序列建立起了关系.

若对一个函数 $f(x)$ 来讲，如果有一个函数 f^* 使得 $f^*(f(x))=x$，则称 f^* 为 f 的逆函数.若还有 $f(f^*(x))=x$，则 f 与 f^* 称为互逆函数，如果两序列分别以两个互逆的函数 f 与 f^* 为其通项，则此两序列 $\{f(n)\}$ 与 $\{f^*(n)\}$ 称为互逆序列.

拉姆贝克和莫斯尔研究了一类特殊的互逆序列，其通项是由如下可互逆函数定义的.

定义　$f(x)$ 是一个在 $x\geqslant 0$ 的严格递增函数，$f^*(y)=\max\{x\geqslant 0\mid f(x)\leqslant y\}$

容易证明如此定义的 f 与 f^* 是互逆的，即有 $f^*(f(x))=x$.

设 $f(x_0)=n$，现在 $f^*(n)=$ 使得 $f(x)\leqslant n$ 的最大的 x，亦即使得 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 的最大的 x，显然 x_0 是满足这个不等式的一个值，因 f 是严格递增的，所以 x_0 就是最大的这样的 x，于是 $f^*(n)=f^*(f(x_0))=x_0$，对任意 x_0 都成立.

拉姆贝克与莫斯尔证明了如下的：

定理8　设 $F(n)=f(n)+n$，$G(n)=g(n)+n$，则 $\{F(n)\}$，$\{G(n)\}$ 为互补序列的充要条件是 $\{f(n)\}$ 与 $\{g(n)\}$ 为互补序列，即 $f^*(n)=g(n)$，$g^*(n)=f(n)$.

证明见 §5.

令人惊奇的是在其他的数学分支中也有类似的结论，例如1958年苏联活罗涅日大学的克拉斯诺谢勒斯基(1920—Krasnosel'skii Mark Alexan dovic)对所谓的 N 函数也证明了类似的结论.

函数 f 称为 N 函数，如果它能表为形式

$$f(u)=\int_0^{|u|}p(t)\mathrm{d}t$$

其中函数 p 对 $t\geqslant 0$ 是右连续的，对 $t>0$ 是正的和非减的，并且满足

$$p(0)=0\qquad \lim_{t\to+\infty}p(t)=+\infty$$

设 p 是上述定义的函数，对 $s\geqslant 0$，定义函数 q 为

$$q(s)=\sup_{p(t)\leqslant s}t$$

(实际上 $q(s)$ 为 p 的逆函数)，则函数 $f(u)=\int_0^{|u|}p(t)\mathrm{d}t$ 和 $g(v)=\int_0^{|v|}q(s)\mathrm{d}s$ 为互补函数.

拉姆贝克和莫斯尔定理的提出为数学竞赛注入了新的活力，它从两个方面开拓了命题的新方向.

一是逆序列的概念及性质开始出现在数学竞赛的试题中，例如26st IMO预选题中有一题为：

试题8 定义自然数集 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的函数 f 为

$$f(n)=\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}n\right]$$

$$F(k)=\min\{n\in\mathbf{N}\mid f^k(n)>0\} \tag{63}$$

其中 $f^k=f\circ f\circ\cdots\circ f$ 为 f 复合 k 次. 证明：$F(k+2)=3F(k+1)-F(k)$.

它的证明必须要用到可逆序列，先构造一个逆函数

$$G(m)=\min\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\geqslant m\}$$

事实上它等同于

$$f^*(m)=\max\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\leqslant m\}$$

所以一定有

$$f(G(m))=m$$

且容易验证：$G(m)=3m-f(m)$.

并且利用(63)式可以证明 $F(k+1)=G(F(k))$，所以可得

$$F(k+2)=G(F(k+1))=3F(k+1)-f(F(k+1))=$$
$$3F(k+1)-f(G(F(k)))=3F(k+1)-F(k)$$

可以看出可逆函数 $G(m)$ 在解题中扮演了重要的角色.

然后是互补序列和互逆序列的相互关系的应用，L-M定理为我们提供了

互补序列和互逆序列相互转化的方式,可分以下几种类型:

类型一:已知$\{F(n)\}$,$\{G(n)\}$为互补序列,已给$F(n)$的表达式,求$G(n)$的表达式.

解法是:由$F(n)=f(n)+n \Rightarrow f(n)=F(n)-n \Rightarrow f^*(n)=(F(n)-n)^* \Rightarrow G(n)=f^*(n)+n$.公式为:$G(n)=(F(n)-n)^*+n$.

i) 当$F(n)=n^2$时即为27 st 普特南数学竞赛试题.

ii) 当$F(n)=3n^2-2n$和$\left[\frac{n^2+2n}{3}\right]$时即为29st IMO预选题(西德提供).

类型二:证明对于参数u,v,存在互补序列.

这类问题是存在性的,但往往可以构造出来.如1985年26st IMO候选题.

试题9 $N=\{1,2,3,\cdots\}$,对实数x,y,令$S(x,y)=\{S \mid s=[nx+y],n\in\mathbf{N}\}$.证明:若$r>1$,$r\in\mathbf{Q}$,则存在$u,v\in\mathbf{R}$,使

$$S(r,0)\cap S(u,v)=\varnothing \qquad S(r,0)\cup S(u,v)=\mathbf{N}$$

证明 由于$r\in\mathbf{Q}$,故可设$r=\frac{p}{q}$,$p,q\in\mathbf{Z}$,且由$r>1$知$p>q$,故可选取

$$u=\frac{p}{p-q} \quad 及 \quad v=-\frac{\varepsilon}{p-q}$$

其中ε是一个非零的充分小的正数.(小到什么速度后面定).由于

$$S(r,0)=[nr]=\left[n\frac{p}{q}\right]=\left[n+\frac{p-q}{q}n\right]=n+\left[\frac{p-q}{q}n\right]$$

$$S(u,v)=[nu+v]=\left[\frac{pn}{p-q}-\frac{\varepsilon}{p-q}\right]=n+\left[\frac{nq-\varepsilon}{p-q}\right]$$

故由L-M定理可知:只需证明

$$f(n)=\left[\frac{p-q}{q}n\right] \qquad g(n)=\left[\frac{nq-\varepsilon}{p-q}\right]$$

是互逆序列,即$g(n)=f^*(n)$即可

$$f^*(n)=\max\left\{m \mid \left[\frac{p-q}{q}m\right]<n\right\}$$

考察不等式:$\left[\frac{p-q}{q}m\right]<n \Rightarrow \left(\frac{p-q}{q}m\right)<n$.由实数的连续性可知,一定存在一个充分小的$\varepsilon>0$,使得

$$\frac{\varepsilon}{q}+\frac{p-q}{q}m\leqslant n$$

ε取不超过$q(n+m)-pm$的实数,解上面的不等式可得

$$m\leqslant\frac{qn-\varepsilon}{p-q}\Rightarrow f^*(n)=\max m=\left[\frac{qn-\varepsilon}{p-q}\right]=g(n)$$

证毕.

4 年以后,在 1989 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克中将上述预选题改编为如下试题:

试题 10 已知一对互素的正数 $p > q$,求所有的实数 c,d,使得集合

$$A = \left\{\left[\frac{np}{q}\right] \mid n \in \mathbf{N}\right\} \qquad B = \{[cn + d] \mid n \in \mathbf{N}\}$$

满足 $A \cap B = \varnothing$,$A \cup B = \mathbf{N}$,这里 $\mathbf{N}$ 表示自然数集.

值得指出的是本题如不用 L - M 定理将会使证明变得非常复杂,并且得用到极限的手段,这样的证明可见《国家数学奥林匹克,国家队员竞选试题》(邓宗琦等编,华中师范大学出版社)

L - M 定理应用范围极广,由此可以编出许多数学竞赛试题,仅举两例:

试题 11 当 $F(n) = [e^m]$ 时,利用 L - M 定理可以证明第 n 个不是 $[e^m]$ 的形式的正整数是

$$G(n) = n + [\ln(n + 1 + [\ln(n + 1)])]$$

这里 $m \geqslant 1$,e 表示自然对数的底,$\ln$ 为自然对数.

显然可将 $F(n)$ 改写成 $F(n) = n + [e^n - n]$,故 $f(n) = [e^n - n]$.所以只需证 $f^*(n) = [\lg(n + 1 + [\lg(n + 1)])]$.而这是容易的,但用其他办法却有一定的难度.

试题 12 当取 $F(n) = \frac{1}{2}n(n + 1)$ 时,即 $F(n)$ 是一个三角形数时(是指若干个自 1 开始的相继整数之和),则第 n 个非三角形数为 $n + \langle\sqrt{2n}\rangle$.$\langle x\rangle$ 表示距离 x 最近的整数.

通过以上对竞赛中互补型序列的考察,我们可以得出这样的结论,只有那些背景深远的竞赛试题才能称为数学奥林匹克试题中的精品,只有这些精品才能引起人们持久的兴趣,只有这种持久的兴趣才使得数学奥林匹克事业常盛不衰.

定理 9 α,β 为两个正实数,对于所有正整数 n,已知 $[n\alpha] + [n\beta] = [n(\alpha + \beta)]$,求证:$\alpha$,$\beta$ 中至少有一个为正整数.这里 $[nx]$($x = \alpha$,β 或 $\alpha + \beta$)表示不超过 nx 的最大整数.

证明 用反证法,设 α,β 都不是正整数.记

$$\begin{aligned} \alpha &= [\alpha] + \alpha_1 \qquad 0 < \alpha_1 < 1 \\ \beta &= [\beta] + \beta_1 \qquad 0 < \beta_1 < 1 \end{aligned} \tag{64}$$

那么,有

$$\begin{aligned} [n\alpha] + [n\beta] &= (n[\alpha] + n[\beta]) + ([n\alpha_1] + [n\beta_1]) \\ [n(\alpha + \beta)] &= n([\alpha] + [\beta]) + [n(\alpha_1 + \beta_1)] \end{aligned} \tag{65}$$

利用题目条件，对于任意正整数 n，有

$$[n\alpha_1]+[n\beta_1]=[n(\alpha_1+\beta_1)] \tag{66}$$

我们首先证明 $\alpha_1+\beta_1<1$. 用反证法，如果 $\alpha_1+\beta_1\geqslant 1$，在(3)中取 $n=1$，应有

$$[\alpha_1]+[\beta_1]=[\alpha_1+\beta_1]=1 \tag{67}$$

但从式(64)知道式(67)左边为零，矛盾.

对于任意正实数 x，记

$$\{x\}=x-[x] \tag{68}$$

在记号(68)下

$$\alpha_1=\{\alpha\} \qquad \beta_1=\{\beta\} \tag{69}$$

由于 $n\alpha_1+n\beta_1=n(\alpha_1+\beta_1)$，此等式减去式(66)，再利用式(68)，有

$$\{n\alpha_1\}+\{n\beta_1\}=\{n(\alpha_1+\beta_1)\} \tag{70}$$

我们知道，如果 $\alpha_1+\beta_1$ 是正有理数，则存在正整数 p,q，使得

$$\alpha_1+\beta_1=\frac{p}{q} \tag{71}$$

那么

$$\{q(\alpha_1+\beta_1)\}=q(\alpha_1+\beta_1)-[q(\alpha_1+\beta_1)]=p-p=0 \tag{72}$$

当 $\alpha_1+\beta_1$ 是正无理数时，我们需要下述定理：

定理 10(有理数逼近实数定理) x 是一个正的无理数，那么一定存在两个单调递增的正整数数列 $\{p_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ 和 $\{q_n\mid n\in\mathbf{N}\}$，满足 $\left|x-\dfrac{p_n}{q_n}\right|<\dfrac{1}{q_n^2}$

证明 用 a_0 表示 x 的整数部分，即 $a_0=[x]$. 令

$$\frac{1}{x_1}=x-a_0 \tag{73}$$

x_1 也是一个正无理数，而且大于 1. 取正整数 $a_1=[x_1]$，再令

$$\frac{1}{x_2}=x_1-a_1 \tag{74}$$

如此继续下去，对于 $j=2,3,\cdots,n$，令

$$\frac{1}{x_{j+1}}=x_j-a_j$$

这里 $a_j=[x_j]$ 都是正整数，$x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}$ 全是大于 1 的正无理数.

这样，我们就得到一分数表示式

$$x=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{x_{n+1}}}}} \tag{75}$$

式(75)可简记为

$$x=[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,x_{n+1}] \tag{76}$$

利用式(75)与式(76)的关系,我们有

$$[a_0]=\frac{a_0}{1} \qquad [a_0,a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}$$

$$[a_0,a_1,a_2]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=a_0+\frac{a_2}{a_1a_2+1}=\frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1} \tag{77}$$

记

$$p_0=a_0,q_0=1,p_1=a_0a_1+1,q_1=a_1$$

$$p_2=a_0a_1a_2+a_0+a_2=a_2p_1+p_0$$

$$q_2=a_1a_2+1=a_2q_1+q_0 \tag{78}$$

那么,有

$$[a_0]=\frac{p_0}{q_0} \qquad [a_0,a_1]=\frac{p_1}{q_1} \qquad [a_0,a_1,a_2]=\frac{p_2}{q_2} \tag{79}$$

引入两列数(参考式(78))

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2} \qquad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2} \tag{80}$$

这里正整数 $n\geqslant 2$,我们要证明

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}(n\in\mathbf{N}) \tag{81}$$

$$p_nq_{n-1}-p_{n-2}q_n=(-1)^na_n,\text{正整数 } n\geqslant 2 \tag{82}$$

$$[a_0,a_1,\cdots,a_n]=\frac{p_n}{q_n}\quad(n\in\mathbf{N}) \tag{83}$$

在这里,我们要申明,这里一切 $a_j(j=0,1,2,\cdots,n)$ 全是正实数,公式(75)是一个形式的定义.这样做的目的是便于式(83)的证明.

对于公式(81),对 n 用归纳法.当 $n=1$ 时,利用式(78),有

$$p_1q_0-p_0q_1=(a_0a_1+1)-a_0a_1=1 \tag{84}$$

因此,当 $n=1$ 时,式(81)成立.设当 $n=k$ 时

$$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k-1} \tag{85}$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})(\text{利用式}(80))=$$

$$p_{k-1}q_k-p_kq_{k-1}=(-1)^k \tag{86}$$

因此公式(81)成立.现对公式(82),用公式(81)的结果,很容易得到

$$p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})=(\text{利用公式}(82))$$

$$a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=a_n(-1)^{n-2}(\text{利用公式}(81))=$$

$$(-1)^na_n \tag{87}$$

这样公式(82)也得到了.现在证明式(83),对 n 用数学归纳法,奠基工作,式(79)已经做了.设当 $n=m$ 时

$$[a_0,a_1,\cdots,a_m]=\frac{p_m}{q_m} \tag{88}$$

这里 $p_m=a_mp_{m-1}+p_{m-2},q_m=a_mq_{m-1}+q_{m-2}$(公式(80)),当 $n=m+1$ 时,从式(85)和式(76),有

$$[a_0,a_1,\cdots,a_{m-1},a_m,a_{m+1}]=[a_0,a_1,\cdots,a_{m-1},a_m+\frac{1}{a_{m+1}}]=$$

$$\frac{(a_m+\frac{1}{a_{m+1}})p_{m-1}+p_{m-2}}{(a+\frac{1}{a_{m+1}})q_{m-1}+q_{m-2}}=\frac{(a_mp_{m-1}+p_{m-2})+\frac{p_{m-1}}{a_{m+1}}}{(a_mq_{m-1}+q_{m-2})+\frac{q_{m-1}}{a_{m+1}}}=$$

$$\frac{p_m+\frac{p_{m-1}}{a_{m+1}}}{q_m+\frac{q_{m-1}}{a_{m+1}}}(\text{利用}(80))=\frac{a_{m+1}p_m+p_{m-1}}{a_{m+1}q_m+q_{m-1}}=$$

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}(\text{再一次利用式}(80))$$

(利用归纳法假设 88,在公式(88)中,a_m 是任意一个正实数)

公式(81)成立.

现在我们来证明有理数逼近实数定理.$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全是正整数.利用式(76),有

$$x=[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,x_{n+1}]=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}(\text{利用公式}(83)) \tag{89}$$

所以

$$x-\frac{p_n}{q_n}=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}=$$

$$\frac{p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n+q_{n-1})}=\frac{(-1)^n}{q_n(x_{n+1}q_n+q_{n-1})}(\text{利用公式}(81)) \tag{90}$$

综

述

由于 a_0 是非负整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正整数，从公式(78) 和(80) 可以知道 $p_j, q_j (j \in \mathbf{N})$ 都是正整数，而且满足

$p_0 < p_1 \leqslant p_2$ 当($a_0 = 0, a_2 = 1$ 时取等号) $< p_3 < \cdots < p_n < \cdots, q_1 < q_2 < q_3 < \cdots < q_n < \cdots$ (91)

显然 $p_n \geqslant n - 1, q_n \geqslant n$.

利用式(90)，两端取绝对值，有

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} (n \in \mathbf{N}) \tag{92}$$

这里利用 $x_{n+1} > 1, q_{n-1} > 0$.

有了以上的定理，我们回到定理2的证明上来，当 $\alpha_1 + \beta_1$ 是正无理数时，令 $x = \alpha_1 + \beta_1$. 在公式(90) 中取 $n = 2k (k \in \mathbf{N})$，两端乘以正整数 q_n，有

$$0 < (\alpha_1 + \beta_1) q_{2k} - p_{2k} = \frac{1}{x_{2k+1} q_{2k} + q_{2k-1}} < \frac{1}{q_{2k}} \tag{93}$$

从式(93)，有

$$p_{2k} < (\alpha_1 + \beta_1) q_{2k} < p_{2k} + \frac{1}{2k} \tag{94}$$

上式表明对于正实数 ε，这里 $\varepsilon < \min(\alpha_1, \beta_1) < 1$，一定有正整数 q_{2k} 存在，使得

$$\{q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)\} < \varepsilon \tag{95}$$

实际上只要取正整数 k 满足 $\frac{1}{2k} < \varepsilon$ 即可.

从式(70) 和式(95)，有

$$\{q_{2k}\alpha_1\} < \varepsilon \qquad \{q_{2k}\beta_1\} < \varepsilon \tag{96}$$

而

$$(q_{2k} - 1)(\alpha_1 + \beta_1) = q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_1 + \beta_1) = $$
$$[q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)] + \{q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)\} - (\alpha_1 + \beta_1) \tag{97}$$

从上面叙述，有

$$\{q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)\} - (\alpha_1 + \beta_1) < \varepsilon - (\alpha_1 + \beta_1) < 0 \tag{98}$$

于是

$$[(q_{2k} - 1)(\alpha_1 + \beta_1)] = [q_{2k}(\alpha_1 + \beta_1)] - 1 \tag{99}$$

另一方面

$$(q_{2k} - 1)\alpha_1 = q_{2k}\alpha_1 - \alpha_1 = [q_{2k}\alpha_1] + \{q_{2k}\alpha_1\} - \alpha_1 < [q_{2k}\alpha_1] \tag{100}$$

(利用式(96) 及 $\varepsilon < \alpha_1$)

类似地有

$$(q_{2k} - 1)\beta_1 < [q_{2k}\beta_1] \tag{101}$$

则

$$[(q_{2k}-1)\alpha_1]=[q_{2k}\alpha_1]-1$$

$$[(q_{2k}-1)\beta_1]=[q_{2k}\beta_1]-1 \tag{102}$$

由公式式(66)，应当有

$$[(q_{2k}-1)(\alpha_1+\beta_1)]=[(q_{2k}-1)\alpha_1]+[(q_{2k}-1)\beta_1] \tag{103}$$

但是从式(99)和式(102)，知道式(103)不可能成立．矛盾．

当 $\alpha_1+\beta_1$ 是正有理数时，利用公式(70)和(72)，知道

$$\{q\alpha_1\}=0 \qquad \{q\beta_1\}=0$$

在上述证明中，取 $q_{2k}=q$，公式(95)～(103)的叙述都仍然有效．因此，也推出矛盾．

当 α,β 中有一个是正整数时，题目等式当然对任意正整数 n 成立．

§14　Beatty 定理的两个变形

定理 11　归纳地定义数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 如下

$$a_1=1, b_1=2, c_1=4$$

a_n 等于不在 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}; b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}; c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 中的最小的正整数．

b_n 等于不在 $a_1,a_2,\cdots,a_n; b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}; c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 中的最小的正整数．

$$c_n=2b_n+n-a_n$$

证明

$$\frac{9-5\sqrt{3}}{3}<(1+\sqrt{3})n-b_n<\frac{4(3-\sqrt{3})}{3} \tag{104}$$

先证明两个引理：

引理 4　$c_{n+1}-c_n\geqslant 2$.

证明　对 n 使用数学归纳法：

i) $n=1$ 时直接计算知 $c_2-c_1=9-4>2$.

ii) 假定对一切 $n\leqslant k-1$，都有 $c_{n+1}-c_n\geqslant 2$，当 $n=k$ 时，有

$$c_{k+1}-c_k=2b_{k+1}+k+1-a_{k+1}-2b_k-k+a_k=$$
$$2(b_{k+1}-b_k)+(a_k-a_{k+1})+1$$

由 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的定义方式，我们可以看出：$a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_k<b_k<a_{k+1}<b_{k+1}<\cdots$，注意到 $c_{k+1}>b_{k+1}$，于是利用归纳假设可知，在 a_k 和 b_k 之间，b_k 和 a_{k+1} 之间，a_{k+1} 和 b_{k+1} 之间至多有一个数列 $\{a_n\}$ 中的项，从而 $b_{k+1}-$

$b_k \geqslant 2, a_{k+1} - a_k \leqslant 4$,并且 $a_{k+1} - a_k = 4$ 时,$b_{k+1} - b_k \geqslant 3$.于是在 $a_{k+1} - a_k = 4$ 时

$$2(b_{k+1} - b_k) + (a_k - a_{k+1}) + 1 \geqslant 6 - 4 + 1 = 3 > 2$$

于是 $c_{k+1} - c_k \geqslant 2$.从而 $n = k$ 时命题成立.引理 4 获证.

引理 5　$2 \geqslant b_n - a_n \geqslant 1$.

证明　由引理 4 我们知道不存在两个连续的正整数,它们都是 $\{c_n\}$ 中的项,从而引理 5 成立.

现在我们来证明式(104),对 n 使用数学归纳法.

i) 当 $n = 1,2,3$ 时,直接计算便知式(104) 成立.

ii) 假定对一切 $n \leqslant j-1$,式(104) 成立,在 $n = j$ 时,不妨设 $c_h < b_j < c_{h+1}$,于是由 $b_j < c_j$ 可知 $h \leqslant j-1$,并且根据 b_n 时的定义方式,我们有

$$b_j = 2j + h \tag{105}$$

故由

$$b_j \geqslant c_h + 1 = h + 1 + 2b_h - a_h = h + 1 + b_h + (b_h - a_h) \geqslant$$
$$h + 2 + b_h > h + 2 + (1+\sqrt{3})h - \frac{4(3-\sqrt{3})}{3}$$

及式(105) 可知

$$h < (\sqrt{3}-1)j - \frac{9-5\sqrt{3}}{3}$$

从而

$$b_j = 2j + h < (\sqrt{3}+1)j - \frac{9-5\sqrt{3}}{3} \tag{106}$$

又因为

$$b_j \leqslant c_{h+1} - 1 = h + 2b_{h+1} - a_{h+1} \leqslant$$
$$h + (b_{h+1} - a_{h+1}) + b_{h+1} \leqslant h + 2 + b_{h+1} <$$
$$h + 2 + (h+1)(1+\sqrt{3}) - \frac{9-5\sqrt{3}}{3}$$

所以
$$h > (\sqrt{3}-1)j - \frac{4(3-\sqrt{3})}{3}$$

从而

$$b_j = 2j + h > (\sqrt{3}+1)j - \frac{4(3-\sqrt{3})}{3} \tag{107}$$

综合式(106)、(107) 可知,$n = j$ 时式(104) 成立,从而式(104) 得证.

综述

数的 Fibonacci 表示

周持中[1]

§1 整数的 Fibonacci 表示

1.1 自然数的 Fibonacci 表示

一个自然数 N 的 Fibonacci 表示(简称 F 表示)是指把 N 表示为正的,互异的 Fibonacci 数之和,换句话说,就是把 N 用 $\{f_n\}_1^{\infty}$ 中的项表示为

$$N = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_r} \tag{1}$$

在 N 的 F 表示中,我们最感兴趣的是适合下列两附加条件的表示:

i) 加项中不出现相邻的 Fibonacci 数,即

$$k_{i+1} \leqslant k_i - 2(i = 1,\cdots,r-1) \tag{2}$$

ii) 加项中不含 f_1(因 $f_1 = f_2 = 1$),即

$$k_r \geqslant 2 \tag{3}$$

这样,N 的 F 表示式(1) 如果同时适合条件(2) 和(3),则称为标准的.通常所说 F 表示,一般指标准表示.

定理 1 自然数 N 的标准 F 表示存在且惟一.

证明 我们首先证明存在性.N 本身为 Fibonacci 数时结论自然成立.只要证 $f_n < N < f_{n+1}$ 时结论成立即可.因为 $1 = f_2, 2 = f_3, 3 = f_4, 4 = f_4 + f_2$,所以当 $N < f_5$ 时结论已成立,现设对 $N < f_n$ 时结论已成立.当 $f_n < N < f_{n+1}$ 时,因 $N = f_n + (N - f_n)$,而 $N - f_n < f_{n+1} - f_n = f_{n-1} < f_n$,故依归纳假设,$N - f_n$ 存在标准 F 表示,且其表示式中最大项 $\leqslant f_{n-2}$,因而 N 的 F 表示存在且是标准的.

下证惟一性.当 $n < f_5$ 时,可直接验证.设 $N < f_n$ 时已有惟一的标准 F 表示,设 $f_n \leqslant N \leqslant f_{n+1}$ 时 N 有一种标准 F 表示如式(1).显然 $f_{k_1} \leqslant f_n$,今证必有 $f_{k_1} = f_n$,若不然,设 $f_{k_1} \leqslant f_{n-1}$,则当 $n = 2k$ 时有

[1] 周持中,湖南理工大学教授.

$$N \leqslant f_{2k-1} + f_{2k-3} + \cdots + f_3 = f_{2k} - f_1 = f_n - 1$$

当 $n = 2k + 1$ 时有

$$N \leqslant f_{2k} + f_{2k-2} + \cdots + f_2 = f_{2k+1} - f_1 = f_n - 1$$

均与 $N > f_n$ 矛盾. 由 $N = f_n + (N - f_n)$ 及 $N - f_n$ 的标准 F 表示是惟一的即得所证.

上述定理又称 Zeckendorf 定理, 因为最先是他在 1939 年提出自然数的 F 表示问题. 不过他当时还只证明了存在性, 而惟一性是由 Lekkerkerker 在 1952 年证明的[6]. N 的标准 F 表示也可转换为二元数码的形式, 即式(1) 可改写为

$$N = \sum_{i=2}^{n} c_i f_i, c_i = 0 \text{ 或 } 1 \tag{4}$$

从而 N 对应于一个二元码

$$C = (c_n, \cdots, c_2) \tag{5}$$

而条件(3) 已含在其中, 条件(2) 则变换为 C 中不出现相邻的 1, 此时也称 C 为 1 不相邻序列. 此种形式在现代密码学中有其应用[7]-[8].

如果在自然数的 F 表示式(1) 中不要求适合条件(2), 那么在哪些情况下仍有表示的惟一性呢? 我们有:

定理 2 把自然数 N 表示形如式(1) 的和, 如果只要求 $k_1 > k_2 > \cdots > k_r \geqslant 2$, 那么, 当且仅当 N 为形如 $f_n - 1$ 的数时表示才是惟一的, 即标准表示.

证明 充分性. 设 $N = f_n - 1$, 则必 $k_1 = n - 1$. 若不然, 必有 $k_1 \leqslant n - 2$, 此时将有

$$n \leqslant f_{n-2} + f_{n-3} + \cdots + f_2 = f_n - 2$$

此乃矛盾. 所以 $k_1 = n - 1$. 又由 $N - f_{k_1} = f_{n-2} - 1$, 同理可证 $k_2 = n - 3$. 依此类推可得

$$N = f_{n-1} + f_{n-3} + f_{n-5} + \cdots + f_r$$

$r = 2$ 或 3, 依 n 为奇或偶而定, 故 N 有惟一表示即标准表示.

必要性. 设 N 具有表示的惟一性, 由定理 1, 此惟一表示必为标准表示, 设为形式(1), 今只要证(2) 中右边等号均成立且 $k_r = 2$ 或 3, 则证明了 N 具有 $f_n - 1$ 之形(理由见充分性证明). 反设有某个 $i(1 \leqslant i \leqslant r - 1)$ 使 $k_{i+1} \leqslant k_i - 3$, 则在式(1) 中可将 f_{k_i} 换成 $f_{k_i - 1} + f_{k_i - 2}$, 这与表示的惟一性矛盾, 同理, 若 $k_r > 3$, 则 f_{k_r} 可换成 $f_{k_r - 1} + f_{k_r - 2}$ 而引出矛盾. 证毕.

下面证明标准 F 表示的两个简单性质, 它们在一种叫 Nim 的对策中有用.

定理 3 设 $f_n < N < f_{n+1}$, N 的标准 F 表示为式(1), 则

i) $k_i > k_j$ 时, $f_{k_i} > 2f_{k_j}$; (6)

ii) $f_{k_i} < 2(f_{n+1} - N)$. (7)

证明　i) 此时有 $k_i \geq k_j + 2$，所以 $f_{k_i} \geq f_{k_j+2} = f_{k_j+1} + f_{k_j} > 2f_{k_j}$.

ii) 此时有

$$f_{n+1} - N \geq f_{k_1+1} - f_{k_1} - f_{k_1-2} - \cdots - f_{k_1-2j} - f_{k_i} =$$

$$f_{k_1-2j-1} - f_{k_i} \geq f_{k_1-2j-1} - f_{k_1-2j-2} = f_{k_1-2j-3}$$

所以
$$2(f_{n+1} - N) \geq 2f_{k_1-2j-3} > f_{k_1-2j-2} \geq f_{k_i}$$

证毕.

1907 年，Wythoff[13] 在提出一种新的 Nim 对策时引出了如下有趣的正整数对序列：

(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13),(9,15),(11,18),
(12,20),(14,23),(16,26),(17,28),(19,31),(21,34),
(22,36),… (8)

此序列中任一数对 (a_n, b_n) 称为 Wythoff 对，可以严格定义如下：

i) $a_1 = 1$，$n > 1$ 时，a_n 为在 $(a_1, b_1), \cdots, (a_{n-1}, b_{n-1})$ 中未出现过的最小正整数；

ii) $b_n = a_n + n$. (9)

Wythoff 对有许多有趣的性质，它与自然数的 F 表示有密切的联系. 事实上，我们有：

定理 4　设正整数对 (a_n, b_n) 定义如下：

i) $(a_1, b_1) = (1,2)$；

ii) $n > 1$ 时设 $n-1$ 的一种 F 表示为

$$n - 1 = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_r} \quad (k_1 > \cdots > k_r \geq 2) \tag{10}$$

令
$$a_n = f_{k_1+1} + \cdots + f_{k_r+1} + f_2 \tag{11}$$

$$b_n = f_{k_1+2} + \cdots + f_{k_r+2} + f_3 \tag{12}$$

则 (a_n, b_n) 为 Wythoff 对.

此定理并未要求式(10)为 $n-1$ 的标准 F 表示，因而此种表示不一定是惟一的，那么，a_n 和 b_n 是否与所选择的表示法有关，亦即能否惟一确定呢？为解决这一问题，在证明此定理之先，我们先证 Carlitz[12],[11] 在 1968 年和 1972 年的两个结果.

定理 5　设自然数 m 有两种不同的 F 表示

$$m = f_{k_1} + \cdots + f_{k_r} = f_{j_1} + \cdots + f_{j_s} \tag{13}$$

$$k_1 > \cdots > k_r \geq 2, j_1 > \cdots > j_s \geq 2$$

则 $$f_{k_1-1}+\cdots+f_{k_r-1}=f_{j_1-1}+\cdots+f_{j_s-1} \tag{14}$$

且 $$f_{k_1+1}+\cdots+f_{k_r+1}=f_{j_1+1}+\cdots+f_{j_s+1} \tag{15}$$

证明 先证(14). $m=1$ 时 $m=f_2$ 是惟一的表示,所以 $f_{2-1}=f_1$ 的值惟一. 设对 $<m$ 之自然数式(14)已成立. 今分别考察下列情况:

$k_1=j_1$ 时,则有 $f_{k_2}+\cdots+f_{k_r}=f_{j_2}+\cdots+f_{j_s}<m$,依归纳假设有

$$f_{k_2-1}+\cdots+f_{k_r-1}=f_{j_2-1}+\cdots+f_{j_s-1}$$

两边同加 $f_{k_1-1}=f_{j_1-1}$ 即得所证.

$k_1\neq j_1$ 时,不妨设 $k_1>j_1$. 此时仿定理2之证明可知,必有 $j_1=k_1-1$. 下面再分三种情形考虑:

i) $k_2=k_1-1$ 时,则 $k_2=j_1$,此时仿 $k_1=j_1$ 之情形可证.

ii) $k_2=k_1-2$ 时,则式(13)化为

$$2f_{k_2}+f_{k_3}+\cdots+f_{k_r}=f_{j_2}+\cdots+f_{j_s}$$

因为 $j_2\leqslant j_1-1=k_1-2=k_2$,而且 $j_2<k_2$ 不成立,所以 $j_2=k_2$. 故得

$$f_{k_2}+f_{k_3}+\cdots+f_{k_r}=f_{j_3}+\cdots+f_{j_s}<m$$

由归纳假设有

$$f_{k_2-1}+\cdots+f_{k_r-1}=f_{j_3-1}+\cdots+f_{j_s-1}$$

两边同加 $f_{k_1-1}=f_{j_1}=f_{j_1-1}+f_{j_1-2}=f_{j_1-1}+f_{j_2-1}$,即证.

iii) $k_2<k_1-2$ 时,式(13)可化为

$$f_{k_1-2}+f_{k_2}+\cdots+f_{k_r}=f_{j_2}+\cdots+f_{j_s}<m$$

由归纳假设有

$$f_{k_1-3}+f_{k_2-1}+\cdots+f_{k_r-1}=f_{j_2-1}+\cdots+f_{j_s-1}$$

两边同加 $f_{k_1-1}-f_{k_1-3}=f_{k_1-2}=f_{j_1-1}$ 即证. 综上,式(14)已获证明. 至于式(15)之证明,完全可仿上进行,只是在利用归纳假设时作相应改变而已. 定理证毕.

由定理5可以得到:

定理6 在定理4中定义的正整数对 (a_n,b_n) 对于每个 n 是惟一确定的,且具有下列性质:

i) a_n 和 b_n 均分别为严格递增的;

ii) $b_n=a_n+n$;

iii) 对每个自然数 N,均存在自然数 n,使得 $N=a_n$ 或 $N=b_n$,但不存在 $m\neq n$,使 $N=a_m=b_n$.

证明 惟一确定性已由定理5得证. 下证诸性质. 其中 i) 和 ii) 由定义显然可得. 只证 iii). 因 a_n 之值与 $n-1$ 的F表示的选择无关,故可设式(10)为标准

表示.若 $k_r \geqslant 3$,则式(11)已是 a_n 之标准 F 表示.若 $k_r = 2$.则必存在 i,$1 \leqslant i \leqslant r$,使得

$$n - 1 = f_{k_1} + \cdots + f_{k_{r-i}} + f_{2i} + f_{2i-2} + \cdots + f_2$$

且 $k_{r-i} > 2i + 2$(当 $i < r$),或 $n - 1 = f_{2i} + f_{2i-2} + \cdots + f_2$(当 $i = r$).

于是由(11)相应地有

$$a_n = f_{k_1+1} + \cdots + f_{k_r-i+1} + f_{2i+1} + f_{2i-1} + \cdots + f_7 + f_5 + f_3 + f_2 =$$

$$f_{k_1+1} + \cdots + f_{k_{i-1}+1} + f_{2i+2} \qquad (\text{Ⅰ})$$

或

$$a_n = f_{2i+2} \qquad (\text{Ⅱ})$$

以上均为 a_n 之标准 F 表示,其特点是表示式中最小加项之下标为偶数.同理可证 b_n 之标准 F 表示中,其最小加项之下标为奇数.由标准表示之惟一性知,任何 $a_n \neq b_n$.对于任何自然数 $N > 1$,若其标准 F 表示中最小项之下标为偶数,则其表示式必为(Ⅰ)或(Ⅱ)之右边的形式,或为(11)右边($k_r \geqslant 3$)的形式.由此仿上述证明逆推之可得

$$N - f_2 = f_{k_1+1} + \cdots + f_{k_r+1}$$

为标准 F 表示,且 $k_r \geqslant 2$.于是取

$$n = f_{k_1} + \cdots + f_{k_r+1}$$

时,则由式(10)及(11)可得 $N = a_n$.同理,当 $N > 1$ 且其标准 F 表示中最小项之下标为奇数时,必存在 n 使 $N = b_n$.又 $N = 1$ 时显然.证毕.

下面给出定理 4 的证明:

$n = 1$,显然.$n > 1$ 时,只要证 a_n 为未在 $(a_1, b_1), \cdots, (a_{n-1}, b_{n-1})$ 中出现过的最小正整数即可.设这个最小正整数为 N.则 $N > 1$.若 $a_n \neq N$,则由严格递增性知 $a_n > N$,而更有 $b_n = a_n + n > N$,于是再由严格递增性知 N 不在任何 (a_n, b_n) 中出现,这与定理 6 之 iii)矛盾.证毕.

由上述定理又可立即得到下面的:

定理 7 全体 Wythoff 对 (a_n, b_n) 将 $\mathbf{Z}^+$ 划分为两类:$\mathbf{Z}^+ = Z_1 \cup Z_2$,其中,$Z_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}$,$Z_2 = \{b_1, b_2, \cdots\}$,$Z_1$(或 Z_2)中每个数的标准 F 表示中最小加项之下标为偶数(或相应地为奇数).

定理 8 正整数对 $(a_n, b_n)(n = 1, 2, \cdots)$ 构成全部 Wythoff 对的充要条件是定理 6 的条件 i) ~ iii) 满足.

Wythoff 对还有一个有趣的性质,就是与所谓"黄金分割数"$(1 + \sqrt{5})/2$ 有密切的联系,即有(Carlitz[12]):

定理 9 设 $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$,则对 $n \in \mathbf{Z}^+$,$a_n = [n\tau]$ 和 $b_n = [n\tau^2]$ 构成 Wythoff 对.

证明　只要证定理6的条件 i) - iii) 满足即可. 因为 $\tau > 1$,所以 i) 显然. 又 $b_n = [n(\tau + 1)] = [n\tau] + n = a_n + n$,所以 ii) 满足. 下证 iii). 先证对任何整数 $m > 1$ 有

$$[[m/\tau]\tau] = m - 1 \tag{16}$$

或

$$[[m/\tau^2]\tau^2] = m - 1 \tag{17}$$

若不然,则由 $[m/\tau]\tau < m$ 及 $[m/\tau^2]\tau^2 < m$ 知,必有

$$[m/\tau]\tau < m - 1 \quad 且 \quad [m/\tau^2]\tau^2 < m - 1$$

于是 $[m/\tau] + [m/\tau^2] < (m-1)/\tau + (m-1)/\tau^2 = m - 1$. 另一方面, $[m/\tau] + [m/\tau^2] \geqslant [m/\tau + m/\tau^2] - 1 = m - 1$. 此乃矛盾. 故式(16)和式(17)必有一成立. 对任一自然数 N,令 $m = N + 1$. 当式(16)成立时取 $n = [m/\tau]$,则得 $N = a_n$,当式(17)成立时取 $n = [m/\tau^2]$,则得 $N = b_n$.

剩下要证明的是,不存在 m, n 使 $[m\tau] = [n\tau^2]$. 反设有 $[m\tau] = [n\tau^2] = k$,则有

$$m\tau - 1 < k < m\tau \quad 且 \quad n\tau^2 - 1 < k < n\tau^2$$

两不等式各边分别除以 τ 和 τ^2,然后相加得

$$m + n - 1 < k < m + n$$

此显然不可能. 证毕.

由定理9可进一步得到 Wythoff 对的一些恒等性质.

定理10　Wythoff 对 (a_n, b_n) 适合下列恒等式:

i) $a_{b_n} = a_n + b_n$　且　$b_{b_n} = a_n + 2b_n$　(18)

ii) $a_{a_n} = b_n - 1$　且　$b_{a_n} = a_n + b_n - 1$　(19)

iii) $a_{m+1} - a_m = 2$(当 $m = a_n$)或 1(当 $m = b_n$)　(20)

iv) $b_{m+1} - b_m = 3$(当 $m = a_n$)或 2(当 $m = b_n$)　(21)

证明　i) 前一式即要证

$$[[n\tau^2]\tau] = [n\tau] + [n\tau^2] = 2[n\tau] + n \tag{22}$$

设 $n\tau = [n\tau] + \varepsilon_n$,则 $0 < \varepsilon_n < 1$,又 $0 < \tau - 1 < 1$,所以

$$[[n\tau^2]\tau] = [[n(\tau + 1)]\tau] = [([n\tau] + n)\tau] = [(n\tau - \varepsilon_n + n)\tau] =$$
$$[2n\tau + n - \varepsilon_n\tau] = [2(n\tau - \varepsilon_n) + (2 - \tau)\varepsilon_n] + n = 2[n\tau] + n$$

后一式由 $b_{b_n} = a_{b_n} + b_n$ 即证.

ii) 只证前一式,即要证

$$[[n\tau]\tau] = [n\tau^2] - 1 = [n\tau] + n - 1 \tag{23}$$

因为

$$[[n\tau]\tau] = [(n\tau - \varepsilon_n)\tau] = [n\tau^2 - \varepsilon_n\tau] =$$
$$[n\tau + n - \varepsilon_n\tau] = [(n\tau - \varepsilon_n) - (\tau - 1)\varepsilon_n] + n =$$
$$[n\tau] + n - 1$$

故证.

iii) $m = a_n = [n\tau]$ 时,利用 i),ii) 之结果有

$$a_{m+1} = [([n\tau]+1)\tau] = [(n\tau - \varepsilon_n + 1)\tau] =$$
$$[n\tau + n - \varepsilon_n\tau + \tau] = [n\tau] + 1 + n = a_m + 2$$

所以
$$a_{m+1} - a_m = 2$$

$m = b_n = [n\tau^2] = [n\tau] + n$ 时可相仿证之.

iv) $b_{m+1} - b_m = (a_{m+1} + m + 1) - (a_m + m)$,然后利用 iii) 之结果即证.

自然数的 F 表示问题有如下一些方面的推广:1968 年,Klarner[15] 提出了用 $\{f_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ 同时表示两个非负整数的问题,并证明了,给定两个非负整数 M 和 N,存在一个整数集 $\{k_1,\cdots,k_r\}$,使得同时有

$$M = f_{k_1} + \cdots + f_{k_r} \quad 和 \quad N = f_{k_1+1} + \cdots + f_{k_r+1}$$

并且 $i \neq j$ 时 $|k_i - k_j| \geqslant 2$.

1979 年,Hoggatt 等[16] 推广了 Wythoff 的对策问题,并提出了广义 Wythoff 对的概念. 1985 年,Bicknell - Johnson[16] 把广义 Wythoff 对应用到了 Klarner 所提出的推广的 F 表示法中.

1972 年,Carlitz 等[10] 提出了自然数的 Lucas 表示(或 L 表示)问题,即把一个自然数 N 表示为正的互异的 Lucas 数之和的问题. 而所谓 N 的标准 L 表示指用 Lucas 序列 $\{l_n\}_0^\infty$ 中的项把 N 表示为

$$N = l_{k_1} + \cdots + l_{k_r} \tag{24}$$

且 i) $k_{i+1} \leqslant k_i - 2(i = 1,\cdots,r-1)$; (25)

ii) 若 $k_r = 0$,则 $k_{r-1} \geqslant 3$. (26)

不难证明,对于自然数的 L 表示,也有与定理 1 相仿的结果,其他一些结果也是如此. 故为节省篇幅,我们只以 F 表示作为代表.

1.2　F 表示中的加项个数

设自然数 N 的标准 F 表示为(1),其中加项的个数 r 记为 $F(N)$. $F(N)$ 也代表 N 所对应的二元码(5)中 1 的个数. 求 $F(N)$ 的问题由于有其实际意义,引起许多人的兴趣. 1952 年,Lekkerkerker[7] 对于从 f_n 到 $f_{n+1}-1$ 之间的数的标准 F 表示的加项数之和

$$\zeta(n) = \sum_{i=f_n}^{f_{n+1}-1} F(i) \tag{27}$$

作了一个估计,他证明了

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(n+1)/(nf_n) = (5-\sqrt{5})/10 \tag{28}$$

1983 年,Pihko[18] 给出了一个完全而准确的结果:

定理 11　设 $\zeta(n)$ 之意义如式(27),则

$$\zeta(n)=(f_n+nl_{n-2})/5(l_n \text{ 为 Lucas 数}) \tag{29}$$

证明　当 $m<f_n$ 时,显然有

$$F(f_n+m)=1+F(m)$$

所以

$$\zeta(n)=\sum_{m=0}^{f_{n+1}-1}F(f_n+m)=f_{n-1}+\sum_{m=1}^{f_{n-1}-1}F(m)$$

同理

$$\zeta(n+1)=f_n+\sum_{m=1}^{f_n-1}F(m)$$

则

$$\zeta(n+1)-\zeta(n)=f_{n-2}+\sum_{m=f_{n-1}}^{f_n-1}F(m)$$

即得

$$\zeta(n+1)-\zeta(n)-\zeta(n-1)=f_{n-2} \tag{30}$$

显然有初始条件

$$\zeta(2)=\zeta(3)=1 \tag{31}$$

令 $\alpha,\beta=(1\pm\sqrt{5})/2$,可知非齐次递归方程(30)有形如 $\zeta(n)=\lambda n\alpha^{n-1}$ 和 $\mu n\beta^{n-1}$ 之特解.实际代入可求得 $\lambda=1/(\sqrt{5}(\alpha+2))$ 和 $\mu=-1/(\sqrt{5}(\beta+2))$,于是通解为

$$\begin{aligned}\zeta(n)&=c_1\alpha^n+c_2\beta^n+n(\alpha^{n-1}/(\alpha+2)-\beta^{n-1}/(\beta+2))/\sqrt{5}=\\&\quad c_1\alpha^n+c_2\beta^n+nl_{n-2}/5\end{aligned}$$

以初始条件代入上式得 $c_1=-c_2=1/(5\sqrt{5})$,于是上式化为式(29).证毕.

从式(29)可以立即推式(28).在[17]中 Pihko 还把式(28)的结果推广到了一类更广泛的所谓 A—序列.1988年,Pihko[19] 对 F 表示和 L 表示中的所谓极大(小)表示的数字和进行了研究,得出了类似于上述的结果.另一方面,1986年,Coquet 和 Bosch[20] 对平均阶 $\frac{1}{N}\sum_{0\leqslant n<N}F(n)$ 进行了估计,而1989年,Pethö 和 Tichy[21] 进一步把上述结果推广到了高阶 F－L 序列的情形.设 $w\in\Omega_k(a_1,\cdots,a_k)$,$a_1\geqslant a_2\geqslant a_k>0$,$w_0=1$,$w_i>a_1(w_0+\cdots+w_{i-1})(i=1,\cdots,k-1)$.对自然数 n,$w_l\leqslant n<w_{l+1}(l\geqslant 0)$,定义 n 的 w 表示如下:

$$n=\sum_{j=0}^{l}\varepsilon_j w_j \tag{32}$$

其中

$$\varepsilon_j=[n_j/w_j]\qquad \varepsilon_0=n_0 \tag{33}$$

而

$$n_{j-1}=n_j-\varepsilon_j w_j(1\leqslant j\leqslant l)\qquad n_l=n \tag{34}$$

定义

$$S(n)=\sum_{j=0}^{l}\varepsilon_j \tag{35}$$

Pethö 和 Tichy 证明了

$$\frac{1}{N}\sum_{n<N}S(n)=c\cdot \lg N+\psi(\lg N/\lg\alpha_1)+O(\lg N/N) \tag{36}$$

其中 c 为仅与 w 有关的正常数，ψ 为仅与 w 有关的周期为 1 的有界函数，α_1 为 w 的主特征根.

对于一般的自然数 N，求 $F(N)$ 的表达式是一个困难问题. 1988 年，Freitag 和 Filipponi[22] 给出了如下一种方法：对任何 $N > 1$，必存在 $n > 1$ 使 $N \mid f_n$（比如取 n 为 N 在 f 中的出现秩）. 令 $f_n/N = d$，则 $N = f_n/d$，因而 $F(N) = F(f_n/d)$. 对于 $2 \leqslant d \leqslant 20$ 及适合一定条件的 n，他们给出了 $F(f_n/d)$ 的明显表达式，但其叙述与证明均较长（共 20 个定理）. 我们下面将提出较一般的结果，而选取他们的结果作为具体例子.

定理 12 两个 Fibonacci 数之差的标准 F 表示及加项数如下：

$$F(f_{2m}-f_{2n}) = F\left(\sum_{i=n}^{m-1} f_{2i+1}\right) = m-n \quad (m > n > 0) \tag{37}$$

$$F(f_{2m+1}-f_{2n+1}) = F\left(\sum_{i=n+1}^{m} f_{2i}\right) = m-n \quad (m > n \geqslant 0) \tag{38}$$

$$F(f_{2m}-f_{2n+1}) = F\left(\sum_{i=n+1}^{m-1} f_{2i+1} + f_{2n}\right) = m-n-\delta(n,0) \quad (m > n \geqslant 0) \tag{39}$$

$$F(f_{2m+1}-f_{2n}) = F\left(\sum_{i=n+1}^{m} f_{2i} + f_{2n-1}\right) = m-n+1 \quad (m \geqslant n > 0) \tag{40}$$

其中 $\delta(x,y)$ 为 Kronecker 函数.

证明 显然有

$$f_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} f_{2i+1} \quad 及 \quad f_{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i} \quad (n > 0) \tag{41}$$

以之代入定理中各式的左边即得所证.

推论 1 $F(f_m - f_n) = [(m-n+1)/2] + \delta(n,1)[1+(-1)^m]/2$

$$(m > n > 0) \tag{42}$$

定理 13 对于 Fibonacci 数和 Lucas 数有

$$F(f_m l_{2n}) = F(f_{m+2n} + f_{m-2n}) = 2 \quad (m > 2n > 0) \tag{43}$$

$$F(f_m l_0) = F(2f_m) = F(f_{m+1} + f_{m-2}) = 2 \quad (m > 2) \tag{44}$$

$$F(f_{2m+1} l_{2n+1}) = F\left(\sum_{i=m-n}^{m+n} f_{2i+1}\right) = 2n+1 \quad (m > n \geqslant 0) \tag{45}$$

$$F(f_{2m} l_{2n+1}) = F\left(\sum_{i=m-n}^{m+n} f_{2i}\right) = 2n+1 \quad (m > n \geqslant 0) \tag{46}$$

$$F(l_{2m} f_{2n}) = F\left(\sum_{i=m-n}^{m+n-1} f_{2i+1}\right) = 2n \quad (m > n > 0) \tag{47}$$

$$F(l_{2m+1} f_{2n}) = F\left(\sum_{i=m-n+1}^{m+n} f_{2i}\right) = 2n \quad (m \geqslant n > 0) \tag{48}$$

$$F(l_m f_{2n+1}) = F(f_{m+2n+1} + f_{m-2n-1}) = 2 \quad (m > 2n+1 \geqslant 0) \tag{49}$$

$$F(l_m f_1) = F(l_m) = F(f_{m+1} + f_{m-1}) = 2 \quad (m > 1) \tag{50}$$

推论 2 $F(f_m l_n) = 1 + (-1)^n + n[1-(-1)^n]/2(m > n \geqslant 0)$ (51)

$$F(l_m f_n) = 1 - (-1)^n + n[1+(-1)^n]/2(m > n > 0) \tag{52}$$

定理 14 i) 若 $s \geqslant 3, k \geqslant 1$, N 的标准 L 表示中最大项之下标 $\leqslant s-2$, 则

$$F(f_{2sk-s}N) = F(f_s N) \tag{53}$$

ii) 若 $s \geqslant 3, k \geqslant 2$, N 的标准 F 表示中最大项之下标 $\leqslant s-2$, 则

$$F(l_{sk-s}N) = F(l_s N) \tag{54}$$

iii) 若 $s \geqslant 2, k \geqslant 4$, N 的标准 F 表示中最大项之下标 $\leqslant 2s-2$, 则

$$F(l_{sk-2s}N) = F(l_{2s}N) \tag{55}$$

证明 i) 设 N 的标准 L 表示为

$$N = l_{k_1} + \cdots + l_{k_r} \quad (k_1 > \cdots > k_r)$$

记 $2sk - s = \tau$, 则

$$f_\tau N = \sum_{i=1}^{r} f_\tau l_{k_i} = \sum [f_{\tau+k_i} + (-1)^{k_i} f_{\tau-k_i}] =$$
$$f_{\tau+k_1} + \cdots + f_{\tau+k_r} + (-1)^{k_r} f_{\tau-k_r} + \cdots +$$
$$(-1)^{k_2} f_{\tau-k_2} + (-1)^{k_1} f_{\tau-k_1} \tag{Ⅰ}$$

当 $k_r \neq 0$ 时, 若 $k_1, \cdots, k_r$ 均为偶数, 则由已知条件知(Ⅰ)为 $f_\tau N$ 之标准 F 表示, 因而 $F(f_\tau N) = 2r$. 若 $k_1, \cdots, k_r$ 中有奇数, 但其中不存在 i 使 k_i 和 k_{i+1} 均为奇数, 则将(Ⅰ)之右边适当添括号以后, 负数项将全部出现在形如 $[f_{\tau-k_{i+1}} - f_{\tau-k_i}]$ 的括号之中. 将这样每个括号按定理 12 作标准 F 表示以后, (Ⅰ)就化为 $f_\tau N$ 的标准 F 表示. 由已知, $\tau - k_1 \geqslant 2$, 故不会有 $\tau - k_i = 1$ 之情况. 因而依(42), 对每个这种括号有

$$F(f_{\tau-k_{i+1}} - f_{\tau-k_i}) = [(k_i - k_{i+1} + 1)/2]$$

由此可知, $k_r \neq 0$ 时 $F(f_\tau N)$ 之值与 τ 无关, 从而与 k 无关.

当 $k_r = 0$ 时, 由标准 L 表示之定义, 必有 $k_{r-1} \geqslant 3$. 利用(44), (Ⅰ)可化为

$$f_\tau N = f_{\tau+k_1} + \cdots + f_{\tau+k_{r-1}} + f_{\tau+1} + f_{\tau-2} +$$
$$(-1)^{k_{r-1}} f_{\tau-k_{r-1}} + \cdots + (-1)^{k_1} f_{\tau-k_1}$$

若 $k_{r-1} > 3$, 则上式中各相邻项下标相差至少为 2, 可仿前讨论得 $F(f_\tau N)$ 之值与 k 无关. 若 $k_{r-1} = 3$, 则可化 $f_{\tau-2} - f_{\tau-3} = f_{\tau-4}$. 又若 $k_{r-2} = 5$, 则又化 $f_{\tau-4} - f_{\tau-5} = f_{\tau-6}, \cdots$, 如此继续, 最后必化为各相邻项下标相差至少为 2 的情形, 从而也可证得 $F(f_\tau N)$ 之值与 k 无关.

若存在 i，使 k_i 和 k_{i+1} 均为奇数，则可利用 $-f_m-f_n=-f_{m+1}+(f_{m-1}-f_n)$ 及适当地添括号可化为已讨论过的情况.

综上，取 $k=1$，即得所证.

ii) 和 iii) 完全可仿 i) 证之，而且更简单一些，因为在 N 的 F 表示中不会出现下标为 0 的情形.

在以下的讨论中，恒约定 $d>1$，且简记 $\sigma(d,f)=w(d)=w$.

定理 15　若 $2\parallel\omega=\omega(d)$，$d\mid l_{\omega/2}$，则

$$F(f_{\omega k}/d)=F(f_{\omega/2}l_{\omega/2}/d)k \tag{56}$$

证明　设 $\omega=2s$，$2\nmid s$，则 $f_{2sk}-f_{2sk-2s}=f_{2sk-s}l_s$，由此

$$f_{\omega k}/d=f_{2sk}/d=f_{2sk-s}N+f_{2s(k-1)}/d$$

其中 $N=l_s/d$. 显然 $\omega>2$，又已知 $2\parallel\omega$，则 $\omega\geqslant6$，$s\geqslant3$ 又 $N<2l_{s-1}/2=l_{s-1}$，则 N 之标准 L 表示中最大项下标 $k_1\leqslant s-2$. 根据(53) 之推证过程及定理 12，$f_{2sk-s}N$ 之标准 F 表示中最小项的下标 $\geqslant 2sk-s-k_1-1\geqslant 2s(k-1)+1$，它显然比 $f_{2s(k-1)}/d$ 之标准 F 表示中最大项之下标至少大 2，故有

$$F(f_{2sk}/d)=F(f_sN)+F(f_{2s(k-1)}/d)$$

此为关于 k 之一阶递归方程，解得

$$F(f_{2sk}/d)=F(f_sN)k$$

即证.

定理 16　若 $2\mid\omega=\omega(d)$，则

$$F(f_{\omega k}/d)=F(l_\omega f_\omega/d)[k/2]+F(f_\omega/d)[1-(-1)^k]/2 \tag{57}$$

证明　利用 $f_{\omega k}-f_{\omega k-2\omega}=l_{\omega k-\omega}f_\omega$ 及(54) 可得

$$F(f_{\omega k}/d)=F(l_\omega f_\omega/d)+F(\omega(k-2)/d)$$

再由对应于 $k=1,2$ 时的初始条件分别解得

$$F(f_{\omega 2k}/d)=F(l_\omega f_\omega/d)k$$

及

$$F(f_{\omega(2k+1)}/d)=F(l_\omega f_\omega/d)k+F(f_\omega/d)$$

即证.

[注]此定理包含了定理 15 的结果. 事实上，当 $2\parallel\omega$，$d\mid l_{\omega/2}$ 时可能直接验证式(57) 和式(56) 之右边相等.

定理 17　若 $2\nmid\omega=\omega(d)$，则

$$F(f_{\omega k}/d)=F(l_{2\omega}l_\omega f_\omega/d)[k/4]+F(f_{\omega\tau_k}/d) \tag{58}$$

其中 τ_k 为 k 的模 4 最小非负剩余，并规定 $F(0)=0$.

证明　利用 $f_{\omega k}-f_{\omega k-4\omega}=l_{\omega k-2\omega}f_{2\omega}$ 及(55) 可得

$$F(f_{\omega k}/d)=F(l_{2\omega}f_{\omega k}/d)+F(f_{\omega(k-4)}/d)$$

结合 $k=1,2,3,4$ 时之初始值可分别解得

$$F(f_{\omega 4k}/d)=F(l_{2\omega}f_{2\omega}/d)k$$

$$F(f_{\omega(4k+1)}/d)=F(l_{2\omega}f_{2\omega}/d)k+F(f_{\omega}/d)$$

$$F(f_{\omega(4k+2)}/d)=F(l_{2\omega}f_{2\omega}/d)k+F(f_{2\omega}/d)$$

$$F(f_{\omega(4k+3)}/d)=F(l_{2\omega}f_{2\omega}/d)k+F(f_{3\omega}/d)$$

即证.

对于式(58),在计算过程中,我们可以利用 $f_{2\omega}=f_{\omega}l_{\omega}$,$f_{3\omega}=(l_{2\omega}-1)f_{\omega}$ 等公式以简化计算.定理14的证明过程实际上为我们运用定理15～17提供了具体的计算方法.

例1 $d=19$ 时,$\omega=18$,$2\parallel\omega$,且 $d\mid l_9=76$,故利用(56)较为简便.此时 $F(f_9l_9/19)=F(4f_9)=F(f_9l_3)=3$(根据45)所以

$$F(f_{18k}/19)=3k$$

例2 $d=18$ 时,$\omega=12$,此时只能用式(57).因 $F(l_{12}f_{12}/18)=F(8l_{12})=F(l_{12}f_6)=6$(根据式(47),$F(f_{12}/18)=F(f_6)=1$),所以

$$F(f_{12k}/18)=6\cdot[k/2]+[1-(-1)^k]/2=3k(\text{当 } 2\mid k)$$

$$\text{或 } 3k-2(\text{当 } 2\nmid k)$$

例3 $d=17$ 时,$\omega=9$,此时只能用(58).我们有

$F(l_{18}l_9f_9/17)=F(2l_{18}l_9)=F(l_{18}\cdot l_9f_3)=F(l_{18}(f_{12}+f_6))=F(f_{30}-f_6+f_{24}-f_{12})=F(f_{30}+f_{24}-(f_{13}-f_{11})-f_6)=F(f_{30}+(f_{24}-f_{13})+(f_{11}-f_6))=1+[(24-13+1)/2]+[(11-6+1)/2]=10$(根据式(42),又 $F(f_9/17)=F(2)=1$,$F(f_{18}/17)=F(l_9f_3)=2$,$F(f_{27}/17)=F(2(l_{18}-1))=F(l_{18}f_3-f_3)=F(f_{21}+(f_{15}-f_3))=1+6=7$.

所以 $F(f_{9k}/17)=10\cdot[k/4]+\delta_k$,$\delta_k=0,1,2,7$,依 $k\equiv 0,1,2,3\pmod 4$ 而定.

以上几例均与[21]之结果相吻合,其他例子便不再赘述.另外,上文的同样两位作者还在1989年研究了 $F(f_n^2/d)$ 与 $F(l_n^2/d)$ 的值,对于 $F(f_{kn}^2/f_n)$,$F(f_{2kn}^2/l_n)$,$F(l_{kn}^2/l_n)$ 等情况得出了一般公式并指出了相应表示法.其基本方法是利用 Fibonacci 数的和的恒等式.有兴趣的读者可参看[23].

1.3 两个 Fibonacci Nim

对策Ⅰ 有一堆棋子,甲、乙二人轮流从中取子.甲先取,他至少要取一个,但不准取完全堆.以后每人每次也至少要取一个,但不能超过对方刚才那次所取数的两倍.谁使剩余棋子数变为0则为胜者.

像上述这种形式的对策,很早就在中国的民间游戏中流传,旧名"拧法",广东话称之为"翻摊",在十九世纪末叶开始传入欧洲,Nim 大概就是"拧"的音

译[24]. Nim属于一种更广泛的累加式有限对策[25]，但Nim本身又有许多类型和特殊的解法.

对策Ⅰ是Whinihan 1963年根据自然数的F表示设计的[26]. 他的目的是，如果棋子总数N不是一个Fibonacci数，那么乙总无法拿光棋子，而只能由甲拿光. 事实上，设N的标准F表示为$N = f_{k_1} + \cdots + f_{k_r}$，$k_1 > \cdots > k_r \geqslant 2$，且$r \geqslant 2$. 甲首先取$f_{k_r}$个棋子. 按(6)，$f_{k_{r-1}} > 2f_{k_r}$，因此乙所取数$x < f_{k_{r-1}}$，故乙不能取光棋子. 设$f_{k_{r-1}} - x$的标准F表示为$f_{k_{r-1}} - x = f_{m_1} + \cdots + f_{m_t}$，则

$$N - x = f_{k_1} + \cdots + f_{k_{r-2}} + f_{m_1} + \cdots + f_{m_t}$$

也为标准F表示. 因$N' = f_{k_{r-1}} - x < f_{k_{r-1}}$，故由(7)，$f_{m_t} < 2(f_{k_{r-1}} - N') = 2x$，于是甲可取去$f_{m_t}$个棋子. 若$N - x$的F表示中只有$f_{m_t}$一项，则甲已取光而获胜. 否则，$N - x$的F表示中至少两项，甲取去$f_{m_t}$个后，乙面对上次同样的形势，无法取光棋子. 如此继续，因棋子总数有限，故必最后由甲取光棋子而获胜.

但当棋子总数$N = f_n \geqslant 2$，则若乙是明智者时甲必败. 事实上，因$f_n - f_{n-2} = f_{n-1} < 2f_{n-2}$，如果甲取$x \geqslant f_{n-2}$个，则乙可取完剩下棋子；如果甲取$x < f_{n-2}$个，则$f_{n-1} < f_n - x < f_n$，因而$f_n - x$非Fibonacci数，由前面的讨论知乙必胜.

对策Ⅱ 设有两堆棋子，甲、乙二人轮流取子. 每人每次可以从一堆中取任意个或从两堆中各取同样多个，每次至少取一个. 谁使剩下棋子数变为0则为胜者.

此对策首先由Wythoff于1907年提出，1958年，Isaacs[27]以另一种形式(移动平面上的格点)重新发现. 1967年，Kenyon[28]指出上述两种形式是等价的，并指出这种游戏在中国早已出现. 下面分析其解法.

以数对(a, b)(我们称为点)表每次取过后两堆剩下的棋子数，而且始终以a表较少的一堆棋子数(在取的过程中哪一堆较少是不固定的). 解法的基本思想与对策Ⅰ相仿，就是甲设法采取一种取法，使得甲每次取过后，乙总无法取光剩下的棋子. 假设对策从点(a, b)开始，并设它不是一个Wythoff对(以下简称w对). 若$ab = 0$或$a = b$，则甲可取光全部棋子. 否则，我们证明甲有一种取法，使(a, b)变为一个w对. 由定理6，存在一个w对(a_n, b_n)，使$a = a_n$或$a = b_n$. 分下列情况讨论：

$a = b_n$时，则$b > a = b_n > a_n$，因此只要从b个棋子中取去$b - a_n$个，则得点(a_n, b_n).

$a = a_n$时，若$b > b_n$，则甲从b个棋子中取去$b - b_n$个即可. 若$b < b_n$，因$b_n = a_n + n$，故必有$b = a_n + r$，$0 < r < n$. 今考察w对(a_r, b_r)，设$k = a_n -$

a_r，则$(a,b)=(a_r+k,a_r+k+r)=(a_r+k,b_r+k)$. 于是甲从每堆各取 k 个棋子即可.

现在乙面临一个 w 对(a_m,b_m)，他无论怎样取，必变为(a_m-x,b_m)，(a_m,b_m-x)，(a_m-x,b_m-x)三种形式的点之一，显然这些点既不是(0,0)，也不是 w 对. 于是甲又可把它变成(0,0) 或 w 对. 如此继续，经有限步后甲必胜.

§2　F－L连分数

2.1　Fibonacci 连分数

上节是自然数的 F 表示，本节实际上是某些实数的 F－L 表示(通过连分数).

由 $f_{n+1}/f_n=(f_n+f_{n-1})/f_n=1+1/(f_n/f_{n-1})$ 逐步迭代可得

$$f_{n+1}/f_n=1+\frac{1}{1}{}_{+}\frac{1}{1}{}_{+}\cdots{}_{+}\frac{1}{1}\quad(n\geqslant 1)$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}(f_{n+1}/f_n)=\tau=(1+\sqrt{5})/2$，所以我们得到的连分数展开式.

定理 18
$$\tau=1+\frac{1}{1}{}_{+}\frac{1}{1}{}_{+}\cdots\tag{59}$$
且 f_{n+1}/f_n 为其第 $n-1$ 个渐近分数.

从连分数理论知，分母不大于 f_n 之有理分数中以 f_{n+1}/f_n 最接近 τ，故我们利用 Fibonacci 序列迅速找到了 τ 的最佳渐近分数. 我们下面研究 f_{n+1}/f_n 逼近 τ 的方式和程度.

定理 19　i) $f_{2n}/f_{2n-1}<f_{2n+2}/f_{2n+1}<\cdots<\tau<\cdots<f_{2n+3}/f_{2n+2}<f_{2n+1}/f_{2n}$　(60)

ii) 在 τ 的任何两个相邻的渐近分数中至少有一个适合
$$|\tau-f_{n+1}/f_n|<1/(\sqrt{5}f_n^2)\tag{61}$$

证明　i) 在证明定理 12 的过程中已证.

ii) 令 $\bar{\tau}=(1-\sqrt{5})/2$，则有

$(-1)^n=f_{n+1}^2-f_nf_{n+1}-f_n^2=(f_{n+1}-\tau f_n)\times(f_{n+1}-\bar{\tau}f_n)=(f_{n+1}-\tau f_n)\times(f_{n-1}+\tau f_n)$，所以 $|\tau-f_{n+1}/f_n|=1/(f_n^2\tau-f_{n-1}/f_n)$. 由(60) 知，$f_{n+1}/f_n$ 和 f_n/f_{n-1} 中必有一个小于 τ，不妨设 $f_n/f_{n-1}<\tau$，则 $f_{n-1}/f_n>1/\tau=\tau-1=-\bar{\tau}$，所以 $\tau+f_{n-1}/f_n>\tau-\bar{\tau}=\sqrt{5}$，由此即得所证者.

Hurwicz 曾证明任何正无理数 α 的二个连续渐近分数中至少有一个适合 $|\alpha-p/q|<1/2q^2$，三个连续渐近分数中至少有一个适合 $|\alpha-p/q|<1/\sqrt{5}q^2$，(61) 乃 Hurwicz 的结果之具体化和加强.

因为，$f_{n+1}/f_n-f_n/f_{n-1}=(f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2)/f_nf_{n-1}=(-1)^n/f_nf_{n-1}$，所以

f_{n+1}/f_n 又可作为下列无穷级数的近似值

$$\tau = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n/f_n f_{n-1} \tag{62}$$

又因为 $(f_{n+1}/f_n)(f_n/f_{n-1}) = (f_{n+1}f_{n-1})/f_n^2 = [f_n^2 + (-1)^n]/f_n^2 = 1 + (-1)^n/f_n^2$，所以 f_{n+1}/f_n 还可作为下列无穷乘积的近似值

$$\tau = \prod_{n=1}^{\infty}[1 + (-1)^{n+1}/f_{n+1}^2] \tag{63}$$

在数值分析的实际应用中，要求尽快使 f_{n+1}/f_n 之值逼近 τ. 这常可应用一种所谓"Aitken 加速法". 对序列 $\{x_n\}$，作变换

$$T_r(x_n) = (x_{n+r}x_{n-r} - x_n^2)/(x_{n+r} - 2x_n + x_{n-r}),\ 1 \leqslant r < n \tag{64}$$

这就是 Aitken 加速公式. 此公式右边的分子与二阶 F－L 序列恒等式一致，这使我们想到上述变换可能对 Fibonacci 序列产生一个好的结果. 事实上，1984 年，Phillips[29] 证明了：

定理 20 $T_r(f_{n+1}/f_n) = f_{2n+1}/f_{2n}$ (65)

证明 以 $x_n = f_{n+1}/f_n$ 代入(6)，则右边的分子为

$(f_{n+r+1}f_{n-r+1}f_n^2 - f_{n+r}f_{n-r}f_{n+1}^2)/(f_{n+r}f_{n-r}f_n^2) =$

$[(f_{n+r+1}f_{n-r+1} - f_{n+1}^2)f_n^2 - (f_{n+r}f_{n-r} - f_n^2)f_{n+1}^2]/(f_{n+r}f_{n-r}f_n^2) =$

$(-1)^{n+r}f_r^2(f_n^2 + f_{n+1}^2)/(f_{n+r}f_{n-r}f_n^2) =$

$(-1)^{n+r}f_r^2 f_{2n+1}/(f_{n+r}f_{n-r}f_n^2)$

又
$$x_n - x_{n-r} = (f_{n+1}f_{n-r} - f_{n-r+1}f_n)/(f_n f_{n-r}) =$$
$$(-1)^{n-r-1}f_r/(f_n f_{n-r})$$

在上式中以 $n + r$ 代 n 得

$$x_{n+r} - x_n = (-1)^{n-1}f_r/(f_{n+r}/f_n)$$

于是式(64)右边的分母为

$$(-1)^{n-r}f_r[f_{n+r} - (-1)^r f_{n-r}]/(f_{n+r}f_{n-r}f_n) =$$
$$(-1)^{n-r}f_r^2 l_n/(f_{n+r}f_{n-r}f_n) \tag{Ⅱ}$$

综合(Ⅰ)，(Ⅱ)即证得式(65).

我们还可用变换 T_r 连续作用而反复加速，[29]中证明了 $r = 1$ 时：

定理 21 $T_1^k(f_{n+1}/f_n) = f_{2^k n+1}/f_{2^k n}$. (66)

此公式容易利用式(65)以归纳法证之，证明从略.

Fibonacci 序列是 $\Omega(1,1)$ 中主序列，是否还有其他二阶 F－L 主序列与它的特征根的连分数具有类似的关系呢？Hardy 和 Wright 的书中曾研究一种更一般的情况，即：

定理 22 设 $a,c>0$，u 为 $\Omega_2(ac,c)$ 中主序列，$\alpha=(ac+\sqrt{(ac)^2+4c})/2$，则(令 $b=ac$)

i) $$\alpha=b+\frac{1}{a}\,\underset{+}{}\,\frac{1}{b}\,\underset{+}{}\,\frac{1}{a}\,\underset{+}{}\,\frac{1}{b}\cdots=[\dot{b},\dot{a}] \tag{67}$$

ii) 设 p_{n-1}/q_{n-1} 为 α 的第 $n-1$ 个渐近分数，则

$$p_{n-1}=u_{n+1}/c^{[n/2]}\qquad q_{n-1}=u_n/c^{[n/2]}$$

因而
$$u_{n+1}/u_n=p_{n-1}/q_{n-1} \tag{68}$$

证明 i) 显然. 对于 ii)，由 $q_0=1=u_1$，$q_1=a=u_2/c$，$p_0=b=u_2$，$p_1=ab+1=u_3/c$ 及 $u_{n+1}=acu_n+cu_{n-1}$，可用归纳法证之.

对于一般 $\Omega_2(a,b)$，如果其特征根 $\alpha>0$ 为无理数，则其连分数为周期的. 但其渐近分数与 Ω 中主序列相邻项之比有何种关系，目前尚未发现一般结果.

2.2 广义 Fibonacci 连分数

今考察 $\Omega_2(a,b)$，设其特征根 $\alpha=(a+\sqrt{\Delta})/2$ 和 $\beta=(a-\sqrt{-\Delta})/2$ 为无理数，且 $|\beta|<1$. 上一目中，我们是要求用简单连分数表示 α，本目我们将放宽为一般的连分数. 这对于用与 F-L 数有关的连分数表示 α 将开辟一个广阔的途径. 事实上，用这种连分数一般地还能表示 α 的幂. 首先，Eisenstein[30] 于 1984 年提出了用 Lucas 数 l_n 构造一个连分数表示 $\tau=(1+\sqrt{5})/2$ 的幂的问题. 这个问题于 1985 年为 Lord[30] 所解决，即证明了

$$\tau^n=l_n-\frac{(-1)^n}{l_n}\,\underset{-}{}\,\frac{(-1)^n}{l_n}\,\underset{-}{}\cdots \tag{69}$$

1988 年，Shannon 和 Horadam[31] 研究了一般情况，即用一般二阶 F-L 数 w_n 构造一般连分数(即称广义 Fibonacci 连分数)来表示 α 的幂. 我们下面介绍他们的结果，但所用方法有所不同.

引理 1 设连分数

$$a_0+\frac{b_1}{a_1}\,\underset{+}{}\,\frac{b_2}{a_2}\,\underset{+}{}\cdots\,\underset{+}{}\,\frac{b_k}{a_k}\,\underset{+}{}\cdots \tag{70}$$

的第 k 个渐近分数为 $x_k(k=0,1,\cdots)$，则 x_k 可表成 $x_k=p_k/q_k$，适合

i)
$$p_k=a_kp_{k-1}+b_kp_{k-2} \tag{71}$$
$$q_k=a_kq_{k-1}+b_kq_{k-2} \tag{72}$$

而
$$p_0=a_0,p_1=a_1a_0+b_1,q_0=1,q_1=a_1 \tag{73}$$

ii)
$$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k-1}b_k\cdots b_1 \tag{74}$$

因而
$$x_k-x_{k-1}=p_k/q_k-p_{k-1}/q_{k-1}=(-1)^{k-1}b_k\cdots b_1/q_kq_{k-1} \tag{75}$$

定理 23 设 $\Omega_2(a,b)$ 的特征根 α,β 为无理数，$|\beta|<1$，$w\in\Omega_2$ 有通项

$$w_n=\lambda\alpha^n+\mu\beta^n(\lambda>0) \tag{76}$$

令 $$d_n=\lambda\mu(-b)^n \tag{77}$$
若对某个 n 有 $d_n<0$，$w_n>0$，则
$$\lambda\alpha^n=w_n-\frac{d_n}{w_n-}\frac{d_n}{w_n-}\cdots \tag{78}$$

证明　根据引理1的记号有 $a_0=a_k=w_n>0$，$b_k=-d_n$，$k=1,2,\cdots$. 这时
$$p_k=w_np_{k-1}-d_np_{k-2} \tag{79}$$
$$q_k=w_nq_{k-1}-d_nq_{k-2} \tag{80}$$
而 $$p_0=w_n,p_1=w_n^2-d_n,q_0=1,q_1=w_n \tag{81}$$
又 $$x_k-x_{k-1}=(-1)^{k-1}(-d_n)^k/q_kq_{k-1} \tag{82}$$
$$x_k-x_{k-2}=(-1)^kw_n(-d_n)^{k-1}/q_kq_{k-2} \tag{83}$$

当 $d_n<0$，则由式(80)和式(81)可得 $q_k>0(k=0,1,\cdots)$. 于是由式(82)和式(83)得
$$x_0<x_2<\cdots<x_{2k-2}<x_{2k}<\cdots<x_{2k+1}<x_{2k-1}<\cdots<x_3<x_1$$
由此可知 $k\to\infty$ 时 $\lim x_{2k}$ 和 $\lim x_{2k-1}$ 均存在，且极限位于 x_0 和 x_1 之间. 于是又有 $\lim(x_k-x_{k-2})=0$，由此推出
$$\lim(-d_n)^k/q_kq_{k-2}=0$$

另一方面，由 $|\beta|=|a-\sqrt{\Delta}|/2<1$ 知必有 $a>0$. 否则 $|\alpha|\leqslant|\beta|<1$，导致 $|b|=|\alpha|\cdot|\beta|<1$，与 $b\in\mathbf{Z}$ 及 α,β 为无理数矛盾. 于是 $\alpha>0$，$\alpha=|b/\beta|>1$. 又由 $d_n=\lambda\alpha^n\cdot\mu\beta^n<0$ 知 $\mu\beta^n<0$.

再由式(80)，$q_k>w_nq_{k-1}\geqslant q_{k-1}>0$，于是又有
$$|x_k-x_{k-1}|<(-d_n)^k/q_kq_{k-2}\to 0\quad(k\to\infty)$$
故知 $k\to\infty$ 时 $\lim x_k=\zeta$ 存在. 也就是说，式(78)右边之连分数收敛于 ζ. 因而适合
$$\zeta=w_n-d_n/\zeta$$
即 $$0=\xi^2-w_n\xi+d_n=(\xi-\lambda\alpha^n)(\xi-\mu\beta^n)$$
所以 $$\xi=\lambda\alpha^n\text{ 或 }\mu\beta^n$$
但 $\xi>x_0=w_n>0>\mu\beta^n$，故必 $\xi=\lambda\alpha^n$. 定理得证.

Shannon 和 Horadam 实际上只推广了式(69)当 n 为奇数的情况. 下面我们补充一个结果，在此基础上可进一步推广上述两人的结果.

定理 24　在定理22的条件下，若 $d_n>0$，$w_n>0$，且 $\lambda\alpha^n\geqslant\mu\beta^n$，则(78)成立.

证明　由式(79)～(81)知，序列 $\{p_k\}$，$\{q_k\}$ 均属 $\Omega(w_n,-d_n)$，其特征根

综述

为 $\delta = \lambda\alpha^n, \theta = \mu\beta^n$，由已知条件可知 $\delta, \theta > 0$，当 $\delta > \theta$ 时，$\Omega(w_n, -d_n)$ 中主序列之通项为 $u_k = (\delta^k - \theta^k)/(\delta - \theta)$，于是

$$p_k = p_1 u_k - p_0 d_n u_{k-1} = (\delta^2 + \delta\theta + \theta^2) u_k - (\delta + \theta)\delta\theta u_{k-1}$$

$$q_k = q_1 u_k - q_0 d_n u_{k-1} = (\delta + \theta) u_k - \delta\theta u_{k-1}$$

因为 $k \to \infty$ 时

$$u_k / u_{k-1} = (\delta^k - \theta^k)/(\delta^{k-1} - \theta^{k-1}) = [\delta - \theta \cdot (\theta/\delta)^{k-1}]/[1 - (\theta/\delta)^{k-1}] \to \delta$$

故此时

$$p_k/q_k = [(\delta^2 + \delta\theta + \theta^2) u_k/u_{k-1} - (\delta + \theta)\delta\theta]/[(\delta + \theta) u_k/u_{k-1} - \delta\theta] \to [(\delta^2 + \delta\theta + \theta^2)\delta - (\delta + \theta)\delta\theta]/[(\delta + \theta)\delta - \delta\theta] = \delta$$

此即式(78)成立.

当 $\delta = \theta$ 时，$u_k = k\delta^{k-1}, u_{k-1} = (k-1)\delta^{k-2}$，$k \to \infty$ 时仍有 $u_k/u_{k-1} \to \delta$，因而也有 $p_k/q_k \to \delta$，故式(78)也成立.

[注]实际上，上述两定理的条件可统一归纳并放宽为 $w_n d_n \neq 0, |\lambda\alpha^n| \geqslant |\mu\beta^n|$，并且不必要求 α, β 为无理数. 修改后的定理可统一采用后一定理的证法证明之.

现在我们回过头来看式(70). $l_n = \tau^n + \bar{\tau}^n, \lambda = \mu = 1, d_n = (-1)^n$. n 为奇数时 $d_n < 0$，满足定理 22 的条件. n 为偶数时，$d_n > 0$，而 $\tau^n > \bar{\tau}^n$，故满足定理 24 的条件. 因而式(70)成立.

§3 F－L 整数的舍入函数表示

3.1 由特征根的幂产生的舍入函数

从前两节知道，一些实数能够用 F－L 整数表示，那么，一个相反的问题，怎样使 F－L 整数本身更简单表示出来，就自然地出现了. 这个问题既有理论意义，又有实际意义. 比如，对于 Fibonacci 数 $f_n = (\tau^n - \bar{\tau}^n)/\sqrt{5}, \tau = (1+\sqrt{5})/2$，由于显然有 $|\bar{\tau}|^n/\sqrt{5} < 0.5$，所以可写

$$f_n = [\tau^n/\sqrt{5} + 0.5] \tag{84}$$

即要计算 f_n，只要计算 $\tau^n/\sqrt{5}$ 后再 4 舍 5 入. 这种方法已有人用于计算机程序中[32]. 1982 年，Spikerman 对于 $f^3 \in \Omega(1,1,1), f_0^{(3)} = 0, f_1^{(3)} = f_2^{(3)} = 1$，证明了

$$f_n^{(3)} = [(\rho - 1)\rho^{n-1}/(4\rho - 6) + 0.5] \tag{85}$$

其中
$$\rho = (\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1)/3$$

1990 年，Capocelli 和 Cull[33] 把上述结果推广到了 $f^{(k)} \in \Omega(1, \cdots, 1), f_0^{(k)} = 0, f_1^{(k)} = 1, f_j^{(k)} = 2^{j-2} (j = 2, \cdots, k-1)$ 的情形. 他们证明了：

定理25 设 α 为 $g(x)=x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1(k\geqslant 2)$ 的惟一正实根，则对于 $n\geqslant -k+2$ 有

$$f_n^{(k)}=[\alpha^{n-1}(\alpha-1)/((k+1)\alpha-2k)+0.5] \tag{86}$$

我们先证明若干引理，既为定理的证明作准备，同时也对 $f^{(k)}$ 及其特征根的性质作一了解.

引理2 $g(x)$ 有惟一正根 $\alpha_1=\alpha$ 适合

$$2-2^{1-k}<\alpha<2-2^{-k} \tag{Ⅰ}$$

其余的根 $\alpha_i(i=2,\cdots,k)$ 适合

$$1/\sqrt[k]{3}<|\alpha_i|<1 \tag{Ⅱ}$$

又若 $2\mid k$，则有一负根，设为 α_k，适合

$$-1+2/(3k)<\alpha_k<-1+2/k \tag{Ⅲ}$$

证明 因为 $g(1)<0$，可化 $g(x)=(x^{k+1}-2x^k+1)/(x-1)=p(x)/(x-1)$，所以 $g(x)$ 与 $p(x)$ 除 1 以外根完全相同. 由 $\gcd(p'(x),p(x))=1$ 知 $g(x)$ 无重根. 依笛卡尔符号法则，$g(x)$ 有惟一正根 $\alpha_1=\alpha$.
因为 $p(2-2^{1-k})=-2(1-2^{-k})^k+1<0$，及 $p(2-2^{-k})=-(1-2^{-k-1})^k+1>0$，故得(Ⅰ).

对其他根 α_i，我们有

$$0=|g(\alpha_i)|\geqslant|\alpha_i|^k-|\alpha_i|^{k-1}-\cdots-|\alpha_i|-1$$

及

$$0=|p(\alpha_i)|\geqslant 2|\alpha_i|^k-|\alpha_i|^{k+1}-1$$

即 $g(|\alpha_i|)\leqslant 0$ 及 $p(|\alpha_i|)=(|\alpha_i|-1)g(|\alpha_i|)\geqslant 0$.

由此可知 $g(|\alpha_i|)=0$ 或 $|\alpha_i|<1$. 若 $g(|\alpha_i|)=0$，则必 $|\alpha_i|=\alpha$，即有 $\alpha_i=\alpha\beta$，β 为单位模的复数，但由

$$(\alpha\beta)^k=(\alpha\beta)^{k-1}+\cdots+(\alpha\beta)+1$$

可得 $\alpha^k=\alpha^{k-1}\beta^{-1}+\cdots+\alpha\beta^{-k+1}+\beta^{-k}\leqslant\alpha^{k-1}+\cdots+\alpha+1$，故必右边等号成立，而这只有 $\beta=1$ 才要达到，于是 $\alpha_i=\alpha$，此不可能. 所以 $|\alpha_i|<1$.

另一方面，考察 $p(x)$ 的互倒多项式 $h(x)=x^{k+1}-2x+1$，它与 $p(x)$ 的根互为倒数. 设 $|x_0|>1$ 使 $h(x_0)=0$，则 $|x_0|\cdot|x_0^k-2|=1$，由此推出 $|x_0^k-2|<1$，进而推出 $|x_0^k|<3$，即 $|x_0|<\sqrt[k]{3}$. 因此对 $|\alpha_i|<1$ 有 $|\alpha_i|>1/\sqrt[k]{3}$，即得 Ⅱ.

最后，当 $2\mid k$ 时同样可知 $g(x)$ 有惟一负根 α_k 位于区间 $(-1,0)$ 中，且在曲线 $y=x^k$ 和 $y=1/(2-x)$ 的交点上. 因此在此区间内 $x^{k+2}<x^k$，所以 k 增大时交点将左移，亦即 α_k 随 k 之增大而单调减小. α_k 之下界可应用 Newton 法于 $g(x)$ 而得到，上界可由 $p(-1+2/k)>0$ 得到，证毕.

引理 3　对每个 $\alpha_j, 2 \leqslant j \leqslant [(k+1)/2]$，若 α_j 为虚根时位于上半复平面内，则有

$$2(j-1)\pi/k < \arg(\alpha_j) \leqslant 2(j-1)\pi/(k-1)$$

证明　考察 $h(x) = x^{k+1} - 2x + 1$ 的一个虚根 $x_0 = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$，由 $h(x_0) = 0$ 得

$$\rho^{k+1}\cos(k+1)\varphi - 2\rho\cos\varphi + 1 = 0$$

及

$$\rho^{k+1}\sin(k+1)\varphi - 2\rho\sin\varphi = 0$$

从两式消去 ρ 得

$$2^{k+1}\sin^k(k\varphi) - \sin^{k+1}[(k+1)\varphi] = 0$$

当 φ 分别取 $2(j-1)\pi/k$ 和 $2(j-1)\pi/(k-1)$ 时，上式左边之值分别 <0 和 $\geqslant 0$，故必 φ 位于某个区间 $[2(j-1)\pi/k, 2(j-1)\pi/(k-1)]$ 之内. 再考虑 x_0 之共轭虚根，就可得 $p(x)$ 之根的幅角的性质，引理即证.

引理 4　$f_n^{(k)} = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j^{n-1}(\alpha_j - 1)/((k+1)\alpha_j - 2k)$　　(87)

证明　首先，$f^{(k)}$ 之特征多项式 $g(x) = p(x)/(x-1)$，则

$$g'(x) = (p'(x)(x-1) - p(x))/(x-1)^2$$

所以

$$g'(\alpha_j) = \alpha_j^{k-1}((k+1)\alpha_j - 2k)/(\alpha_j - 1)$$

其次，$f^{(k)}$ 之初始多项式为

$$U_0(x) = 0\cdot x^{k-1} + (1-0)x^{k-2} + (1-1-0)x^{k-3} + (2-1-1-0)x^{k-4} + \cdots + (2^{k-3} - 2^{k-4} - \cdots - 2^2 - 2 - 1 - 1 - 0) = x^{k-2}$$

所以 $U_0(\alpha_j) = \alpha_j^{k-2}$，即证.

下面我们研究 $f_n^{(k)}$ 与式(87)中含 $\alpha_1 = \alpha$ 的项之间的差的性质. 记

$$c_j = (\alpha_j - 1)/((k+1)\alpha_j - 2k)$$

$$e_n = f_n^{(k)} - c_1\alpha_1^{n-1} = f_n^{(k)} - c\alpha^{n-1} = \sum_{j=2}^{k} c_j\alpha_j^{n-1} \tag{88}$$

引理 5　序列 $\{e_n\}$ 中至多连续有 $k-1$ 个项同号.

证明　由 $g(x) = (x-\alpha)[x^{k-1} + (\alpha-1)x^{k-2} + (\alpha^2-\alpha-1)x^{k-3} + \cdots + (\alpha^{k-1} - \alpha^{k-2} - \cdots - \alpha - 1)]$，及 $g(\alpha_j) = 0$ 知，当 $\alpha_j \neq \alpha_1 = \alpha$ 时

$$\alpha_j^{k-1} + (\alpha-1)\alpha_j^{k-2} + (\alpha^2-\alpha-1)\alpha_j^{k-3} + \cdots + (\alpha^{k-1} - \alpha^{k-2} - \cdots - \alpha - 1) = 0$$

上式可改写为矩阵形式. 令

$$B'_j = (\alpha_j^{k-1} \quad \alpha_j^{k-2} \quad \cdots \quad \alpha_j \quad 1)$$

$$A' = (1 \quad \alpha - 1 \quad \alpha^2 - \alpha - 1 \quad \cdots \quad \alpha^{k-1} - \alpha^{k-2} - \cdots - \alpha - 1)$$

则有

$$A'B_j = 0 (2 \leqslant j \leqslant k)$$

再令

$$D' = (e_{n+k-1} \quad e_{n+k-2} \quad \cdots \quad e_{n+1} \quad e_n)$$

则
$$D = \sum_{j=2}^{k} c_j \alpha^{n-1} B_j$$
于是
$$A'D = \sum_{j=2}^{k} c_j \alpha^{n-1} A' B_j = 0$$
即
$$e_{n+k-1} + (\alpha - 1) e_{n+k-2} + \cdots + (\alpha^{k-1} - \alpha^{k-2} - \cdots - \alpha - 1) e_n = 0$$
由引理1及其证明知，$1, \alpha - 1, \cdots, \alpha^{k-1} - \alpha^{k-2} - \cdots - \alpha - 1$ 均为正，故连续 k 个数 $e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+k-1}$ 不可能全部同号.

引理6 $\{e_n\}$ 适合
$$e_{n+1} = 2e_n - e_{n-k} \tag{89}$$

证明 由式(88)知 $\{e_n\} \in \Omega(g(x))$，故有
$$e_{n+1} = e_n + e_{n-1} + \cdots + e_{n-k+1} =$$
$$e_n + (e_{n-1} + \cdots + e_{n-k+1} + e_{n-k}) - e_{n-k} = 2e_n - e_{n-k}$$

引理7 若 $|e_n| \geqslant 1/2$，则对某个 $2 \leqslant i \leqslant k$，$|e_{n-i}| > 1/2$.

证明 若 e_n 与 e_{n+1} 异号，则由式(89)
$$e_{n+1}^2 = 2e_n e_{n+1} - e_{n+1} e_{n-k} > 0$$
因此 e_{n+1} 与 e_{n-k} 异号，而上式化为
$$-2 | e_n | \cdot | e_{n+1} | + | e_{n+1} | \cdot | e_{n-k} | > 0$$
所以
$$| e_{n-k} | > 2 | e_n | > 1/2$$

若 e_n 与 e_{n+1} 同号，如果 $|e_{n-k}| > 1/2$，则已证. 否则 $|e_{n-k}| \leqslant 1/2$. 而由
$$e_{n-k} = 2e_n - e_{n+1} = \operatorname{sgn}(e_n)(2 | e_n | - | e_{n+1} |)$$
得
$$-1/2 \leqslant 2 | e_n | - | e_{n+1} | \leqslant 1/2$$
于是
$$| e_{n+1} | \geqslant 2 | e_n | - 1/2 \geqslant 1/2$$

若 e_{n+1} 与 e_{n+2} 异号，则仿上可证得 $|e_{n-k+1}| > 1/2$. 若 e_{n+1} 与 e_{n+2} 同号，仿上又可得 $|e_{n+2}| \geqslant 1/2$. 如此继续，由引理5，在 $e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+k-1}$ 中必有两相邻项异号者，因而在 $|e_{n-k}|, |e_{n-k+1}|, \cdots, e_{n-2}$ 中必有大于 $1/2$ 者，证毕.

引理8 对于 $-k+2 \leqslant i \leqslant 1$ 有 $|e_i| < 1/2$.

证明 由递归关系及初始条件可逆推得 $f_0^{(k)} = f_{-1}^{(k)} = f_{-2}^{(k)} = \cdots = f_{-k+2}^{(k)} = 0$. 又由式(88)
$$e_0 = -c\alpha^{-1}, e_{-1} = -c\alpha^{-2}, \cdots, e_{-k+2} = -c\alpha^{-k+1}$$
因为 $c > 0, \alpha > 1$，所以
$$| e_0 | > | e_{-1} | > \cdots > | e_{-k+2} |$$
故只要证 $|e_0|$ 和 $|e_1| < 1/2$ 即可. $|e_0| < 1/2$ 等价于
$$(k+1)\alpha(2-\alpha) < 2$$

由引理1，$2 - \alpha < 2^{1-k}$，故上式左边 $< (k+1)\alpha/2^{k-1} < 2(k+1)/2^{k-1}$.

因而只要证 $k+1\leqslant 2^{k-1}$ 即可. 但此式对 $k\geqslant 3$ 成立,从而 $|e_0|<1/2$ 成立. 又 $k=2$ 时可直接验证 $|e_0|<1/2$ 也成立.

因为 $e_0,e_{-1},\cdots,e_{-k+2}$ 均为负,则 e_1 必为正,于是 $|e_1|<1/2$ 等价于

$$1-(\alpha-1)/((k+1)\alpha-2k)<1/2$$

亦即 $\alpha<2(k+1)/(k-1)$,由于 $\alpha<2$,此不等式显然成立. 证毕.

定理 24 的证明:只要证明对一切 $n\geqslant -k+2$, $|e_n|<0.5$ 即可.

引理 8 已证明对 $-k+2\leqslant n\leqslant 1$ 成立. 今证 $|e_2|<0.5$. 若不然, $|e_2|\geqslant 0.5$,则由引理 7,存在 $2\leqslant i\leqslant k$,使 $|e_{2-i}|>0.5$,而 $1>2-i\geqslant -k+2$,此乃矛盾. 仿此可用归纳法完成证明.

3.2 舍入函数 $[\alpha n+0.5]$ 的迭代

我们有

$$f_{i+1}=(f_i+\sqrt{5f_i^2+4(-1)^i})/2$$

容易证明,当 $i\geqslant 2$ 时

$$\sqrt{5}f_i-1<\sqrt{5f_i^2+4(-1)^i}<\sqrt{5}f_i+1$$

于是 $$f_i(1+\sqrt{5})/2-0.5<f_{i+1}<f_i(1+\sqrt{5})/2+0.5$$

即对于 $\tau=(1+\sqrt{5})/2$, $i\geqslant 2$,有

$$f_{i+1}=[\tau f_i+0.5] \tag{90}$$

这就把 $\{f_i\}$ 所适合的二阶递归关系变成了一阶递归关系. 如果作函数

$$r(n)=[\tau n+0.5] \tag{91}$$

则上述一阶递归关系可改写为对舍入函数 $r(n)$ 的迭代关系,即

$$f_2=f_1,f_{i+1}=r(f_i)=r^{i-1}(f_2)=r^i(1),i\geqslant 2 \tag{92}$$

由此我们还得到一个有趣的等式

$$[\tau[\tau f_i+0.5]+0.5]=[\tau f_i+0.5]+f_i \tag{93}$$

1991 年,Kimberling[34] 针对上式提出了一个推广性的问题:对于给定的哪些整数 a,b,存在实数 ξ,使得

$$[\xi[n\xi+0.5]+0.5]=a[n\xi+0.5]+b \tag{94}$$

对一切整数 $n\geqslant 1$ 成立?若存在,是否惟一?接着,他解决了这一问题. 下面介绍他的解法,在讨论中我们恒假定 a,b 为非零整数, $\Delta=a^2+4b\geqslant 0$, $\alpha=(a+\sqrt{\Delta})/2$, $\beta=(a-\sqrt{\Delta})/2$.

引理 9 $|\beta|<1\Leftrightarrow|b-1|<|a|$, $|\beta|=1\Leftrightarrow|b-1|=|a|$ (95)

证明 $$|\beta|\leqslant 1\Leftrightarrow a-2\leqslant\sqrt{a^2+4b}\leqslant a+2$$

显然 $a\geqslant -2$. 当 $a\geqslant 2$ 时,上式等价于

$$a^2-4a+4\leqslant a^2+4b\leqslant a^2+4a+4$$

亦即 $-a \leqslant b-1 \leqslant a$，且仅当 $|\beta|=1$ 时等号成立. 此即所需证者. 当 $a=\pm 1$ 时，只要 $b \geqslant 1$ 且 $\sqrt{1+4b} \leqslant 3$ 即可，得 $-1<b-1 \leqslant 1$，此也为所需证者. 当 $a=-2$ 时，仅当 $b=-1$ 时 $|\beta|=1$. 此也符合式(95). 证毕.

引理 10 若 $|b-1|<|a|$，则式(94)对 $\zeta=\alpha$ 和一切 $n \geqslant 1$ 成立.

证明 此时有 $|\beta|<1$. 令 $s=n\alpha+0.5-[n\alpha+0.5]$，则 $|s-0.5|<0.5<1/(2|\beta|)$. 此或可改写为 $0<-0.5\beta+\beta s+0.5<1$. 利用 $\alpha\beta=-b$ 得

$$0<-\alpha\beta n-0.5\beta+\beta s+0.5-bn<1$$

即
$$0<-\beta(\alpha n+0.5-s)+0.5-bn<1$$

即
$$0<(\alpha-a)[\alpha n+0.5]+0.5-bn<1$$

亦即
$$0<\alpha[\alpha n+0.5]+0.5-a[\alpha n+0.5]-bn<1$$

此即所需证者.

定理 26 若 $|b-1|<|a|$，则存在惟一的 ζ，使(94)对一切 $n \geqslant 1$ 成立，进而言之，$\zeta=\alpha$.

Kimberling 在证此定理时增加了一条关于 α 的连分数性质的引理，把证明复杂化了，而且似有不妥之处，我们采用如下简单证法.

证明 只需证惟一性. 设 ζ 适合(94). 记 $s=n\zeta+0.5-[n\zeta+0.5]$，则(94)化为

$$0<\zeta(n\zeta+0.5-s)+0.5-a(n\zeta+0.5-s)-bn<1$$

即
$$0<((\zeta-a)\zeta-b)n+(\zeta-a)(0.5-s)+0.5<1 \qquad (\text{I})$$

若 $(\zeta-a)\zeta \neq b$，则 $n \to \infty$ 时上述不等式不成立，这与(94)对一切 $n \geqslant 1$ 成立的要求矛盾. 所以 $(\zeta-a)\zeta=b$. 令 $\mu=a-\zeta$，则 $\zeta+\mu=a$，$\zeta\mu=-b$，故 ζ，μ 必各为 α，β 之一. 若 $\zeta=\beta$，则(Ⅰ)化为

$$-0.5<(s-0.5)\alpha<0.5$$

由此
$$\alpha<0.5/|s-0.5| \qquad (\text{II})$$

因为 $|\beta|<1$，可知 $\zeta=\beta$ 为无理数. 令 $n\beta-[n\beta]=x_n$. 任取 $0.5<t<1$，可知 t 为 $\{x_n\}$ 的极限点. 取 $0<\varepsilon<t-0.5$，则存在 n，使 $0.5<t-\varepsilon<x_n<t+\varepsilon$，此时可得 $s=x_n-0.5$. 令 $t \to 0.5$，则 $\varepsilon \to 0$，$x_n \to 0.5$，从而 $s \to 0$，于是由(Ⅱ)得 $\alpha \leqslant 1$. 这就引出 $|b|<1$ 的矛盾. 故必 $\zeta=\alpha$.

定理 27 对任一个 $n \in \mathbf{Z}^{+}$，构造序列 $\{w_k\}$ 如下

$$w_1=n, w_{k+1}=[\alpha w_k+0.5] \quad (k \geqslant 1) \qquad (96)$$

则当且仅当 $|b-1|<|a|$ 或 $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ 时对一切 $n \in \mathbf{Z}^{+}$ 有

$$w_{k+2}=aw_{k+1}+bw_k \quad (k \geqslant 1)$$

证明 充分性. 当 $|b-1|<a$ 时，由定理 26，式(94)对 $\zeta=\alpha$ 和一切 $n \in \mathbf{Z}^{+}$ 成立，亦即 $w_3=aw_2+bw_1$ 成立. 由式(96)知 $w_k \in \mathbf{Z}^{+}$ $(k \geqslant 1)$，因此在

式(94)中以 w_k 代 n 得 $w_{k+2}=[aw_{k+1}+0.5]=aw_{k+1}+bw_k$.

当 $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ 时,由式(96),对一切 $k\geq 1$ 有 $w_{k+1}=\alpha w_k$,于是

$$w_{k+2}-aw_{k+1}-bw_k=w_{k+2}-(\alpha+\beta)w_{k+1}+\alpha\beta w_k=$$
$$(w_{k+2}-\alpha w_{k+1})-\beta(w_{k+1}-\alpha w_k)=0$$

故结论也成立.

必要性,若 $|b-1|>|a|$,且 $\alpha,\beta\notin\mathbf{Z}$,则由引理8,$|\beta|>1$.而由

$$w_{k+2}=aw_{k+1}+bw_k=(\alpha+\beta)w_{k+1}-\alpha\beta w_k$$

得

$$w_{k+2}-\alpha w_{k+1}=\beta(w_{k+1}-\alpha w_k)$$

于是 $w_{k+2}-\alpha w_{k+1}=\beta^k(w_2-\alpha w_1)$.从已知条件可知 $w_2\neq\alpha w_1$,由此 $|w_{k+1}-\alpha w_k|\to\infty(k\to\infty)$,故 k 充分大时式(96)不成立,此乃矛盾.故证.

[注]上述定理是对 Kimberling 的结果的修正,他忽略了 $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ 的情况.

同一年,Kimberling 在另一文献[36]中把类似的结果推广到了高阶情形,我们即将在下一目介绍.

3.3 Stolarsky 数阵

我们已经知道全体 Wythoff 对中的数不重迭地覆盖了正整数集.1977 年,Stolarsky[37]发现了一个有趣的事实,用无数个 $\Omega(1,1)$ 中的整数序列可以不重迭地覆盖 $\mathbf{Z}^+$.把这些序列排成一个数阵时如下所示

1	2	3	5	8	13	21	…
4	6	10	16	26	42	68	…
7	11	18	29	47	76	123	…
9	15	24	39	63	102	165	…
12	19	31	50	81	131	212	…
14	23	37	60	97	157	254	…
17	28	45	73	118	191	309	…
⋮							

记此数阵中第 i 行第 j 列的元素为 $s(i,j)(i,j=1,2,\cdots)$,则此数阵的构成规则是:

i) $s(1,j)=f_{j+1}$ 为 Fibonacci 数;

ii) $i>1$ 时,$s(i,1)$ 为在前面所有 $i-1$ 行中未曾出现过的最小正整数,而

$$s(i,j+2)=s(i,j+1)+s(i,j),j\geq 1$$

实际上,就是

$$s(i,j+1)=[\tau s(i,j)+0.5],j\geq 1,\tau=(1+\sqrt{5})/2$$

这一发现,引起了一些人的兴趣[33],[36],[38]~[42],Stolarky 的结果,首先被推广到一般的二阶 F - L序列,而 1991 年又为 Kimberling[35] 推广到高阶情形.在推广中,舍入函数的迭代是一个重要工具.我们下面着重介绍 Kimberling 的结果.

一个正整数的数阵 $s(i,j)(i,j=1,2,\cdots)$ 称为一个 Stolarsky 数阵(更详细地,一个$(a_1,\cdots,a_k)$Stolarsky 数阵),如果:

i) 每个正整数在此数阵中恰出现一次;

ii) 存在整数 $a_1,\cdots,a_k,a_k\neq 0,k\geqslant 2$,使得对一切 $i\geqslant 1,j\geqslant 1$ 有

$$s(i,j+k)=a_1s(i,j+k-1)+\cdots+a_{k-1}s(i,j+1)+a_ks(i,j) \quad (97)$$

下面是一个二阶 Stolarsky 数阵,它的每一行都是 $\Omega(3,2,1)$ 中的序列.值得注意的是,它的第一行不是 $\Omega(3,2,1)$ 中主序列 $0,0,1,3,11,\cdots$ 去掉前面两个零得到的.实际上,其每行均是按公式 $s(i,j+1)=[\alpha s(i,j)+0.5]$ 得到的,其中 $\alpha=3.62736508471183\cdots\cdots$ 为 x^3-3x^2-2x-1 的主实根.

1	4	15	54	196	711	2579	9355	…
2	7	25	91	330	1197	4342	15750	…
3	11	40	145	526	1908	6921	25105	…
5	18	65	236	856	3106	11263	40855	…
6	22	80	290	1052	3816	13842	50210	…
8	29	105	381	1382	5013	18184	65960	…
⋮								

引理 11　若 $\alpha>1,m,n\in\mathbf{Z}^+,m<n$,则$[\alpha m+0.5]<[\alpha n+0.5]$.

证明　由已知,$m\leqslant n-1$,则 $\alpha m\leqslant \alpha n-\alpha<\alpha n-1$,故$[\alpha m+0.5]\leqslant[\alpha n-1+0.5]<[\alpha n+0.5]$.

引理 12　设 $f(x)=x^k-a_1x^{k-1}-\cdots-a_k$ 有一主实根$\alpha>1$,对任意 $n\in\mathbf{Z}^+$,令 $g(n)=[\alpha n+0.5]$,若

$$g^{k+m}(n)=a_1g^{k+m-1}(n)+\cdots+a_kg^{m+1}(n)+a_kg^m(n) \quad (98)$$

对一切 $n\in\mathbf{Z}^+$ 及 $m=0$ 成立,则此式对一切 $n\in\mathbf{Z}^+$ 及 $m\geqslant 0$ 均成立.

证明　当 $g^k(n)=a_1g^{k-1}(n)+\cdots+a_{k-1}g(n)+a_kn$ 对一切 $n\in\mathbf{Z}^+$ 成立时,以 $g^m(n)$ 代其中的 n 即得式(98),证毕.

引理 13　在引理 12 的条件下,记

$$r_k=\{\alpha g^{k-1}(n)+0.5\}=\alpha g^{k-1}(n)+0.5-[\alpha g^{k-1}(n)+0.5]$$

则
$$g^i(n)=\alpha^in+(\alpha^i-1)/(2(\alpha-1))-\sum_{j=1}^{i}r_j\alpha^{i-j},i\geqslant 1$$

证明　$g(n)=\alpha n+0.5-r_1$,故 $i=1$ 时引理成立.利用 $g^{i+1}(n)=$

综述

$\alpha g^i(n)+0.5-r_{i+1}$，可用归纳法证之.

定理 28 在引理 13 的条件下，令

$M=(a_1+\cdots+a_k-1)/(2(\alpha-1))-r_1a_k/\alpha-r_2(a_k+a_{k-1}\alpha)/\alpha^2-r_3(a_k+a_{k-1}\alpha+a_{k-2}\alpha^2)/\alpha^3-\cdots-r_{k-1}(a_k+a_{k-1}\alpha+\cdots+a_2\alpha^{k-2})/\alpha^{k-1}-r_k$ (99)

作数阵$\{s(i,j)\}$如下

i) $s(1,1)=1,s(1,j)=[\alpha j+0.5]\quad(j\geqslant 1)$ (100)

ii) $i>1$时，$s(i,1)$为不在$s(t,j)(1\leqslant t\leqslant i-1,j\geqslant 1)$之中的最小正整数，而

$$s(i,j+1)=[\alpha s(i,j)+0.5]\quad(j\geqslant 1) \tag{101}$$

则$\{s(i,j)\}$为 Stolarsky 数阵之充要条件是$|M|<1$.

证明 由$\{s(i,j)\}$之构成法知，每个$n\in\mathbf{Z}^+$必在其中出现. 今证每个n不重复出现. 首先由引理 11，数阵中每行单调增加. 又每行的第一数$s(i,1)$不在前面的行出现. 因此对任何$1\leqslant t\leqslant i-1$，必存在$j\geqslant 1$，使$s(t,j)<s(i,1)<s(t,j+1)$. 由此可得$[\alpha s(t,j)+0.5]<[\alpha s(i,1)+0.5]<[\alpha s(t,j+1)+0.5]$，即$s(t,j+1)<s(i,2)<s(t,j+2)$，此说明$s(i,2)$不在前面任一行中出现. 依归纳法可证任何$s(i,j)$亦如此.

这样，$\{s(i,j)\}$为 Stolarsky 数阵之充要条件就是式(98)对任何$n\in\mathbf{Z}^+$及$m\geqslant 0$成立了. 而依引理 12，只需对$m=0$成立即可. 我们有

$$g^k(n)-\sum_{i=1}^{k}a_ig^{k-i}(n)=\alpha^kn+(\alpha^k-1)/(2(\alpha-1))-\sum_{j=1}^{k}r_j\alpha^{k-j}-$$
$$\sum_{i=1}^{k}a_i(\alpha^{k-i}n+(\alpha^{k-i}-1)/(2(\alpha-1))-\sum_{j=1}^{k-i}r_j\alpha^{k-i-j})=$$
$$nf(\alpha)+(\alpha^k-1-a_1(\alpha^{k-1}-1)-a_2(\alpha^{k-2}-1)-\cdots-$$
$$a_{k-1}(\alpha-1))/(2(\alpha-1))-r_1(\alpha^{k-1}-a_1\alpha^{k-2}-\cdots-a_{k-2}\alpha-a_{k-1})-$$
$$r_2(\alpha^{k-2}-a_1\alpha^{k-3}-\cdots-a_{k-2})-\cdots-r_{k-1}(\alpha-a_1)-r_k$$

利用$f(\alpha)=0$的关系对上式右边各项加以变形，可知其结果恰为M. 上式左边为一整数，故右边亦然. 式(98)成立之充要条件为$M=0$，但此条件等价于$|M|<1$. 证毕.

此定理应用于下面的几个推论，可得到一些具体的结果.

推论 3 设$a_1,\cdots,a_k$为非负整数($a_k\neq 0$)，且

$$a_1\geqslant 1+a_2+\cdots+a_k \tag{102}$$

则$\{s(i,j)\}$为 Stolarsky 数阵.

证明 $f(x)=x^k-a_1x^{k-1}-\cdots-a_k$，由已知条件，$x\geqslant a_1+1$时$f(x)>$

$0, f(a_1) < 0$,故 $f(x)$ 之主实根 α 适合 $a_1 < \alpha < a_1 + 1$. 于是

$$M < (a_1 + \cdots + a_k - 1)/(2(a_1 - 1)) \leqslant 2(a_1 - 1)/(2(a_1 - 1)) = 1$$

又在(16)中令 $r_i = 1 - \varepsilon_i (i = 1, \cdots, k)$ 得

$$M = -(a_1 + \cdots + a_k - 1)/(2(\alpha - 1)) + \varepsilon_1 a_k/\alpha + \varepsilon_2(a_k + a_{k-1}\alpha)/\alpha^2 + \cdots + \varepsilon_{k-1}(a_k + a_{k-1}\alpha + \cdots + a_2\alpha^{k-2})/\alpha^{k-1} + \varepsilon_k > -(a_1 + \cdots + a_k - 1)/(2(\alpha - 1)) \geqslant -1$$

依定理得证.

由推论3,可以构造出任何 $k(\geqslant 2)$ 阶的Stolarsky数阵. 但条件(102)并非必要的. 下面两个推论说明了这种情况.

推论4 设 α 为 $p(x) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 (k \geqslant 2)$ 的主实根,则以 $f(x) = (x - 1)p(x) = x^{k+1} - a_1x^k - \cdots - a_{k+1}$ 为特征多项式构造的数阵 $\{s(i, j)\}$ 为 Stolarsky 数阵.

证明 实际上 $f(x) = x^{k+1} - 2x^k + 1$,所以 $a_1 = 2, a_{k+1} = -1$,其余的 $a_i = 0$. 故有

$$M = -r_1a_{k+1}/\alpha - r_2(a_{k+1} + a_k\alpha)/\alpha^2 - \cdots - r_k(a_{k+1} + a_k\alpha + \cdots + a_2\alpha^{k-1})/\alpha^k - r_{k+1} = -r_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} r_i/\alpha^i < \alpha^{-k}\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i = 1$$

而 $M > -1$ 乃显然. 故证.

推论5 设 $p(x) = x^3 - c_1x^2 - c_2x - c_3$ 有一主实根 α 适合

$$c_3 \geqslant 1, c_2 \geqslant c_3(1 - \alpha^{-1}), c_1 \geqslant (c_2 + c_3\alpha^{-1})(1 - \alpha^{-1})$$

则以 $f(x) = (x - 1)p(x') = x^4 - a_1x^3 - a_2x^2 - a_3x - a_4$ 为特征多项式构造的数阵 $\{s(i, j)\}$ 为 Stolarsky 数阵.

证明 $a_1 = c_1 + 1, a_2 = c_2 - c_1, a_3 = c_3 - c_2, a_4 = -c_3$

$$M = r_1c_3/\alpha + r_2(c_3 + \alpha(c_2 - c_3))/\alpha^2 + r_3(c_3 + \alpha(c_2 - c_3) + \alpha^2(c_1 - c_2))/\alpha^3 - r_4$$

根据已知条件可知 r_2, r_3 之系数均非负,而 $c_3 \geqslant 1$,所以

$$M < c_3/\alpha + (c_3 + \alpha(c_2 - c_3))/\alpha^2 + (c_3 + \alpha(c_2 - c_3) + \alpha^2(c_1 - c_2))/\alpha^3 - r_4 = (c_1\alpha^2 + c_2\alpha + c_3)/\alpha^3 - r_4 = 1 - r_4 \leqslant 1$$

又 $M > -1$ 乃显然,故证.

对于 $k = 2$,由于定理28,我们有:

定理29 设 $f(x) = x^2 - ax - b$ (a, b 为非零整数)有实根 α, β,且 $|\beta| \leqslant$

$1, \alpha > 1$,则按 α 和 $f(x)$ 构造的数阵 $\{s(i,j)\}$ 为 Stolarsky 数阵.

Kimberling 曾提出一个问题:是否存在一个 Stolarsky 数阵,它至少有一行为 $\Omega(f(x))(\partial^\circ f = 2)$ 中的序列,而不是 $\Omega(f(x))$ 中的序列的行都是 $\Omega(g(x))(\partial^\circ g = 3)$ 中的序列,且 $\gcd(f(x), g(x)) = 1$?

当然,这个问题应该是指这些序列分别以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为极小多项式,否则问题就是平凡的了.

参考文献

[1] BROWN J L, JR. Zeckendorf's Theorem and some applicatications[J]. Fibonacci Quart, 1964(2):162-168.

[2] BROWN J L. JR. Unique representation of integers as sums of distinct Lucas numbers[J]. Fibonacci Quart, 1969(7):243-252.

[3] DAYKIN D E. Representation of natural numbers as sums of generalised Fibonacci numbers[J]. London Math. Soc., 1960(35):143-160.

[4] ZECKENDORF E. Representation des numbers naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas[J]. Bull. Soc. Royale Sci. Liege, 1972(41), 179-182.

[5] HOGGATT V E, Jr. and M BICKNELL. Generalized Fibonacci polynomials and Zeckendorf's representations[J]. Fibonacci Quart, 1973, 11(4):399-419.

[6] LEKKERKERKER C G. Voorstelling van natuurlijk getallen door een som van getallen Van Fibonacci[J]. Simon Stevin, 1952(29):190-195.

[7] FILIPPONI P, MONTOLIVO E. Representation of natural numbers as sums of Fibonacci numbers[J]. an applications to modern Cryptography. Applications of Fibonacci numbers, 1990(3):89-99.

[8] FILIPPONI P , WOLFOWICZ W. A statistial property of nonadjacent ones binary sequences[J]. Note Recensioni Notizie, X X X VI, 1987, 314:103-106.

[9] FILIPPONI P. A note on the representation of integers as a sum of distinct Fibonacci numbers[J]. Fibonacci Quart, 1986, 24(4):336-343.

[10] CARLITZ L, SCOVILLE R , Hoggatt V E. Lucas representation[J]. Fibonacci Quart, 1972: 10, 29-42, 70, 112.

[11] CARLITZ L, SCOVILLE R, HOGGATT V E. Fibonacci representation[J]. Fibonacci Quart, 1972, 1-28, 1973, 11:527-530.

[12] CARLITZ L. Fibonacci representation[J]. Fibonacci Quart, 1968, 6.

[13] WYTHOFF W A. A modification of the game of Nim[J]. Nieuw Archiefvoor wiskunde, 1907, 7:199.

[14] DAVID A, Klarner. Partitions of N into distinct Fibonacci numbers[J]. Fibonacci Quart, 1968, 6(4):235-243.

[15] HOGGATT V E, JR. Matjorie Bicknell-Johnson, and Richard Sarsfeild. A generalization of

Wythoff's Game[J]. Fibonacci Quart, 1979, 17(3): 198-211.

[16] MARJORIE BICKNELL-JOHNSON. Generalized Wythoff numbers from simultaneous Fibonacci representations[J]. Fibonacci Quart, 1985, 23(4): 308-318.

[17] PIHKO J. An algorithm for additive representation of positive integers[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser A I Math. Dissenations, 1983, 46: 1-54.

[18] PIHKO J. On Fibonacci and Lucas representations and a theorem of Lekkerkerker[J]. Fibonacci Quart, 1988, 26(3): 256-261.

[19] COQUET J, van der Bosch P. A summation formula involving Fibonacci digits[J]. Number Theory, 1986, 22: 139-146.

[20] PETHO A., Robert R F, Tichy. On digit expansions with respect to linear recurrences[J]. Number Theory, 1989, 33: 243-256.

[21] FREITAG H T, Fillipponi P. On the representation of integral sequences $\{f_n/d\}$ and $\{l_n/d\}$ as sums of Fibonacci numbers and as sms of Lucas numbers[J]. Applications of Fibonacci numbers, 1988, 2: 97-112.

[22] FREITAG H T, FILLIPPONI P. On the F-representation of integral sequences $\{f_n^2/d\}$ and $\{l_n^2/d\}$ where d is either a Fibonacci or a Lucas number[J]. Fibonacci Quart, 1989, 27: 276-282.

[23] 谈祥柏.趣味对策论[M].北京:中国青年出版社,1982:45-53.

[24] ALAN TUCKER. Applied Combinatorics[M]. John Wiley & sONS, 1984.

[25] WHINIHAN W J. Fibonacci Nim[J]. Fibonacci Quart, 1963, 1: 9-13.

[26] ISAACS R P. Mentioned in Gardner, M Math[M]. Games. Sci. Amer, 1997.

[27] KENYON J C. Nim-like games and the Sprague-Grundy theory. Thesis[M]. Univ. Calgary, Alberta.

[28] PHILLIPS G M. Aitken sequences and Fibonacci numbers. Amer[J]. Math. Monthly, 1984, 91(6): 354-357.

[29] EISENSTEIN M. B-530, B-531, Proplems proposed[J]. Fibonacci Quart, 1984, 22: 274.

[30] LORD G. B-530, B-531, Problem solved[J]. Fibonacci Quart, 1985, 23: 280-281.

[31] SHANNON A G, Horadam A F. Generalized Fibonacci continued fractions[J]. Fibonacci Quart, 1988, 26: 219-223.

[32] KNUTH D E. The art of computer programming[M]. Addison-Wesley Publishing Company, 1975.

[33] CAPOCELLI R M, Cull P. Generalized Fibonaci numbers are rounded powers[J]. Applications of Fibonacci numbers, 1990, 3: 57-62.

[34] KIMBERLING C. Second-order recurrence and iterats of $[\alpha n+1/2]$[J]. Fibonacci Quart, 1991, 29(3): 194-196.

[35] KIMBERLING C. Patitioning the positive integers with higher order recurrences[J]. Math. & Math. Sci 1991, 14(3): 457-462.

[36] KIMBERLING C. Second-order Stolarsky arrays[J]. Fibonacci Quart, 1991, 29(4): 339-342.

[37] STOLARSKY K B. A set of generalized Fibonacci sequences such that each natural number belongs to exactly on[J]. Fibonacci Quart, 1971, 15: 224.

[38] BUTCHER J C. on a conjecture concerning a set of sequences satisfying the Fibonacci differece equation[J]. Fibonacci Quart, 1978, 16: 81-83.

[39] HENDY M D. Stolarsky's distribution of the positive integers[J]. Fibonacci Quart, 1978, 16: 70-80.

[40] MORRISON D R. A stolarsky array of Wythoff pairs. A Collection of manuscripts related to the Fibonacci sequence[J]. Fibonacci Association, 1980: 134-136.

[41] GBUR M E. A generalization of a problem of Stolarsky[J]. Fibonacci Quart, 1981, 19: 117-121.

[42] BURKE J R, Bergum G E. Covering the integers with linear recurrences[J]. Applications of Fibonacci numbers, 1988: 2.

编后语　周持中先生的这篇文章是其专著《菲波那契数列和卢卡斯数列》(湖南科学技术出版社)中的一章.对于周先生我是景仰已久,记得大学毕业即将离校之际,在宿舍捧读周先生发表在《数学实践与认识》上的那篇《关于"蛙跳问题"的推广》,惊若天书,周先生细致、缜密、推广彻底,将差分方程技巧推向极致.20多年后当我在考虑贝蒂定理时也遇到了菲波那契数基的时候,重读周先生的专著实有李白登黄鹤楼,见崔诗在上而有景题不得之感,后经周先生同意当做附录发表,但再三读之觉得其价值远远超出所附之文,故单独发表,此文实为本文集文章之精华.

世界现代数学之昌盛得益于数学学派的兴起,诸如哥廷根学派、布尔巴基学派、莫斯科学派、波兰数学学派,而中国数学奥林匹克之繁荣全赖于"湘军"的崛起,张垚、欧阳维诚、肖果能、李盛宏、冷岗松、周持中、沈文选、肖振纲、唐立华、冯跃峰、张承宇、王树国、许鹏飞、符开广、羊明亮、周斌、杨日武、肖登鹏、周正安、王建中等,人数之多,水平之高,成果之丰,堪称全国之最,而且大多都像周先生一样,全靠自己的努力从基层僻壤走向舞台中心,从默默无闻走向令人瞩目.

向"湘军"学习!向"湘军"致敬!

Erdös-Ginzburg-Ziv 问题

刘培杰

§1 一道西德数学竞赛试题

德国是世界数学大国，一度曾为世界数学中心．诞生于此的著名数学家不胜枚举，如，希尔伯特、黎曼、高斯、库默尔、莱布尼兹、克莱茵、Minkowski，等等．

德国也是数学奥林匹克强国，特别引人瞩目的是德国数学竞赛元老 E. Arthur 教授，Arthur 曾在第二次世界大战中失去右臂．他 1952 年毕业于斯图加特大学，此后担任中学教师 18 年之久，他非常热爱中学数学教学，以致在 1970 年路德维希学院请他出任副教授时，他还带着几分勉强．1972 年以后，他成了法立克福大学数学系的教授．

联邦德国是 1977 年第一次参加 IMO 的，从那时候起到 1984 年，Arthur 一直是西德出席 IMO 代表队的教练或领队．1988 年他又担任了西德队的领队，并且 1989 年在德国布伦瑞克(Braunschweig)举行的第 30 届 IMO 上他出任主试委员会主席，在命题中他强调背景，即一道好的竞赛试题应该有深刻的背景．

下面我们以一道 1981 年西德奥林匹克竞赛试题来说明这一点．

试题 $k \in \mathbf{N}$，$n = 2^{k-1}$，求证：从 $2n - 1$ 个自然数中总可选出 n 个数使其和可被 n 除尽．

证明 用数学归纳法证明如下．

(1) 当 $k = 2$ 时，显然．

(2) 假设当 $k = m$ 时，命题成立，即对 $2 \cdot 2^{m-1} - 1$ 个自然数中总可选出 2^{m-1} 个，使其和被 2^{m-1} 整除．

往证，命题对 $k = m + 1$ 时成立．

设 $2 \cdot 2^m - 1$ 个整数为 $I = \{x_1, x_2, \cdots, x_{2^{m+1}-2}, x_{2^{m+1}-1}\}$，因 $|I| > 2^{m-1}$，所以由归纳假设，可知可以从 I 中选出 2^{m-1}，使其和被 2^{m-1} 整除，不妨设 $I_1 =$

$\{x_1, x_2, \cdots, x_{2^{m-1}}\}$，且 $A_1 = \sum_{i=1}^{2^{m-1}} x_i \equiv 0 (\bmod 2^{m-1})$.

再注意到 $|I - I_1| = (2^{m+1} - 1) - 2^{m-1} = 3 \cdot 2^{m-1} - 1 = 2^m - 1 + 2^{m-1} > 2^m - 1$.

所以还可以从 $I - I_1$ 中选出 2^{m-1} 个，使其和被 2^{m-1} 整除，不妨设为 $I_2 = \{x_{2^{m-1}+1}, x_{2^{m-1}+2}, \cdots, x_{2^m}\}$，且满足

$$A_2 = \sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m} x_i \equiv 0 (\bmod 2^{m-1})$$

再注意到 $|I - I_1 \cup I_2| = (2^m - 1 + 2^{m-1}) - 2^{m-1} = 2^m - 1$.

所以再由归纳假设可知，还可在 $|I - I_1 \cup I_2|$ 中选出 2^{m-1} 个数，使其和能被 2^{m-1} 整除，不妨设为 $I_3 = \{x_{2^m+1}, x_{2^m+2}, \cdots, x_{2^m+2^{m-1}}\}$，且满足

$$A_3 = \sum_{i=2^m+1}^{2^m+2^{m-1}} x_i \equiv (\bmod 2^{m-1})$$

再对 A_1, A_2, A_3 用 $\bmod 2^m$ 来分类：

因为
$$A_1 \equiv \begin{cases} 0 \\ 2^{m-1} \end{cases} (\bmod 2^m)$$
$$A_2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 2^{m-1} \end{cases} (\bmod 2^m)$$
$$A_3 \equiv \begin{cases} 0 \\ 2^{m-1} \end{cases} (\bmod 2^m)$$

所以一定存在两个 $A_i, A_j (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$，使得 $A_i \equiv A_j (\bmod 2^m)$.

即若关于 $\bmod 2^m$ 同余于 0，则 $A_i + A_j \equiv 0 (\bmod 2^m)$；若关于 $\bmod 2^m$ 同余于 2^{m-1}，则 $A_i + A_j \equiv 2^{m-1} + 2^{m-1} \equiv 0 (\bmod 2^m)$，并且 $|I_1 \cup I_2| = |I_2 \cup I_3| = |I_3 \cup I_1| = 2^m$，其实这一问题的一般结论即：任给 $2a - 1$ 个整数，一定有 a 个整数，它们的算术平均也是整数，早在 1961 年就已经被匈牙利数学家 P. Erdös. A. Ginzbnrg. A. Ziv 解决，不过由于我国刚刚恢复数学研究，许多人在柯召、孙琦《初等数论 100 例》(上海教育出版社，1979 年出版) 中发现这一问题时并不知道这是一个已经被解决的问题，于是给出了许多新证法，其中以单墫先生和高维东先生为代表.

§2 单墫的证明

1983 年作为单墫理学博士论文中的一部分的名为《ADVANCES IN MATHEMATICS》(初等数论中的一个猜测) 的文章发表在《数学进展》上，以下

是他的证明.

定理 设 n 为自然数,则任意的 $2n-1$ 个数中,必有 n 个数的和为 n 整除.

证明分三步进行.

1. 几个引理

引理 1 (Cauchy) 设 p 为素数,$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 代表 m 个不同的剩余类 $(\bmod\ p)$,$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 代表 n 个不同的剩余类 $(\bmod\ p)$,则 $x_\mu+y_\nu(1\leqslant\mu<m,1\leqslant\nu\leqslant n)$ 所代表的不同的剩余类 $(\bmod\ p)$ 的数目 $\geqslant\min(m+n-1,p)$.

证明 见华罗庚[2]《堆垒素数论》(科学出版社,1957 年出版),引理 8.7.

引理 2 在任意的 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中一定能选出若干个数,它们的和(包括一个数的情况,下同)为 n 整除.

证明 n 个数 $x_1,x_1+x_2,\cdots,x_1+x_2+\cdots+x_n$,如果都不为 n 整除,即均不属于零类 $(\bmod\ n)$,那么根据 Dirichler 的抽屉原则,其中必有两个数同余,它们的差为 n 整数.

引理 3 设 p 为素数,任意 p 个数,按照 $\bmod\ p$ 的同余类分类,如果每一类中至多有 k 个数,那么可以从这 p 个数中取出 h 个数,它们的和为 p 整数,并且 $h\leqslant k$.

证明 将这 p 个数,列成下表

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{l_1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{l_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{l_k} \end{matrix}$$

其中每一列表示一个剩余类,并且同一类中的元素(至多 k 个)用同一字母表示,$l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_k$.显然

$$l_1+l_2+\cdots+l_k=p$$

若 $x_1,x_2,\cdots,x_{l_1}$ 中有数属于零类,结论显然,故可设 $x_1,x_2,\cdots,x_{l_1}$ 均不属于零类.

因为 $x_1,x_2,\cdots,x_{l_1}$ 中剩余类个数为 l_1,而 $0,x_1,x_2,\cdots,x_{l_2}$ 中剩余类的个数为 l_2+1,故由引理 1,$x_{i_1},x_{i_1}+x_{i_2}(1\leqslant i_1\leqslant l_1,1\leqslant i_2\leqslant l_2)$ 中至少有 l_1+l_2 个不同的剩余类.同样 $x_{i_1},x_{i_1}+x_{i_2},x_{i_1}+x_{i_2}+x_{i_3}(i_j\leqslant l_j,j=1,2,3)$ 中至少有 $l_1+l_2+l_3$ 个不同的剩余类,依此类推,$x_{i_1},x_{i_1}+x_{i_2},\cdots,x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}(i_j\leqslant l_j,j=1,2,\cdots,k)$ 中至少有 $l_1+l_2+\cdots+l_k=p$ 个剩余类,故引理 3 成立.

2. 证明在 $n=$ 素数 p 时,定理成立

将 $2p-1$ 个数,按 p 的剩余类分类,设其中最多的一类含 K_0 个数,不妨设

这类为零类(如果这一类为 a,将第一个数减去 a,即化为这种情形),如果 $K_0 \geqslant p$,问题显然,设 $K_0 < p$.

考虑其余的 $(2p-1)-K_0 \geqslant p$ 个数,由引理 2,其中可以取出个数 $\leqslant p$ 的若干个数,它们的和为 p 整除.设在这样的和中,加数最多的为 $x_1+x_2+\cdots+x_{k_1}(K_1 \leqslant p)$.如果 $p-K_0 \leqslant K_1$,结论显然成立.设

$$p-K_0 > K_1 \tag{1}$$

我们证明这将导致矛盾.

考虑剩下的 $2p-1-K_0-K_1 \geqslant p$ 个数.根据引理 2,其中可以选出若干个数,其和为 p 整除,设这样的和中,加数最少的为 $y_1+y_2+\cdots+y_{K_1}$.

如果 $K_1+K_2 \leqslant p$,那么 $x_1+x_2+\cdots+x_{K_1}+y_1+y_2+\cdots+y_{K_2} \equiv 0 \pmod p$,并且 $K_1+K_2 > K_1$,这与 K_1 的定义矛盾,所以有

$$K_1+K_2 > p \tag{2}$$

由式(1)、(2)得

$$K_2 > K_0 \tag{3}$$

而将上述 $2p-1-K_0-K_1$ 个数按 p 的剩余类分类,每一类中至多有 $K \leqslant K_0$ 个数.由引理 3

$$K_2 \leqslant K \leqslant K_0 \tag{4}$$

式(3)、(4)矛盾.

故在 $n=$ 素数 p 时,定理成立.

3. 证明如果定理在 $n=a>1$ 及 $n=b>1$ 时成立,则定理对于 $n=ab$ 也成立

由 $2ab-1 \geqslant 2b-1$ 个数中可选出 b 个数满足

$$x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+\cdots+x_b^{(1)}=K_1 b \qquad K_1 \in \mathbf{Z}$$

如果 $a>1$,剩下的个数为

$$2ab-1-b=(2a-1)b-1 \geqslant 2b-1$$

再从中选出 b 个数满足

$$x_1^{(2)}+x_2^{(2)}+\cdots+x_b^{(2)}=K_2 b \qquad K_2 \in \mathbf{Z}$$

如果继续进行,直至 $2a-2$ 次,得

$$x_1^{(2a-2)}+\cdots+x_b^{(2a-2)}=K_{2a-2} b \qquad K_{2a-2} \in \mathbf{Z}$$

这时 $2ab-1-(2a-2)b=2b-1$,还可以选出

$$x_1^{(2a-1)}+\cdots+x_b^{(2a-1)}=K_{2a-1} b \qquad K_{2a-1} \in \mathbf{Z}$$

然后从 $2a-1$ 个数 $K_1,K_2,\cdots,K_{2a-1}$ 中取出 a 个数,不妨设为 $K_1,\cdots,K_a$,满足

$$K_1+K_2+\cdots+K_a=K_a \qquad K \in \mathbf{Z}$$

于是

$$x_1^{(1)}+\cdots+x_b^{(1)}+\cdots+x_1^{(a)}+\cdots+x_b^{(a)}=(K_1+\cdots+K_a)b=K_{ab}$$

即 $n=ab$ 个数 $x_1^{(1)},\cdots,x_b^{(1)},\cdots,x_b^{(a)}$ 的和为 n 整除.

由 2,3 即知定理对于一切自然数 n 成立.

§3　高维东的初等证明

东北师范大学数学系 81 级高维东同学在校读书期间就用初等数学方法证明了这一问题，这一结果被他的老师李复中先生收入到教材《初等数论选讲》(东北师范大学出版社，1984 年 12 月第 1 版：113 ~ 116) 中当做一个附录.

以下是根据他的思路改写的初等证明.

定理　设 $n\in\mathbf{N}$，证明：任意 $2n-1$ 整数中，必有 n 个数，它们的和能被 n 整除.

引理 1　设 p 为质数，$a,b\in\mathbf{N}$，a,b 的 p 进制表示分别为

$$a=a_kp^k+a_{k-1}p^{k-1}+\cdots+a_1p+a_0$$

$$b=b_kp^k+b_{k-1}p^{k-1}+\cdots+b_1p+b_0$$

其中 $a_i,b_i\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，$0\leqslant i\leqslant k$，则

$$C_a^b\equiv C_{a_k}^{b_k}C_{a_{k-1}}^{b_{k-1}}\cdots C_{a_1}^{b_1}C_{a_0}^{b_0}\pmod p$$

引理 2　若 p 为质数，则 $C_n^p\equiv\left[\dfrac{n}{p}\right]\pmod p$

证明　设 $n=(a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0)_p$，则 $\left[\dfrac{n}{p}\right]=(a_ka_{k-1}\cdots a_k)_p$，从而 $\left[\dfrac{n}{p}\right]\equiv a_1\pmod p$

由引理一可知

$$C_n^p\equiv C_{a_1}^1\equiv a_1\equiv\left[\frac{n}{p}\right]\pmod p$$

现在我们来证明开始的问题.

(1) 先考虑 n 为质数 p 的情况.

设 $2p-1$ 个整数为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2p-1}$. 用反证法：如果这 $2p-1$ 个数中任意 p 个数 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_p}$ 的和均不能被 p 整除，则由 Fermat 小定理有

$$(x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_p})^{p-1}\equiv1\pmod p\tag{5}$$

形如式(5) 的同余式共有 C_{2p-1}^p 个. 将这些同余式相加得

$$\sum(x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_p})^{p-1}\equiv C_{2p-1}^p\pmod p\tag{6}$$

由引理二知式(6) 的左边

13

综

述

$$C_{2p-1}^{p} \equiv \left[\frac{2p-1}{p}\right] \equiv 1 \pmod p$$

将式(6)左边的每个$(x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_p})^{p-1}$展开后,得到形如$x_{i_1}^{a_1}x_{i_2}^{a_2}\cdots x_{i_p}^{a_l}$的项,其中$l \leqslant p-1$,在$\sum$中这样的项共有$C_{2p-1-l}^{p-l}$个,但是

$$C_{2p-1-l}^{p-l} = \frac{(2p-1-l)\cdots(p+1)p}{(p-l)!}$$

能被p整除.从而式(6)的左边能被p整除,矛盾.

这个矛盾说明在$x_1,x_2,\cdots,x_{2p-1}$中一定有某p个数的和能被p整除.

往证如果题设结论在$n=a$与$n=b$时成立,那么这个结论在$n=ab$时也成立.

当$n=ab$时,可以先从$2n-1$个数中选出$x_1^{(1)},x_1^{(2)},\cdots,x_1^{(a)}$,使得它们的和能被$a$整除,再从剩下的$2n-1-a$个数中选出$x_2^{(1)},x_2^{(2)},\cdots,x_2^{(a)}$,使得它们的和能被$a$整除,依此类推,直至从最后$2n-1-(2b-2)a=2a-1$个数中选出$x_{2b-1}^{(1)},x_{2b-1}^{(2)},\cdots,x_{2b-1}^{(a)}$,使得它们的和能被$a$整除.

记这各个和除以a所得的商分别为$x_1,x_2,\cdots,x_{2b-1}$,则从这$2b-1$个数中可以选出b个数,它们的和能被b整除,不妨设这b个数即为$x_1,x_2,\cdots,x_b$.从而n个数$x_1^{(1)},x_1^{(2)},\cdots,x_2^{(1)},\cdots,x_b^{(1)},x_b^{(2)},\cdots,x_b^{(a)}$的和等于$a(x_1+x_2+\cdots+x_b)$能被$ab=n$整除,故$n$为任何自然数时,命题都成立.

§4 高维推广综述

此题的一维形式可叙述为:任给$2n-1$个整数,一定有n个整数,它们的算术平均也是整数.最早由 Erdös, Ginzburg 和 Ziv 获得[1].很自然地,人们会想到二维甚至更高维的相应问题,对这一问题和高维推广上海科技出版社的田廷彦先生有如下综述.

所谓d维欧氏空间的整点,是指在坐标系中d个坐标均是整数的点.设$f(n,d)$是最小的正整数f,满足:任给f个d维整点,必定有其中n个d维整点,其矩心(centroid)也是一d维整点,所谓矩心,是指这样一点,它的每个坐标均是所讨论的一些点的对应坐标的算术平均.确定或估计$f(n,d)$,最初由 Harborth 提出[2].

$f(n,d)$的存在性是不容质疑的,因为用简单的抽屉原则等方法,就在 Harborth 的那篇论文中已经证得

$$(n-1)2^d+1 \leqslant f(n,d) \leqslant (n-1)n^d+1$$

$$f(n_1n_2,d) \leqslant f(n_1,d) + n_1(f(n_2,d) - 1)$$

另外,由前面我们有 $f(n,1) = 2n - 1$.

上述 $f(n,d)$ 的估计是很弱的,因为 $f(n,d)$ 的下限是一个关于 n 的一次多项式,而上限竟是一关于 n 的 $d+1$ 次多项式.但它也可推出两个精确结论

$$f(2,d) = 2^d + 1 \qquad f(2^k,d) = (2^k - 1)2^d + 1$$

种种迹象表明,$f(n,d)$ 应该是 $2^d(n-1)+1$;至少是 n 的一次多项式.

第一个猜想不完全正确,因为有反例;第二个猜想完全正确,下面详细说明一下.

首先,如果 $f(n,d) = 2^d(n-1)+1$,则应有 $f(3,3) = 17$,$f(3,4) = 33$,但实际上 $f(3,3) = 19$,$f(3,4) = 44$[3],对于 $d \geqslant 3$,$f(n,d)$ 的表达式甚至难以写出.幸好我们还有一个比较好的估计[4]

$$f(n,d) \leqslant (cd\ln d)^d n$$

c 是一个和 n 无关的正常数.

至于 $d = 2$ 时,种种迹象表明应有 $f(n,2) = 4n - 3$.对于 $4n - 4$,我们只要找这样 $4n - 4$ 个点:$n - 1$ 个 $(0,0)$,$n - 1$ 个 $(0,1)$,$n - 1$ 个 $(1,0)$,$n - 1$ 个 $(1,1)$,即为反例.

在 $f(n,1) = 2n - 1$ 的证明中,只要对所有素数 p,证明 $f(p,1) = 2p - 1$ 即可.$4n - 3$ 猜想也不例外,可惜至今只较轻松地证出对 $p = 2,3,5,7$,从而对一切 $n = 2^a3^b5^c7^d$,均有 $f(n,2) = 4n - 3$[3].事实上,硬要证明 $p = 11$ 时也正确是不难的,有了计算机,计算不成问题,但蛮算对一般的 p 毫无意义.

至于为何 $2n - 1$ 定理的方法不能用到 $4n - 3$ 猜想中去,这是因为 $2n - 1$ 定理的结论是很"奢侈"的,因在一般情况下,$2p - 1$(p 是素数)个整数任取 p 个的和是过 p 的完全剩余系(从而包括 0)的,而在 $4p - 3$ 中,就完全没这回事了.不过,人们总算还证明了[5]:$f(n,2) \geqslant 6n - 5$ 对一切整数 n 成立;以及 $f(p,2) \leqslant 5p - 2$ 对充分大的素数 p 成立.这些结果都要用较高深的工具.看来,为 $4n - 3$ 猜想找一个证明(特别是初等证明)非常困难.

关于 $f(n,d)$,人们还猜测[4]应有一正常数 c,满足 $f(n,d) \leqslant c^d n$.

当 n 很小而 d 很大时,问题也很有趣,已证明[6]:$f(3,d) = O(3^d)$,运用文献[7]中的方法,人们不难得到 $f(n,d) = O(n^d)$,当 $n(>2)$ 固定,而 d 趋于无大穷大时.

参考文献

[1] ERODöS P A, GINZBURG, ZIV A. Theorem in the additive number theory [J]. Bull Research Council Isreal, 1961(10):41-43.

[2] HARBORTH H. Ein Extremal-Problem fur Gitterpunkte, J.Reine Angew[J]. Math,

综述

1973(262/263):356-360.

[3] KEMNITZ A. On a lattice point problem [J]. Ars Combinaoria, 1983(16b):151-160.

[4] ALON N, DUBINER M. A lattice point and additive number theory [M]. combinators, 1993: 301-309.

[5] ALON N, DUBINER M. Zero-sum of prescribed size, in: Combinatorics, Paul Erdos is Enghty, Bolyai Society. Mathematical Studies [M]. Hungary: Keszthely, 1993:33-50.

[6] BROWN T C, BUHLER J C. A density version of a geometric Ramsey theorem. J. Comb. Theory, Ser. A, 1982(32):20-34.

[7] FURSTENBERG H, KATZNELSON Y. Anergodic Szemeredi theorem for IP-systems and combinatorial theory. J. d'Analyse math, 1985(45):117-168.

§5 附　录

后来高维东先生在留校任教后又继续了关于这一问题的研究，得到了更为一般的结果，并提出了若干猜想，我们将它作为附录.①

关于整数的堆垒性质

高维东
(东北师大数学系)

文[1]证明了：

任意 $2n-1$ 个整数中必存在 n 个数，其和为 n 之倍数. (T)

文[2]，[3]依次就 $k=2$ 和 k 为任意正整数先后证明了：

对任意 k 组整数 $\{a_i^{(j)}\}_{i=1}^{k(p-1)+1}$ $(j=1,2,\cdots,k)$，都存在互异的 $i_1,i_2,\cdots,i_p$，$1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_p\leqslant k(p-1)+1$ 使得

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{(j)} \equiv 0 \pmod p \quad j=1,2,\cdots,k,\ p\text{ 为素数} \tag{V}$$

文[2]，[3]的证明都用到了算术群的概念，本文前半部分用初等方法得到一个定理，(V)将作为该定理之推论给出；(T)将由该定理及文[1]的一个简单引理直接推出. 本文后半部分就(T)，(V)提出了更一般的猜想，并部分地证明了它们. 我们认为这些猜想的证明就是困难而有意义的.

一

以 z_n 表模 n 之剩余类环，$\oplus z_n$ 表 z_n 的 k 重直和，显见(T)，(V)可等价表述为：

---

① 1987年北京师范大学数学系的陶平先生用算术群也研究了同一问题，并在美国《数论杂志》上发表了这一结果.

Z_n 的任意 $2n-1$ 个元(允许重复)中必有 n 个和为0. (T′)

$\overset{k}{\oplus} Z_p$ 的任 $k(p-1)+1$ 个元(允许重复)中必有若干个和为0(p 为素数). (V′)

下面在谈到 $\overset{k}{\oplus} Z_n$ 的一个组元时,若不声明,均允许重复.

我们从一般问题入手,先以 $L_n(n>1)$ 记 Z_n 上关于未定元 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ 的一次齐次非零多元多项式全体,并以 M_n 记 L_n 的所有非空有限子集全体.考虑 $S \in M_n$, $S=\{f \mid f = a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_tx_t, a_i \in Z_n\}$, t 如此确定:至少有一 $f \in S$,使得相应 f 之 $a_t \neq 0$,显见 t 由 S 惟一确定,记为 $t(S)$.

k 为一整数,若 $S \in M_n$,对任一组 $b_i \overset{k}{\oplus} Z_n (i=1,2,\cdots,t, t=t(S))$ 都有:

$0 \in S(b_1,\cdots,b_t)=\{f(b_1,\cdots,b_t) \mid f \in S\}$,则称 S 为 (k,n) - 零集.于是(T′)、(V′)可分别叙述为

$\{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_n} \mid 1 \leqslant i_1,\cdots,i_n \leqslant 2n-1$,诸 i_j 互异$\}$ 为 $(1,n)$ - 零集 (T*)

$\{x_{i_1}+\cdots+x_{i_t} \mid 1 \leqslant i_1,\cdots,i_t \leqslant k(p-1)+1$,诸 i_j 互异,p 为素数$\}$ 为 (k,p) - 零集 (V*)

定理 1.1 判断一 $S \in M_n$ 是否为 (k,n) - 零集之充要条件为对 S 的任一 k - 划分(指并为 S,且两两不相交的 S 的 k 个子集;若这些子集都不空,则称它们为 S 的一个真 k - 划分) $S_1, S_2, \cdots, S_k$,必有一 $S_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 为 $(1,n)$ - 零集.

证明 必要性:若 $S_1,\cdots,S_k$ 为 S 的一个 k - 划分,但诸 S_j 均不是 $(1,n)$ - 零集,$0 \notin S_j(b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \cdots, b_t^{(j)})(t=t(S))$,当 $t > t(S_j)$ 时,对 $f \in S_j$,令相应于 f 之 $a_{t(S_j)+1}$, $a_{t(S_j)+2}, \cdots, a_t$ 全为0. $b_{(i)}^j \in Z_n(j=1,\cdots,k; i=1,\cdots,t)$,记

$$b_j = (b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, \cdots, b_i^{(k)}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant t$$

则 $b_i \in \overset{k}{\oplus} Z_n$,对任一 $f \in S$,因为 $\bigcup_{j=1}^{k} S_j = S$,故 f 属于某 $S_j(1 \leqslant j \leqslant k)$,从而知:$f(b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \cdots, b_t^{(j)}) \neq 0$. 而 $f(b_1,\cdots,b_t) = f(b_1^{(1)},\cdots,b_t^{(1)}), f(b_1^{(2)},\cdots, b_t^{(2)}),\cdots, f(b_1^{(3)},\cdots,b_t^{(3)}),\cdots, f(b_1^{(k)},\cdots,b_t^{(k)}) \neq 0$,从而 S 不为 (k,n) - 零集.于是必要性得证.

充分性:若 S 不是 (k,n) - 零集,令 $b_i \in \overset{k}{\oplus} Z_n$ 使得 $0 \notin S(b_1,\cdots,b_t)$. 设 $b_i = (b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, \cdots, b_i^{(k)})(i=1,\cdots,t)$,作

$$S_1 = \{f \in S \mid f(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \cdots, b_t^{(1)}) \neq 0\}$$

$$S_{j+1} = \{f \in S - \bigcup_{k=1}^{j} S_k \mid f(b_1^{(j+1)}, b_2^{(j+1)}, \cdots, b_t^{(j+1)}) \neq 0\} \qquad 1 \leqslant j \leqslant k-1$$

显见 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 两两不交,且均非 $(1,n)$ - 零集.对任一 $f \in S$,因为 $f(b_1,\cdots,b_t) \neq 0$,因此必有一 $j(1 \leqslant j \leqslant k)$ 使得 $f(b_1^{(j)},\cdots,b_t^{(j)}) \neq 0$,因此由 $S_1,\cdots,S_k$ 之作法知 $f \in \bigcup_{k=1}^{k} S_k$,故知 $\bigcup_{k=1}^{k} S_k = S$,于是充分性得证.

下面将给出一个很有用的判断:$S \in M_p$(p 为素数)为 (k,p) - 零集之充分条件,为此引入下面定义及记号:

$S \in M_n$,若有 $b_i \in Z_n(i=1,\cdots,t, t=t(S))$ 使 $S(b_1,\cdots,b_t)=\{a\}, a \neq 0$,则称 S 为 n - 可单集.如 $x_1+x_2, x_2+x_3, x_1+x_3$ 不是2 - 可单集,但为3 - 可单集.

$S \in M_n$，定义 $r(S) = \min\{l \mid$ 存在 S 的一真 l - 划分 $S_1, \cdots, S_l$，使诸 S_i 均为 n - 可单集$\}$. $r(S)$ 显然存在.

定理 1.2 $S \in M_n$，若有正整数 k 使得 $k(n-1)+1 \leqslant r(S)$，则 S 为 (k,n) - 零集.

证明 由定理1.1知，只须证 S 之任一 k - 划分 $S_1, \cdots, S_k$ 只必有一个为 $(1,n)$ - 零集. 反证，若 S 有一 k - 划分 $S_1, \cdots, S_k$ 均不为 $(1,n)$ - 零集，设 $b_i^{(j)} \in z_n (1 \leqslant j \leqslant k, 1 \leqslant i \leqslant t = t(S))$，$0 \notin S_j(b_1^{(j)}, \cdots, b_t^{(j)})$，而定义 S_{jl} 为

$$S_{jl} = \{f \in S_j : f(b_1^{(j)}, \cdots, b_t^{(j)}) = 1\} \qquad 1 \leqslant l \leqslant n-1$$

从诸 $S_{jl}(1 \leqslant j \leqslant k, 1 \leqslant l \leqslant n-1)$ 中去掉空集，设剩下 h 个集合，显见它们为 S 一真 h - 划分，且均为 n - 划分，且均为 n - 可单集，从而 $r(S) \leqslant h \leqslant k(n-1)$. 矛盾. 因此 S 为 (k,n) - 零集. 证毕.

现在我们来证明(T″)及(V″)，设 p 为素数，$A(m) = \{x_{i_1} + \cdots + x_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant m\} \in M_p$，我们有：

定理 1.3 $r(A(m)) = m$.

证明 显然若 $A, B, C \in M_p$，$A \cup B = C$，则 $r(C) \leqslant r(A) + r(B)$.

记 $A = \{x_m\} \cup \{x_m + A(m-1)\}(\{x_m + A(m-1)\} = \{x_m + y \mid y \in A(m-1)\})$，则 $r(A) = 1$，$A \cup A(m-1) = A(m)$，故有

$$r(A(m)) \leqslant r(A(m-1)) + 1$$

于是知 $r(A(m)) \leqslant m$.

若 $r(A(m)) < m$，那么必有 $A(m)$ 的一个真 $(m-1)$ - 划分 $A_1, \cdots, A_{m-1}$，诸 A_i 为 p - 可单集，因 p 为素数，故不妨设 $b_i^{(j)}(1 \leqslant j \leqslant m-1, 1 \leqslant i \leqslant m)$ 使得

$$A_j(b_1^{(j)}, \cdots, b_m^{(j)}) = \{1\}(1 = \bar{1})$$

因为 $\bigcup_{j=1}^{m-1} A_j = A(m)$，因此对任一 $f \in A(m)$，必有一 j 使得

$$1 - f(b_1^{(j)}, \cdots, b_m^{(j)}) = 0$$

于是有 $\prod_{j=1}^{m-1}(1 - f(b_1^{(j)}, \cdots, b_m^{(j)})) = 0, \forall f = x_{i_1} + \cdots + x_{i_r} \in A(m)$，因而有

$$\sum_{f \in A(m)} (-1)^{l(f)} \prod_{j=1}^{m-1} (1 - f(b_1^{(j)}, \cdots, b_m^{(j)})) = 0 \tag{7}$$

(其中 $l(f)$ 由 $f = x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_{l(f)}}$ 确定)

将式(7)左边看做 $b_i^{(j)}(j = 1, \cdots, m-1; i = 1, \cdots, m)$ 之多项式，展开并合并同类项，考察其中任一项

$$\beta b_{i_1}^{(j_1)} \cdots b_{i_r}^{(j_r)} \tag{8}$$

式中，β 为系数；诸 i_r 互异；$1 \leqslant i_1, \cdots, i_r \leqslant m$.

若式(2)为常数项，则 $-C_m^1 + C_m^2 - \cdots + (-1)^m C_m^m = -1$.

若式(2)不为常数项，则 $\beta = (-1)^r(-1)^i(C_{m-i}^0 - C_{m-i}^1 + \cdots + (-1)^{m-i} C_{m-i}^{m-i}) = 0$，于是式(1)左端 $= -1$ 矛盾. 故 $r(A(m)) = m$.

特别地，$A(k(p-1)+1) = k(p-1)+1$，因而由定理 1.2 知：

推论 1.4 $A(k(p-1)+1)$ 为 (k,p) - 零集.

此即(V″),也即(V).

文献[1]主要证明了(T″)在 $n=p$ 为素数时成立,再结合引理:"若(T″)对 $n=a$ 和 b 都成立,则对 $n=ab$ 成立"便整个说明了(T″),下面我们推出(T″)在 $n=p$ 为素数时成立.

由定理 1.2 知,只须证 $B(2p-1)=\{x_{i_1}+\cdots+x_{i_p}\mid 1\leqslant i_1\leqslant i_2<\cdots<i_p\leqslant 2p-1\}$ 满足 $r(B(2p-1))\geqslant p$.

显见 $r(A(2p-1)-B(2p-1))\leqslant p-1$(注意若 $A=\{a_1x_1+\cdots+a_tx_t\mid a_1+a_2+\cdots+a_t\equiv r(\mathrm{mod}\ p),r\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p),r$ 一定$\}$,$A\in M_p$,则 A 为可单集),又 $r(A(2p-1))\leqslant r(B(2p-1))+r(A(2p-1)-B(2p-1))$,而由定理 1.3 知 $r(A(2p-1))=2p-1$,故 $r(B(2p-1))\geqslant p$,证毕.

二

有事实支持我们作下面诸猜想:

猜想 2.1 $\{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_r}\mid 1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant k(n-1)+1\}$ 是 (k,n) - 零集 $(n>1)$.

猜想 2.1 显然一般化了(V″).

猜想 2.2 $B(2^k(n-1)+1)=\{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_n}\mid 1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n\leqslant 2^k(n-1)+1\}$ 是 (k,n) - 零集 $(n>1)$.

猜想 2.2 是(T″)的一般化.

猜想 2.3 $C((2^k-1)(n-1)+1)=\{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_r}\mid 1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant(2^k-1)(n-1)+1,r=1,2,\cdots,n\}$ 是 (k,n) - 零集.

上面三个猜想中提到了 $k(n-1)+1,2^k(n-1)+1,(2^k-1)(n-1)+1$ 不能再小.

由文[1]之引理 3(三)之证明易知,对猜想 2.2 和 2.3 有相应的类似引理,因而只须对 $n=p$ 为素数证明猜想 2.2 和 2.3.并且我们有下面进一步的猜想.

猜想 2.4 $r(B(2^k(p-1)+1))=k(p-1)+1$

猜想 2.5 $r(C((2^k-1)(p-1)+1))=k(p-1)+1$

(上面 p 均为素数)

显然若能证明猜想 2.4 和 2.5 也就相应地证明了猜想 2.2 和 2.3.

容易证明,$p=2$ 时,猜想 2.4 和 2.5 均成立.我们就猜想 2.4 证明如下

$$p=2,p-1=1$$

先证

$$r(B(2^k(2-1)+1))\geqslant r(B(2^{k-1}(2-1)+1))+1$$

为方便起见记 $B_k=B(2^k(2-1)+1)$,设 $S_1,\cdots,S_l$ 是 B_k 的一个真 l - 划分,且诸 $S_1,\cdots,S_l$ 为可单集,设 $b_1,\cdots,b_t(t=2^k(2-1)+1)\in\mathbb{Z}$ 且使得 $S_1(b_1,\cdots,b_t)=\{1\}$,因为 $t=2^k+1$,因此不妨令 $b_1=b_2=\cdots=b_{2^{k-1}+1}$,于是知 $B_{k-1}\subset S_2\cup S_3\cup\cdots\cup S_l$,所以 $l-1\geqslant r(B_{k-1})+1$,由 $S_1,\cdots,S_l$ 之任意性知

$$r(B_k)\geqslant r(B_{k-1})+1$$

于是知

338 综述

$$r(B_k) \geqslant r(B_1) + k - 1$$

显见 $r(B_1) = 2$，故 $r(B_k) \geqslant k + 1$.

又 $\overset{k}{\bigoplus} x_2$ 的全体元(共 2^k 个)中无两个和为 0，所以 $r(B_k - \{x_{2^k+1} + x_i \mid i = 1, \cdots, 2^k\}) \leqslant k$，所以 $r(B_k) \leqslant k + 1$. 于是 $r(B_k) = k + 1$ 证毕.

参考文献

[1] 单墫. 初等数论中的一个猜测[J]. 数学进展，1983，4：299-301.

When the late Sophus Lie was asked to name the characteristic endowment of the mathematician, his answer was the following quaternion: fancy, energy, self - confident, self - criticism.

—— 索福斯·李

关于几道培训题的高等背景

刘培杰

§1 几道数学竞赛培训题

先来看三道复数的竞赛培训试题.

试题 1 已知 $z, a, x \in \mathbf{C}$, $x = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$,且 $|z| = 1$,求证:$|x| = 1$.

试题 2 证明:若对 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ 成立着 $|z_1 - \bar{z}_2| = |1 - z_1 z_2|$,则 $|z_1|$, $|z_2|$ 中至少有一个等于 1.

试题 3 设 $z, w \in \mathbf{C}$,且 $z \neq w$, $|z| = 2$,求 $\left|\frac{z - w}{4 - \bar{z}w}\right|$ 的值.

这三个问题的共同之处在于都出现形式 $\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$,在试题 2 中只是将 z_2 令为 $\bar{z}_2$

$$\left|\frac{z_1 - \bar{z}_2}{1 - \bar{z}_1 \bar{z}_2}\right| = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{1 - \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{|1 - z_1 z_2|}$$

在试题 3 中令 $z_1 = \frac{z}{|z|}$, $z_2 = \frac{w}{2}$,则 $z = 2z_1$, $w = 2z_2$ 代入 $\left|\frac{z - w}{4 - \bar{z}w}\right|$ 中得 $\left|\frac{2z_1 - 2z_2}{4 - 4\bar{z}_1 z_2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|$.

再看一道培训讲座例题(《中学生数学》2005 增刊第六讲复数,长沙市雅礼中学杨日武).

设 $|a| < 1$,对复平面上任何点 z, $\left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right|$ 或者小于 1,或者等于 1,或者大于 1,从而整个平面分成三个子集.所述的条件等价于

$$|z - a|^2 \lesseqgtr |1 - \bar{a}z|^2 \text{ 或 } (1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) \lesseqgtr 0$$

第一个集合是开圆盘 $|z| < 1$,第二个集合是单位圆周 $|z| = 1$,第三个集

合是闭单位圆盘的外部 $|z|>1$,对于 $z=\infty$,该表达式的值为 $|a|^{-1}$,从而 $z=\infty$ 属于第三个集合.

§2 保角映射

一般地说,在域 D 定义的函数 $w=f(z)$,把 D 内的曲线

$$C:z(t)=x(t)+\mathrm{i}g(t)\qquad a\leqslant t\leqslant b$$

映射为 w 平面的曲线

$$\Gamma:f(z(t))=f(x(t)+\mathrm{i}g(t))\qquad a\leqslant t\leqslant b$$

称 Γ 为在 f 下 C 的像(图 1).

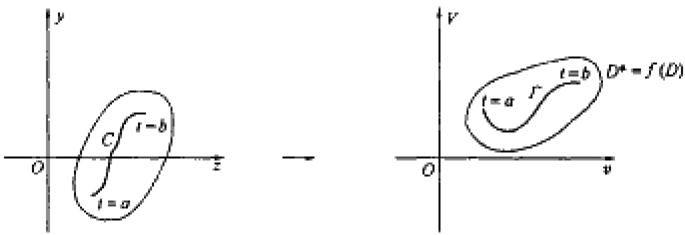


图 1

下面我们建立保角映射的概念:

设 C_1,C_2 为通过 z_C 的两条光滑曲线,在 $w=f(z)$ 下,它们在 w 平面的像为 Γ_1,Γ_2,当在 z_0 处 C_1,C_2 的切线夹角,与 $w_0=f(z_0)$ 处 Γ_1、Γ_2 的切线的夹角,包括角的取向在内相等时,则称 $w=f(z)$ 在 z_0 保角映射,最容易而且基本的保角映射即一次映射

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0)$$

这样类型的有理数称为一次函数,由此函数决定的从 z 平面到 w 平面的映射称为一次映射.

一次映射具有下列重要性质:

定理 1 (圆圆对应)一次映射将 z 平面上的圆变为 w 平面上的圆,但直线看做圆的一种.

定理 2 (镜像原理)如在一次映射下 z 平面的圆 O 变为 w 平面上的圆 c',则关于圆 O 互相处于镜像位置的两点 P,Q 变为关于圆 O' 处于镜像位置的两点.

利用以上两定理可证明 1920 年 A. Winternitz, 在 Monatsh Math. Vol 30:123, 证明的如下结论.

设 C 是单位圆内的一个圆周,则存在单位圆到其自身的形如

$$w = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-az}$$

的变换,它把圆周 C 映射到以原点为心的圆周.

证明 按假设,沿圆周 C 我们有 $\left|\frac{z-a}{1-az}\right|=$ 常数,即 a 和 $\frac{1}{a}$(若 $a=0$,则为 0 和 ∞)是关于 C 以及单位圆周公共的调和点对,设 z_0 表示 C 的圆心,r 为其半径,$z_0\neq 0$, $r<1-|z_0|$,则 $a(|a|<1)$ 满足二次方程

$$(a-z_0)\left(\frac{1}{a}-\bar{z}_0\right)=r^2 \text{ 或 } (|a|-|z_0|)\left(\frac{1}{|a|}-|z_0|\right)=r^2$$

$\arg a=\arg z_0$, α 是任意的.

§3 一道西德竞赛题

上述保形变换在竞赛试题中时有出现:

西德 1981 年数学竞赛第二试有一题为:

试题 4 如果一个平面到其自身上的一一映射将每一个圆变换为一个圆. 证明:该变换一定将每一条直线变换为一条直线.

注 一个平面到其自身上的一一映射是这样一种映射,它满足:

(1) 将平面上的每一个点惟一地映照为平面上的某一点;

(2) 不同的点映照为不同的点;

(3) 平面上每一点都是某一点的象点.

证明 设此平面为 π,此平面 π 上的那个一一映射记为 $f(\lambda)$,其逆映射记为 $f^{-1}(\pi)$,显然它也是一个平面 π 上的一一映射,下面我们只需证:

(1) 设平面 π 上有一点 A,且 $f(A)=A'$,那么一定有

$$f(\text{过 } A \text{ 点的一条直线 } L)\supseteq \text{过 } A' \text{ 点的某条直线 } L'$$

这是因为我们若过 A 点作一圆 B,使 B' 和 L 相切(图 2),由假设可知,圆 B 一定被 f 映射为另一个圆 B',亦即

$$f(B)=B'$$

因为 $f(A)=A'$,所以圆 B' 一定过 A' 点,过 A' 点作圆 B' 的切线 L',我们就是要证明

$$f(L)\supseteq L'$$

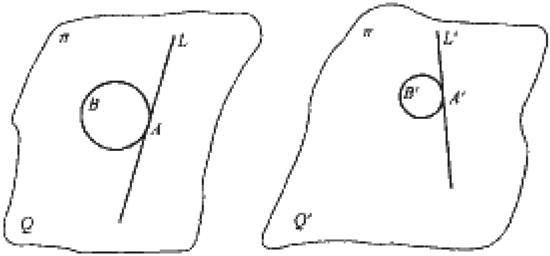


图 2

因为我们把平面 π 上除直线 L 以外的部分记为 Q，直线 L' 以外的部分记为 Q'，这就有

$$L \cap Q' = \Phi \qquad \pi = L \cap Q$$
$$L' \cap Q = \Phi \qquad \pi = L' \cap Q'$$

因为平面 π 上 Q 中的每一点，若不是 B 上的点，此点记为 C，那么一定可以作一圆 D，使 D 过 A，C 两点，而且与圆 B 相切，因为 f 将圆映射为圆，若记 $f(D)=D'$，那么 D' 一定是一圆，而且此圆过 A'，亦一定与圆 B' 相切，因圆 B 与圆 D 只有一个交点，所以圆 B' 与圆 D' 亦只能有一个交点，因此圆 D' 与圆 B' 相切于 A'. 再记 $f(C)=C'$，那么 C' 一定在圆 D' 上(图 3)，也就是 C' 一定在 Q' 内，所以

$$f(Q) \subseteq Q'$$

因为 $\pi = f(Q) \cup f(L)$，而且

$$f(a) \cap f(L) = \Phi$$

所以

$$f(L) \supseteq L'$$

这也就是 f(过 A 点的一条直线 L) $\supseteq$ 过 A' 点的某条直线 L'.

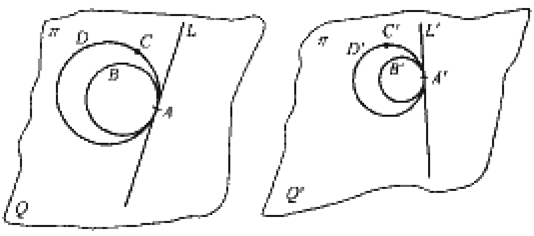


图 3

(2) 我们要证明：f^{-1} 亦是将圆映射为圆的，设平面上有一圆 E'，其上有三

点 H_1'，H_2'，H_3'，设

$$H_1 = f^{-1}(H_1') \qquad H_2 = f^{-1}(H_2') \qquad H_3 = f^{-1}(H_3')$$

我们首先证明一定可以选择 H_1'，H_2'，H_3'，使 H_1，H_2，H_3 三点是不会共线的. 因为否则的话，对圆 E' 上的任意三点 H_1'，H_2'，H_3'，一定有使 H_1，H_2，H_3 共线，固定 H_1'，H_2'，由 H_1，H_2 确定的直线记为 M. 这样，也就是 $f^{-1}(E') \subseteq M$，从而有 $E' \subseteq f(m)$，但由(1) 知 $f(m) \subseteq$ 某直线，因此有

$$E' \subseteq f(m) \subseteq \text{某直线}$$

这样 $E' \subseteq$ 某直线，但因直线决不能包含圆，所以导致矛盾，故而一定存在圆 E' 上的三点，H_1'，H_2'，H_3'，使 H_1，H_2，H_3 三点不共线，这样过 H_1，H_2，H_3 三点可以确定一个圆 E(图 4). 我们要证明 $f^{-1}(E') = E$. 这是因为 $f(E)$ 一定是一个圆，而且此圆过 H_1'，H_2'，H_3' 三点. 所以此圆一定是 E'，所以 $f(E) = E'$，也就是 $E = f^{-1}(E')$. 所以 f^{-1} 一定将圆映射为圆.

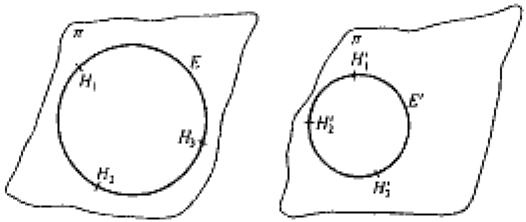


图 4

(3) 现在我们证明：f(直线) = 直线. 设平面 π 上有一条直线 L，由(1) 知 $f(L)$ 一定包含一条直线 L_1'，亦即

$$f(L) \supseteq L' \tag{1}$$

再因为由(2) 可知，f^{-1} 亦是一个平面 π 上的一一映射，而且亦是把圆映射为圆，所以同样有

$$f^{-1}(L') \supseteq L \tag{2}$$

这也是

$$L' \supseteq f(L)$$

这样结合式(1) 与式(2)，便得

$$f(L) \supseteq L' \supseteq f(L)$$

亦即

$$f(L) = L'$$

也就是

$$f(\text{直线}) = \text{直线}$$

值得指出的是保角映射在应用方面也大有前途，现在在微波通信器材设计中已经有了直接应用(见《现代数学的进展》自然杂志，1979 年第 6 期).

§4　Schwarz 引理

复变函数论中一个基本定理称为 Schwarz 引理.

令 $D = \{z \mid |z| < 1\}$,Schwarz 引理说:如果 $f: D \to C$ 在 D 内解析,$|f(z)| \leqslant 1$,并且 $f(0) = 0$,那么:

(1) 在 D 内,$|f(z)| \leqslant |z|$;

(2) 如果对于 $z_0 \in D - \{0\}$,$|f(z_0)| = |z_0|$,那么在 D 内,$f(z) = \lambda z$,其中 λ 是模为 1 的复常数.

在 Schwarz 引理中,对函数及其定义域作了一些特殊的假设,应用分式线性映射,可以得到比较一般的结果.

定理 3　设 $f: D \to C$ 在 D 内解析,$|f(z)| \leqslant 1$,并且 $f(z_0) = w_0$,其中 $z_0 \in D$,那么在 D 内

$$\left|\frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}\right|$$

在上式中,只有当 $f(z)$ 是分式线性映射时,等式才可能成立.

这个定理曾作为复分析的试题出现在美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)1986 年秋季的博士资格考试中(见《数学译林》1990 年第四期 358).

在 1985 年春季的试题中也出现了一道以此为素材的问题.

试题 5　对 $|\alpha| < 1$,设

$$T_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}$$

$\Delta\alpha = \{T_\alpha z \mid |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$ 为圆盘. $r_\alpha = \Delta\alpha$ 之半径,$d_\alpha = \inf\{1 - |w| \mid w \in \Delta\alpha\} = \Delta\alpha$ 到 $\{|w| = 1\}$ 之距离. 试证:存在有限正常数 a 和 b,使得

$$a \leqslant \inf_{|\alpha|<1} \frac{r_\alpha}{d_\alpha} \leqslant \sup_{|\alpha|<1} \frac{r_\alpha}{d_\alpha} \leqslant b$$

§5　同时代的两位 Schwarz

中文译名为施瓦兹的著名数学家共有三位.

在数学史上有两位同时代的 Schwarz,其中一位是捷克数学家 Schwarz,1914 年 5 月 18 日生,曾任捷克科学院院士、斯洛伐克工学院教授. 他是半群论的创立

者之一．尤其在拓扑半群论方面作出了贡献，曾获得捷克国家奖金和劳动勋章．

我们要介绍的是另一位德国的 Schwarz，他 1843 年 1 月 25 日生于赫尔姆斯多夫．1860 年进入柏林工业学院学习，1864 年毕业并获得哲学博士学位，他开始学习化学，后受库默尔和外尔斯特拉斯影响转攻数学，1867 年任助理教授，两年后转为正教授，在苏黎士瑞士工业大学任教，1875 年到哥廷根主持数学讲座，1892 年作为外尔斯特拉斯的继任者赴柏林大学就职．任教期间当选为普鲁士科学院和巴伐利亚（Bararian）科学院院士，并和库默尔的一个女儿结了婚．Schwarz 作为数学家具有极强的几何直觉．

1884 年，Schwarz 对三维空间的等周问题，提供了严密的解法．并且他还用纯几何的方法解决了如下问题：求每个顶点都在已知锐角三角形的三条边上，且周长最短的三角形．Schwarz 得到的结论是此三角形的三个顶点是已知锐角三角形三条高的垂足．1880 年，Schwarz 在给埃尔米特的信中指出，当时教科书中的曲面面积概念有问题，并举出一个著名的反例．根据这个例子证明了，用当时通常采用的曲面面积的概念会得出一个确定的圆柱面的面积的值可以是任何实数，甚至是无穷大的结论．于是他用测度的概念重新给出了曲面面积的合理的定义．

另外一个容易弄混的数学家也译为施瓦兹，但他的名字中多了一个字母 t 即 Schwartz，这是一位法国大数学家，现代概率论的主要奠基人莱维是他的岳父，施瓦兹是法国布尔巴基学派的创始人，曾获 1950 年第二届菲尔兹奖．

§6　一个伯克利问题

1977 年加利福尼亚大学伯克利分校数学系开始了面向博士学位的数学笔试，作为对博士生最主要的要求之一．

在 1991 年的试题中有一题为：

试题 6　令函数 f 在单位圆盘中是解析的，具有 $|f(z)|\leqslant 1$ 且 $f(0)=0$，假设在 $(0,1)$ 中有一个数 r 使得 $f(r)=f(-r)=0$，证明

$$|f(z)|\leqslant |z|\left|\frac{z^2-r^2}{1-r^2z^2}\right|$$

证　Schwarz 引理意味着函数 $f_1(z)=\frac{f(z)}{z}$ 满足 $|f_1(z)|\leqslant 1$，由前面知，线性分式映射 $z\mapsto\frac{z-r}{1-\bar{r}z}(r\in\mathbf{R}\Rightarrow\bar{r}=r)$ 将单位圆盘映满它自身，应用

Schwarz引理到函数 $f_2(z)=f_1\left(\frac{z-r}{1-rz}\right)$ 上，我们断言函数 $f_3(z)=\frac{f_1(z)}{\frac{z+r}{1+rz}}$ 满足 $|f_3(z)|\leqslant 1$，类似地，(映射 $z\mapsto\frac{z+r}{1+rz}$ 将单位圆映满它自身，) 把 Schwarz 引理应用于函数 $f_4(z)=f_3\left(\frac{z+r}{1+rz}\right)$ 意味着函数 $f_5(z)=\frac{f_3(z)}{\frac{z-r}{1-rz}}$ 满足 $|f_5(z)|\leqslant 1$，于是，合在一起有

$$|f(z)|\leqslant|z|\left|\frac{z-r}{1-rz}\right|\left|\frac{z+r}{1+rz}\right||f_5(z)|\leqslant$$

$$|z|\left|\frac{z-r}{1-rz}\right|\left|\frac{z+r}{1+rz}\right|$$

即为所求的不等式.

另外还有许多类似的问题：

问题1 设 f 是解析函数，对于 $|z|<1$ 有 $|f(z)|<1$，考虑函数 $g:D\to D$，它的定义是

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}$$

其中 $a=f(0)$，证明：对于 $|z|<1$ 有

$$\frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)||z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|}$$

问题2 设 f 在 $D=\{z\mid |z|<1\}$ 内是解析的，并且假设对于 D 内所有的 z 都有 $|f(z)|\leqslant M$.

(1) 如果对于 $1\leqslant k\leqslant n$ 有 $f(z_k)=0$，证明：对于 $|z|<1$，有

$$|f(z)|\leqslant M\prod_{k=1}^{n}\frac{|z-z_k|}{|1-\bar{z}_kz|}$$

(2) 如果对于 $1\leqslant k\leqslant n$ 有 $f(z_k)=0$，其中每一个 $z_k\neq 0$，且 $f(0)=me^{i\theta}(z_1z_2\cdots z_n)$，求关于 f 的公式.

设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内正则，有零点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 又设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内有界，则在 $|z|<1$ 内成立更强的不等式

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1z}\cdot\frac{z-z_2}{1-\bar{z}_2z}\cdots\frac{z-z_n}{1-\bar{z}_nz}\right|M$$

等号在开圆盘 $|z|<1$ 的每一点上或者都成立，或者都不成立.

§7 中国大学生夏令营试题

与美国普特南竞赛相应有中国大学生数学夏令营，该夏令营由中国科学院数学研究所举办，命题者多为中国著名数学家．可惜只办了十届就停止了．

在其试题中我们也发现了保角映射 $w=\frac{z+z_0}{1+\bar{z}z_0}$.

以下的试题及解答选自许以超、陆柱家主编的《中国大学生数学夏令营题解》．

试题7 设 $f(z)$ 为单位圆盘 $D=\{z\in C\mid |z|<1\}$ 上的全纯函数，在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)|\leqslant 1$，设 $z_0\in D$ 是 $f(z)$ 的一个 m 重零点，z_0 满足

$$|z_0|\leqslant\frac{m-1}{m}$$

其中 m 是正整数，$m\geqslant 2$，试证

$$|f(-z_0)|<e^{-\frac{1}{2m}}$$

式中，e 为自然对数的底．

（第四届全国大学生数学夏令营试题）

证 考虑到单位圆盘 D 到自身上的一一保角变换

$$w=\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}$$

于是在 D 上有全纯函数

$$g(z)=f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right)$$

由题设，于是有 $|g(z)|\leqslant 1$ 在 $|z|=1$ 上成立，令 z_0 为 $f(z)$ 之 m 重零点，而 $g(0)=f(z_0)$，所以原点为 $g(z)$ 的 m 重零点．在原点附近将 $g(z)$ 展成幂级数，便知道函数

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{g(z)}{z^m} & z\neq 0 \qquad |z|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{m!}\cdot\dfrac{d^mg(z)}{dz^m}\Big|_{z=0} & z=0\end{cases}$$

在单位圆盘 D 上全纯，且在单位圆周 $|z|=1$ 上有

$$|h(z)|=|g(z)|\leqslant 1$$

当 $h(z)$ 为常数时，有 $g(z)=cz^m$，其中 c 为复数，且 $|c|\leqslant 1$；当 $h(z)$ 不是常数时，由最大模原理可知在单位圆盘 D 上

$$|h(z)|<1$$

即

$$|g(z)|<|z|^m$$

总之,有

$$|g(z)|\leqslant|z|^m \qquad \forall z\in D$$

即

$$\left|f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right)\right|\leqslant|z|^m \qquad \forall z\in D$$

令

$$z'=\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$$

有

$$z'+z'\bar{z}z_0=z+z_0$$

即有

$$(1-\bar{z}_0 z')z=z'-z_0$$

令 $|z_0|<1$, $|z'|<1$,所以

$$z=\frac{z'-z_0}{1-\bar{z}_0 z'}$$

这证明了

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right| \qquad \forall z\in D$$

特别地

$$|f(-z_0)|\leqslant\left|\frac{-2z_0}{1+|z_0|^2}\right|^m=\frac{2^m|z_0|^m}{(1+|z_0|^2)^m}$$

注意到题设

$$|z_0|\leqslant\frac{m-1}{m}$$

记 $|z_0|=x$,有 $0\leqslant x\leqslant\frac{m-1}{m}$,而对 $k(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ 有 $k'(x)>0$, $0\leqslant x\leqslant\frac{m-1}{m}$,所以在区间$[0,\frac{m-1}{m}]$上,$k(x)$单调递增,因此在此区间上

$$k(x)\leqslant\frac{\frac{2(m-1)}{m}}{1+(\frac{m-1}{m})^2}=\frac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2}=\frac{2m^2-2m}{2m^2-2m+1}$$

即证明了

$$|f(-z_0)|\leqslant\left(\frac{2m^2-2m}{2m^2-2m+1}\right)^m=\left(\frac{2m^2-2m+1}{2m(m-1)}\right)^{-m}=$$
$$\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)^{-m}$$

为了证 $|f(-z_0)|<e^{-\frac{1}{2m}}$,需要证

$$\lg|f(z_0)|<-\frac{1}{2m}$$

今已知

$$\lg|f(-z_0)|\leqslant -m\lg\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)$$

问题化为要证

$$\lg\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)>\frac{1}{2m^2}$$

事实上，考虑函数

$$l(x)=\lg(1+x)-\frac{m-1}{m}x$$

有
$$\frac{\mathrm{d}l(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x}-\frac{m-1}{m}$$

因此当 $0<x<\frac{1}{m-1}$ 时有 $\frac{m-1}{m}<\frac{1}{1+\lambda}<1$，所以 $\frac{\mathrm{d}l(x)}{\mathrm{d}x}>0$，即在开区间 $(0,\frac{1}{m-1})$ 中 $l(x)$ 严格单调递增，令 $l(0)=0$，所以由

$$0<\frac{1}{2m(m-1)}<\frac{1}{m-1}$$

得
$$\lg\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)-\frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{2m(m-1)}>0$$

即
$$\lg\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)>\frac{1}{2m^2}$$

注　若设 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点有 $m-1$ 重零点，则题设不成立，事实上，令

$$z_0=\frac{m-1}{m}$$

$$f(z)=\left(\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right)^{m-1}$$

则
$$f(-z_0)=\left(\frac{-2z_0}{1+|z_0|^2}\right)^{m-1}$$

因此

$$|f(-z_0)|=\left(\frac{\frac{2(m-1)}{m}}{1+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2}\right)^{m-1}=\left(\frac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2}\right)^{m-1}=$$

$$\left(\frac{2m^2-2m+1}{2m^2-2m}\right)^{-m+1}=\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)^{1-m}>e^{-\frac{1}{2m}}$$

§8　与非欧几何的联系

欧几里得(Euclid)《几何原本》中的第五公设(即平行公设)曾引起人们广泛的关注.人们试图用其他公设证明它,但都失败了.1837年Lobaceviskii提出了与欧几里得第五公设不同的公设,并在此基础上建立了一种新几何,打破了传统欧氏几何一统天下的局面.然而,Lobaceviskii几何在开始时很长一段时间内不为人们所接受,因为它没有一个实在模型.第一个这样的模型是Beltrmi给出的,将Lobaceviskii几何局部地在伪球面上实现,后来,klein与Poincaré先后给出了非欧几何的整体模型,使Lobaceviskii几何在单位圆内实现,从此人们对它有了某种真实感,Poincaré的模型尤其受到人们的关注,这是因为解析函数在Poincaré度量下有许多优美的性质.

Poincaré将单位圆Δ设想为一张Lobaceviskii平面,单位圆内与单位圆周正交的圆弧视做非欧直线,两条非欧直线之交角就是两圆弧在交点处的夹角,非欧圆同定义为到一点(非欧圆心)非欧距离等于常数的点的集合,它实际上也是一个欧氏圆周,但一般说来非欧圆心与欧氏圆心不重合,在此观点之下,Lobaceviskii几何中的所有命题都变成了单位圆内关于圆弧或圆周的命题,成为一种真实自然的几何现象.这就是为什么将Poincaré度量称做非欧度量的缘由.

G.Pick对A.Winternitz定理作了一个几何解释:把z平面上的单位圆盘映射成w平面上的单位圆盘,并且把前一圆盘内一点z_0映射成后一圆盘的原点的分式线性映射是

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \tag{1}$$

式中,α是一实数.我们也可把z和w两平面上的单位圆盘看做z平面上的同一单位圆盘D,于是式(1)可看做把D中的点映射成D中的点w,而把D整体保持不变的分式线性映射.让z_0及α变动,全部式(1)型的分式线性映射构成一个群G.我们可以在D内建立一种非欧几何,即把D看成一种非欧平面的像,在D内任意两点间,可定义非欧距离,它在群G中的映射下保持不变.

设G中的映射(1)把D内不同两点z_1及z_2映射成D内不同两点w_1及w_2,通过计算得到

$$w_1 - w_2 = e^{i\alpha}\frac{(z_1 - z_2)(1 - |z_0|^2)}{(1 - \bar{z}_0 z_1)(1 - \bar{z}_0 z_2)}$$

$$1-\bar{w}_1 w_2=\frac{(1-\bar{z}_1 z_2)(1-|z_0|^2)}{(1-z_0\bar{z}_1)(1-\bar{z}_0 z_2)}$$

从而

$$\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|=\left|\frac{w_1-w_2}{1-\bar{w}_1 w_2}\right| \tag{2}$$

于是

$$\delta(z_1,z_2)=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right| \tag{3}$$

是群 G 中映射下的不变式.

在式(2)中令 $z_1\to z_2$,可以推出:在 D 内

$$\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|=\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}$$

亦即

$$\frac{|\mathrm{d}w|}{1-|w|^2}=\frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

于是可取在群 G 中映射下不变的微分式

$$\mathrm{d}s=\frac{z|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

作为双曲长度(一种非欧长度)元素,在这种度量下,D 内任何可求长曲线 γ 有非欧长度

$$\int_\gamma \frac{z|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

它在 G 中映射下不变.

关于这个 G.Pick 的观点可参见余家荣、路见可主编的《复变函数专题选讲(一)》高等教育出版社,1993 年.进一步论述可见 Mats Andersson 著《复分析中的若干论题》(《Topics in Complex Analysis》清华大学出版社:118 - 121),详细推导见附录.

§9　与多复变函数论的联系

Schwarz 引理的研究一直是多复变数函数论中一个活跃的领域,我们知道单复变函数的 Schwarz 引理是考虑在单位圆 B 内解析的函数 $f(z)$,当 $|f(z)|\leqslant 1$,且 $f(0)=0$ 时,则有 $|f(z)|\leqslant|z|$,原来 Schwarz 的证明仅仅对 $f(z)$ 是单叶的情形,而现在为人们所熟知的形式和证明实际上是来源于 C. Carathéodory,而

Pick 则给出了 Schwarz 引理的几何含义，即若 $f: B \to B$ 是解析映照，则对于 B 中任两点 z_1, z_2，有

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leqslant \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| \tag{4}$$

这等价于对任一点 $z \in B$，有

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2} \tag{5}$$

等式在一点成立当且仅当 f 是把 B 一一地映为 B.

第一个不等式的几何含义是在解析映照下非欧距离缩小，第二个不等式是非欧体积缩小，这两个结论在单复变数中是等价的.

由于 Schwarz 引理在单复变函数论中应用很广泛，所以很多人都致力于把它推广到多复变数，有的人研究距离缩小，有的人研究体积缩小，这两者在多复变数中通常是不等价的.

如 Carathéodory 在 C^n 的有界域 D 中引进度量

$$M_D(a, b) = \sup_{\varphi \in \varepsilon(D)} E(\varphi(a), \varphi(b))$$

其中

$$E(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \left|\frac{t_2 - t_1}{1 - \bar{t}_1 t_2}\right|}{1 - \left|\frac{t_1 - t_2}{1 - \bar{t}_1 t_2}\right|}$$

表示单位圆 B 中两点 t_1, t_2 的非欧距离. $\varepsilon(D)$ 表示在 D 中解析的函数适合 $|\varphi| < 1$ 的集合，a, b 为 D 中任意两点，这度量被称为 Carathéodory 度量，它是距离缩小的，即若 $f: D \to D$ 是解析映照，则对任两点 $a, b \in D$ 有 $M_D(f(a), f(b)) \leqslant M_D(a, b)$ 在一般情形仅知道 $M_D(a, b)$ 是 a 与 b 的连续函数，而并不是 a 与 b 的可微分函数，因此不能由此导出一个微分度量，故不能由此直接得出体积缩小的结论.

§10 复函数的逼近

线性逼近的问题可作如下描述，设 φ 是定义在某个确定空间 A 上函数的集，f 是定义在 A 上的函数，问能否求得一个接近于函数 f 的线性组合 $P = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$（其中 $\varphi_i \in \varphi$）？这里有两个先决的问题：其一是选择集 φ，其二是确定 p 与 f 之间偏差的度量.

设 z 是实或复标量的 Banach 空间（完备的赋范线性空间），又设 $x_1, \cdots, x_n$

是 z 中给定的向量,考察形如 $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 的线性组合(多项式),其中 a_i 是标量. 对于每个 $x \in z$,x 借助多项式 y 的逼近阶 $E_n(x)$ 为

$$E(x) = E_n(x) = \inf_{y} \| x - y \|$$

倘若下确界为某个 $y = y_0$ 所达到,则称此 y_0 为 x 的最佳逼近线性组合,或最佳逼近多项式.

考察在圆 $A: |z| \leqslant 1$ 上的函数 $f(z) = (z - \alpha)^{-1}$,α 是复常数,且 $|\alpha| > 1$,设

$$P_n(z) = \frac{1}{z - \alpha} - Cz^n \frac{\bar{\alpha}z - 1}{z - \alpha} = \frac{1 - Cz^n(\bar{\alpha}z - 1)}{z - \alpha} \tag{6}$$

显然,P_n 是 n 阶多项式当且仅当 $1 - C\alpha^n(\bar{\alpha}\alpha - 1) = 0$,于是,设

$$C = \frac{\alpha^{-n}}{|\alpha|^2 - 1} \tag{7}$$

1959 年 Al'per 在《Uspehi》上发表了题为《Asymptotic Values of Best Approximation of Analytic Functions in a Complex Domain》的论文,他证明了如下:

Al'per 定理 设 P_n 和 C 由式(6)、(7)定义,那么 P_n 是 f 的最佳逼近多项式,且

$$E_n(f) = C$$

证明 对于 $|z| = 1$,有

$$\left| \frac{\bar{\alpha}z - 1}{z - \alpha} \right| = \left| \frac{(\alpha/z) - 1}{z - \alpha} \right| = 1$$

又因为 $\frac{\bar{\alpha}z - 1}{z - \alpha}$ 是 $|z| \leqslant 1$ 中的解析函数,故当 $|z| < 1$ 时,此表达式不超过 1,设 $F = f - P_n$,且设 A_0 是 A 的子集,在其上函数 $|F(z)|$ 达到它的最大值 $\|F\|$. 可以看到 A_0 恰恰就是圆周 $|z| = 1$,并且 $\|F\| = |C|$.

余下还要证明:不存在 n 阶多项式 Q_n,使得

$$|F(z) - Q_n(z)| < |C| \qquad |z| \leqslant 1$$

证明可参见 G. G. Lorentz《函数逼近论》(上海:上海科学技术出版社:42).

§11 与插值问题的联系

在单位圆内全纯的函数 $f(z)$ 称为属于 $H^p(0 < p < +\infty)$ 空间,如果

$$\sup_{r<1} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\} < +\infty$$

设$\{z_k\}$是$|z|<1$内的任意一点列，$\{w_k\}$为一列复数，插值问题是讨论在什么样的情况下存在函数$f(z)\in H^p$使得$f(z_k)=w_k, k=1,2,\cdots$.

1958年L. Carleson在《Amer. J. Muth》(1958(154):137 ~ 152.)证明了一个重要结果：若$0<p\leqslant\infty$，则$T_p(H^p)=l^p$的充要条件是$\{z_k\}$为一致分离的.

$|z|<1$内的点列$\{z_k\}$称为一致分离，如果存在正数δ使

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_k-z_j}{1-\bar{z}_j z_k}\right|\geqslant\delta \qquad k=1,2,\cdots$$

再记T_p为$H^p(0<p\leqslant\infty)$，H^∞为$|z|<1$上全体有界全纯函数构成的空间上的线性算术，由

$$T_p(f)=\{(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{p}}f(z_k)\}$$

定义，记$l^p(0<p<\infty)$为以数列$(a_1,a_2,\cdots)$为元素构成的空间，适合条件$\Sigma|a_j|^p<+\infty$ l^∞，则为全体有界数列构成的空间.

参考文献

[1] 康威J B.单复变函数[C].吕以辇，张南岳，译.张顺燕，校.上海：上海科学技术出版社，1985:158-161.

[2] [德]CARATHÉODORY C.复变函数论(第一卷)[M].赵彦达，译.谢庭藩，校.北京：高等教育出版社，1965:13-14.

[3] 郑建华.复分析[M].北京：清华大学出版社，2000.

[4] 庄圻泰，张南岳.复变函数[M].北京：北京大学出版社，1984:310.

[5] [日]功力金二郎.复变函数论[M].上海：上海科学技术出版社，1963.

[6] 李忠著.复分析导引[M].北京：北京大学出版社，2004.

[7] N.N.普里瓦洛夫.复变函数引论[M].北京：人民教育出版社，1953.

[8] 朱静航.复变函数论.长春：东北师大，1957:126-128.

[9] 钟玉泉.复变函数论[M].北京：高等教育出版社，1979:240-254.

[10] 格·列·伦兹，列·埃·艾尔斯哥尔兹.复变函数与运算微积分初步[M].熊振翔，杨应辰，丘玉圃，译.北京：人民教育出版社，1960:151-153.

[11] 马库雪维奇 A И.解析函数论简明教程.阎昌龄，吴望一，译.北京：人民教育出版社，1961:74-75.

附录　线性变换与罗巴切夫斯基几何

1.罗巴切夫斯基几何在圆上的欧几里得图像

大家都知道，罗巴切夫斯基几何中的公理与欧几里得几何中的公理只有一点不同，就是代替关于平行直线的欧几里得公理："通过直线外一点可以引一条而且只能引一条直线

与已知直线不相交",引进了罗巴切夫斯基公理:"通过直线外一点可以引无穷多条直线,都不与已知直线相交,这些直线填满了某一个角形区域,这个角的边线称为已知直线的平行线".在这里,"两条直线的平行性与在这一条或那一条直线上所取的点的位置无关".

为了作出这种几何的欧几里得图像,我们在一部分欧几里得空间中考虑一些欧几里得几何的元素与运算,使它们对应于罗巴切夫斯基几何的元素与运算,称呼它们都用罗巴斯基几何的术语,只是在前面加上"非欧几里得的" 以下简称"非欧的" 这个形容词;我们要证明,这些元素具有一些按着罗巴切夫斯基几何的基本命题,用上述术语表达出来的性质.

用 G 代表一个称为基本圆周的欧几里得圆周 Γ 的内部.我们约定,取 Γ 内部的点作为非欧点,取与 Γ 正交的圆周在 G 内的部分作为非欧直线.于是通过两点 A 与 B 只有惟一的一条非欧直线.于是通过两点 A 与 B 只有惟一的一条非欧直线 Δ(图 5);圆周 Δ 与 Γ 相交于 α 与 β 两点.我们把 A,B 两点间的非欧距离定义为圆周 Δ 上四点 α,β,B,A 的反调和比的对数,乘上一个可以选定的任意的正数值 k

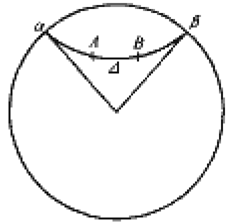


图 5

$$D(A,B)=k\ln(\alpha,\beta,B,A)>0 \tag{8}$$

不难看出,当点 A 趋向 α 或 B 趋向 β 时,非欧距离 $D(A,B)$ 就无限增大.因此,圆周 Γ 可以看做是代表了非欧平面上的无穷多个无穷远点.两条非欧直线间的非欧角可以定义为对应圆周间的夹角.而非欧几里得的运动就是保持圆周 Γ 内部不变的线性变换.

为了指明这些定义满足罗巴切夫斯基的公理,我们不作详细研究,只简略地说明以下几点:

(1) 非欧几里得运动保持非欧直线,距离与角度不变.很明显,这一点可以根据保持圆周 Γ 内部不变的线性变换的性质得出来.

(2) 在非欧直线上,非欧距离具有可加性,即当 A,B,C 是同一条非欧直线上的三点时

$$D(A,C)=D(A,B)+D(B,C) \tag{9}$$

事实上我们可以用 α,β,a,b,c 表示圆周 Δ 上的点 α,β,A,B,C 在复平面上的附标,我们来证明

$$(\alpha,\beta,c,a)=(\alpha,\beta,b,a)\cdot(\alpha,\beta,c,b)$$

这个等式的真确性是很容易验证的,只要把它明白地写出来就行

$$\frac{c-\alpha}{c-\beta}\cdot\frac{a-\beta}{a-\alpha}=\frac{b-\alpha}{b-\beta}\cdot\frac{a-\beta}{a-\alpha}\cdot\frac{c-\alpha}{c-\beta}\cdot\frac{b-\beta}{b-\alpha}$$

把这个等式取对数,再用 k 乘,就得到式(9).

(3) 关于平行线的罗巴切夫斯基公理是成立的.

我们考虑从点 P 引出的非欧直线与它对于不含点 P 的非欧直线 Δ 的相对位置.作圆周 P_α 与 P_β 使与 Δ 相切于点 α 与 β,我们看到,可以把从 P 引出的非欧直线分成与 Δ 相交和不与 Δ 相交的两类;后面的这一类都在某一个角形内,就是在图 6 中,画斜线的部分内,也就是由平行线 P_α,P_β 所围成的部分内.因为,在我们的图像中,平行直线意味着与基本圆周正交的

一些欧几里得圆周在基本圆周上一点相交，所以，上面所述的平行性质是非常明显的.

2. 给定附标的两点间的非欧距离的计算法

用 z_1 与 z_2 表示给定的点的附标，并通过非欧几里得运动，把 z_1 变换到圆周 Γ 的中心 O(图 7). 如果 Γ 是单位圆周，而 w_2 是对应于 z_2 的点且 $|w_2| = r$，则

$$D(z_1, z_2) = D(0, w_2) = k\ln(-1, +1, r, 0) = k\ln\frac{1+r}{1-r}$$

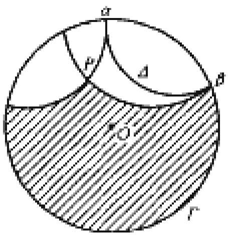


图 6

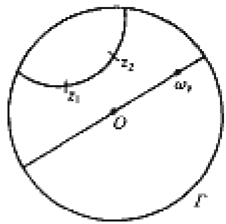


图 7

实际上，在非欧几里得运动中，非欧直线 z_1z_2 变成了直线 Ow_2，并且 $D(z_1, z_2) = D(O, w_2)$. 另一方面，利用绕 O 点的旋转，可以把点 w_2 转到以 r 为附标的点，换句话说，$D(O, w_2) = D(O, r)$.

于是，我们就得到所要证明的结果

$$D(z_1, z_2) = D(O, r) = k\ln(-1, +1, r, 0) = k\ln\frac{1+r}{1-r}$$

因此，要想用点 z_1 与 z_2 的附标来表示 $D(z_1, z_2)$，就只须设法找出 $r = |w_2|$.

由于保持圆周 Γ 不变而又把 z_1 变到圆心的线性变换是

$$w = e^{i\theta}\frac{z - z_1}{1 - z\bar{z}_1}$$

我们就可以得到 $w_2 = e^{i\theta}\frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_1}$，换句话说 $r = |w_2| = \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_1}\right|$. 因此，我们得到了下述计算具有给定的附标 z_1 与 z_2 的两点之间的非欧距离的公式

$$D(z_1, z_2) = k\ln\frac{1+r}{1-r} \tag{10}$$

其中

$$r = \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_1}\right|$$

3. 非欧几里得圆周

依定义，距一个定点的非欧距离为一常数 $d(d > 0)$ 的点的轨迹称为一个非欧几里得圆周. 根据公式(10)，如果 z_1 是定点，则非欧圆周是具有下列方程的欧几里得曲线

$$\left|\frac{z-z_1}{1-\bar{z}z_1}\right|=\frac{e^{\frac{d}{k}}-1}{e^{\frac{d}{k}}+1}$$

或即

$$\frac{|z-z_1|}{\left|z-\frac{1}{\bar{z}_1}\right|}=|z_1|\frac{e^{\frac{d}{k}}-1}{e^{\frac{d}{k}}+1}$$

这个方程表示在基本圆周内的一个圆周，属于具有对称于 Γ 的彭色列点 z_1 与 $\frac{1}{\bar{z}_1}$ 的圆周. 这里所谓一个圆周束的彭色列点是指对称于束中每一个圆周的那两个点，也就是与给定的圆周束正交的圆周束的基点. 显然，所有在 Γ 内的圆周都可以看做并且只有一种方法看做非欧几里得圆周. 点 z_1 称为上述非欧圆周的非欧中心从 z_1 出发的非欧直线也称为非欧半径. 不难看出，这些半径与这个非欧圆周以及一切有同样非欧中心的圆周都正交. 事实上，这些半径是从 z_1 出发并与 Γ 正交的一些圆周，因而它们与具有彭色列点 z_1 与 $\frac{1}{\bar{z}_1}$ 的束中的一切圆周都互相垂直.

4. 曲线的非欧长度

跟欧几里得几何的情形一样，在罗巴切夫斯基几何中，曲线的弧长也可以定义为内切于这段弧的折线的极限. 因此，要想定义曲线上一段弧的非欧长度，必须在欧几里得图像中取分点，算出各对相邻点间的非欧距离之和，再取它的极限. 我们知道，z 与 $z+\Delta z$ 两点间的非欧距离等于 $k\ln\frac{1+r}{1-r}$，其中 $r=\frac{|\Delta z|}{|1-(\bar{z}+\Delta\bar{z})z|}$，把 Δz 当做无穷小，于是，这个距离等价于 $2kr=\frac{2k|\Delta z|}{|1-(\bar{z}+\Delta\bar{z})z|}$，从而也等价于$\frac{2k|\Delta z|}{1-|z|^2}$. 因此，我们得到

$$D(z,z+\Delta z)=\frac{2k|\Delta z|}{1-|z|^2}(1+\varepsilon)$$

式中的 ε 对于在 G 的内部的每一个闭区域中的 z 而言，都一致地随 Δz 趋于零. 由此立刻看出，在 Γ 内的弧 L 的非欧长度是

$$k\int_L\frac{2\mathrm{d}s}{1-|z|^2} \tag{11}$$

5. 非欧几里得面积

跟欧几里得几何的情形一样，在罗巴切夫斯基几何中一个区域 d 的面积也可以定义为一些内接于 d 的多边形的面积之和的极限. 因此，要想确定 d 的非欧面积，必须在 d 的欧几里得图像中，取与 Γ 正交的圆周构成的多边形，求出所有这些多边形的非欧面积之和，然后取极限.

从第四段我们知道非欧面积元素的表达式是$\frac{4k^2\mathrm{d}w}{(1-|z|^2)^2}$，其中 $\mathrm{d}w$ 是欧几里得面积元素. 由此，我们可以得出结论：一个连边界都在 G 内的区域 d 的面积是

$$k^2\iint_d\frac{4\mathrm{d}w}{(1-|z|^2)^2}=k^2\iint_d\frac{4\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-|z|^2)^2} \tag{5}$$

6. 远环

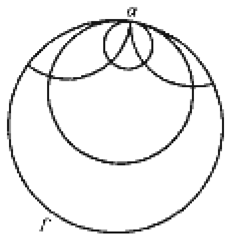


图 8

我们来考察一族互相平行的非欧直线，在图 8 中，它们的图像是在 α 点与 Γ 正交的一些圆周. 跟它们全部正交的曲线可以用与 Γ 在点 α 相切的圆周表示，这些曲线称为远环.

不难指出，对应于一点 α 的非欧直线族中的一切直线在两个确定的远环间的截下部分的非欧长度都彼此相等. 事实上，我们可以用线性变换把点 α 变到无限远. 这时，C 变成了半平面，通过 α 的非欧直线变成垂直于半平面的边界 Γ_1 的半直线，而这两个远环就变成两条平行于 Γ_1 的直线，结果，非欧直线在两个远环间截下部分的非欧长度变成了平行线间的欧氏距离. 由此可知，对于整个非欧直线族而言，这个长度是一定的值.

7. 超环

我们已经知道，非欧圆周(在 Γ 内的圆周) 可以作为从一点出发的一些非欧直线的正交曲线；在前段中也曾经看到，远环(与 Γ 相切的圆周) 是非欧平行直线族的正交曲线.

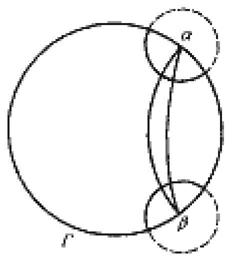


图 9

因此，我们一方面已经研究了由具有两个实中心，并与 Γ 正交的圆周束所表示的非欧直线族，另一方面，也考虑了由具有一个中心并与 Γ 正交的圆周束所表示的非欧平行直线族. 现在很自然地要来考虑由具有虚中心并与 Γ 正交的圆周束所表示的另一类型的非欧直线族. 这个圆周束的彭色列点 α，β 显然是实的并且在 Γ 上；他们可以当做与所考虑的束正交的圆周束的中心. 我们把通过 α，β 的圆周在 Γ 内的部分叫做超环(图 9).

我们已经知道，非欧圆周是到某定点 —— 中心 —— 的非欧距离为一常量的点的几何轨迹，我们要证明，超环是到一条给定的非欧直线的非欧距离为一常量的点的轨迹.

为此，我们用线性变换把 α 变到无穷远，于是在 Γ 内的区域 C 变成一个半平面，Γ 变成 Γ_1 —— 半平面的边界，而非欧直线 $\alpha\beta$ 就变成在点 β_1 垂直于 Γ_1 的一条半直线(图 10). 于是问题变成，要在半平面上去找出点 M 的几何轨迹，使得在以 β_1 为中心，通过 M 的圆周上，反调和比(u,v,M,w)是一个常量，其中 u，v 是 Γ_1 上的点而 w 是在对应于 $\alpha\beta$ 的半直线上的点.

我们可以按照 M 是在半直线的这一边或那一边，得到两个几何轨迹，要想确定这些几何轨迹，我们需要考虑四条半射线：uw，uM，uv 与在点 u 的圆周切线，并且注意到他们的反调和比应当是不变的；这就只有在角 $w\beta_1M$ 保持不变时才能成立，也就是说，点 M 必须在半直线 β_1M 上. 因此，所求的点 M 在半平面上的几何轨迹是对称于半直线 β_1w 的两条半直线.

回到图 8，我们得到通过 α，β 的两个超环，他们和与 Γ 正交的圆周 $\alpha\beta$ 作成等角(图 11).

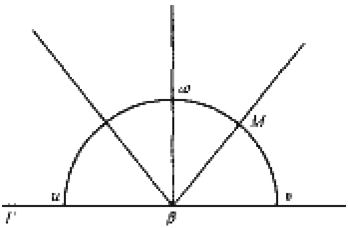


图 10

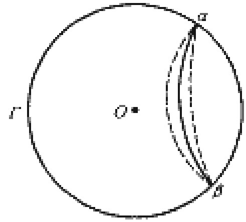


图 11

总结起来，我们可以说：任意一个圆周 C 在 Γ 内的部分是一个非欧圆周，一个远环或一个超环，要看 C 是在 Γ 以内的，与 Γ 相切的，或与 Γ 相交的圆周而定．这种曲线的分类，对非欧运动而言是不变的．很显然，非欧直线是超环的特殊情形．

8．罗巴切夫斯基几何在半平面上的欧几里得图像

一直到现在，我们是用单位圆来表示罗巴切夫斯基几何，其实，用上半平面也可以．为此，只要用一个线性变换把单位圆的区域 G 变成上半平面(z)，而把在线性变换之下的对应元素当做罗巴切夫斯基几何中一切元素的新的图像．

于是，非欧点就是上半平面的点，无穷远非欧点就是实轴上的点或半平面(z)上的无穷远点．又非欧直线的图像是与实轴正交的半圆周或半直线，非欧圆周是上半平面内的圆周，远环是与实轴相切的圆周或与实轴平行的直线；最后，超环的图像则是通过实轴上任意两点 α,β 的圆周在上半面上的一段弧或通过实轴上任意一点在上半面上的半段直线．至于上面所引进的两点间非欧距离的公式，弧长公式与面积公式在这里都变得更简单．它们的表达式可以用以前讲过的线性变换

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}} \qquad I(\beta) > 0$$

从前面得到的公式推出来．

例如从式(10)，我们可以得到

$$D(z_1, z_2) = k\ln\frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{z_2-\bar{z}_1}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{z_2-\bar{z}_1}\right|} \qquad (10')$$

这因为根据上述线性变换，我们有 $r = \left|\dfrac{w_2-w_1}{1-\bar{w}_2w_1}\right| = \left|\dfrac{z_2-z_1}{z_2-\bar{z}_1}\right|$．在公式(10′)中让 $z_1=z, z_2=z+\Delta z$ 并且把 Δz 当做无穷小，就可以得到非欧曲线的弧元素 $k\dfrac{ds}{y}$．事实上

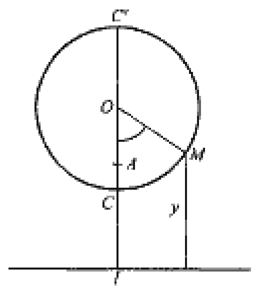


图 12

$$D(z, z+\Delta z) = k\ln\frac{1+\left|\frac{\Delta z}{2iy+\Delta z}\right|}{1-\left|\frac{\Delta z}{2iy+\Delta z}\right|} \sim$$

$$2k\left|\frac{\Delta z}{2iy+\Delta z}\right| \sim k\frac{|\Delta z|}{y} \sim k\frac{\mathrm{d}s}{y}$$

因此，上半平面内弧 L 的非欧长度是

$$k\int_L \frac{\mathrm{d}s}{y} \tag{11'}$$

最后，相当于公式(5)，连边界一起都在上半平面内的区域 d 的非欧面积则是

$$k^2\iint_d \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \tag{12'}$$

(И.И.普里瓦洛夫著.复变函数论[G].闵嗣鹤，等译.许宝騄，校.北京：人民教育出版社，1953.)

More recent advances in the mathematical sciences have helped improve our ability to predict the weather, to measure the effects of environmental hazards, to study the origin of the universe, and to project the outcomes of elections. Mathematical methods have become indispensable to the proper functioning of our technological society.

——哈尔莫斯

一道高中数学竞赛培训题与 Carleson 不等式

刘培杰

§1　培训题及推广

在周春荔教授所提供的高中竞赛模拟试卷(见《中等数学》)中有一题为:

设 $a_{ij}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$. 令 $G_i=\left(\prod\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}, A_j=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}$, 则有

$$A(G_1,G_2,\cdots,G_m)\leqslant G(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

即

$$\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}G_i\right)\leqslant\left(\prod_{j=1}^{n}A_j\right)^{\frac{1}{n}}$$

证明　作一 m 行 n 列的矩形表格.在它的 $m\times n$ 个小方格中分别填上非负实数,如表 1 所示.

表 1

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	G_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	G_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	G_m
A_1	A_2	$\cdots$	A_n	

则 $G_1,G_2,\cdots,G_m$ 即为表中各行非负数的几何平均值;$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 则为各列非负数的算术平均值.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个为零,不妨设 $A_1=0$,则 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{m1}=0$,从而 $G_1=G_2=\cdots=G_m=0$,于是 $G(A_1,A_2,\cdots,A_n)=A(G_1,G_2,\cdots,G_m)$.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 全不为零，即 $A_j>0(j=1,2,\cdots,n)$，则由平均值不等式，有

$$\frac{a_{11}}{A_1}+\frac{a_{12}}{A_2}+\cdots+\frac{a_{1n}}{A_n}\geqslant\frac{nG_1}{G(A_1,\cdots,A_n)}$$

$$\frac{a_{21}}{A_1}+\frac{a_{22}}{A_2}+\cdots+\frac{a_{2n}}{A_n}\geqslant\frac{nG_2}{G(A_1,\cdots,A_n)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{m1}}{A_1}+\frac{a_{m2}}{A_2}+\cdots+\frac{a_{mn}}{A_n}\geqslant\frac{nG_m}{G(A_1,\cdots,A_n)}$$

将此 n 个不等式相加整理后即得 Carleson 不等式.

对此不等式我们有以下推广：

推广 1　设非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中每次取 $n-1$ 个数的算术平均值和几何平均值定义为

$$A_i=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j-a_i\right)$$

$$G_i=\left(\frac{1}{a_i}\prod_{j=1}^{n}a_j\right)^{\frac{1}{n-1}}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

则当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$\frac{1}{n}(G_1+G_2+\cdots+G_n)\leqslant(A_1A_2\cdots A_n)^{\frac{1}{n}}$$

证明　对 $i,j=1,2,\cdots,n$，令

$$A_{ii}=A_i\qquad G_{ii}=G_i$$

$$A_{ij}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-x_i-x_j}{n-2}$$

$$G_{ij}=\left(\frac{x_1\cdots x_n}{x_ix_j}\right)^{\frac{1}{n-2}}\qquad i\neq j$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}=nA_i,\prod\limits_{i=1}^{n}G_{ii}=G_i^n$. 由 Hölder 不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}G_{ij}^{\frac{1}{n}}\right)\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}G_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}G_i\leqslant\left(\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}G_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}$$

再由算术 - 几何平均不等式得

$$\sum_{i=1}^{n}G_{ij}\leqslant\sum_{i=1}^{n}A_{ij}=nA_j$$

所以$\sum\limits_{i=1}^{n} G_i \leqslant n\left(\prod\limits_{j=1}^{n} A_j\right)^{\frac{1}{n}}$,得证.

Carleson 不等式有如下加权推广:

定理 1 设 $a_{ij},\alpha_j,\beta_i(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 均为正数且 $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j=\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i=1$,则

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_i\left(\prod_{j=1}^{n}C_{ij}^{\alpha_j}\right)\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i a_{ij}\right)^{\alpha_j}$$

证明 仿前面的证明,作如表 2 所示的矩形格表,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是与每列数相对应的权系数,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是与每行数相对应的权系数,考虑每一行每一列的加权几何平均 $G_1,G_2,\cdots,G_m$ 与加权算术平均 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,则有

$$G_1=\prod_{j=1}^{n}a_{1j}^{\alpha_j},G_2=\prod_{j=1}^{n}a_{2j}^{\alpha_j},\cdots,G_m=\prod_{j=1}^{n}a_{mj}^{\alpha_j}$$

$$A_1=\sum_{i=1}^{m}\beta_i a_{i1},A_2=\sum_{i=1}^{m}\beta_i a_{i2},\cdots,A_n=\sum_{i=1}^{m}\beta_i a_{in}$$

表 2

	α_1	α_2	$\cdots$	α_n	
β_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	G_1
β_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	G_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
β_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	G_m
	A_1	A_2	$\cdots$	A_n	

又显然 $G_i,A_j>0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 由推广的算术 - 几何平均值不等式,得

$$\alpha_1\frac{a_{11}}{A_1}+\alpha_2\frac{a_{12}}{A_2}+\cdots+\alpha_n\frac{a_{1n}}{A_n}\geqslant\left(\frac{a_{11}}{A_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_{12}}{A_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_{1n}}{A_n}\right)^{\alpha_n}\tag{1}$$

$$\alpha_1\frac{a_{21}}{A_1}+\alpha_2\frac{a_{22}}{A_2}+\cdots+\alpha_n\frac{a_{2n}}{A_n}\geqslant\left(\frac{a_{21}}{A_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_{22}}{A_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_{2n}}{A_n}\right)^{\alpha_n}\tag{2}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1\frac{a_{m1}}{A_1}+\alpha_2\frac{a_{m2}}{A_2}+\cdots+\alpha_n\frac{a_{mn}}{A_n}\geqslant\left(\frac{a_{m1}}{A_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_{m2}}{A_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_{mn}}{A_n}\right)^{\alpha_n}\tag{3}$$

由(1)$\times\beta_1$+(2)$\times\beta_2+\cdots+$(3)$\times\beta_m$,利用 $A_j=\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i a_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$ 即得.

§2 Carleson 其人

卡尔松(Carleson)是瑞典数学家.1888年7月23日生于维姆麦尔比.曾任斯德哥尔摩技术学院教授.1949年至1952年任米塔格—莱夫勒研究所所长.1952年11月28日逝世,卡尔松的主要研究成果在函数论中.

广为人知的贡献包括与 phragmén—Lin delöf 原理有关的定理,关于 V—函数零点的定理以及一系列带有整系数的幂级数.

另外,Carleson 不等式,Carleson—Levin 常数,复变函数中的 Carleson 定理,Pólya – Carleson 关于有理函数的定理以及 Dirichlet 级数中的 Carleson 定理也广为数学家所知.

Carleson 在几何方面也写过一些书,如两卷本的《几何教程》以及《空间的几何学》.Carleson 一生共发表过30余篇论文.

Carleson 不等式 I 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$,则

$$(a_1+\cdots+a_n)^2<\frac{\pi^2}{6}(a_1^2+2^2a_2^2+\cdots+n^2a_n^2)$$

证明 由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$(a_1+\cdots+a_n)^2=(a_1c_1\cdot\frac{1}{c_1}+\cdots+a_nc_n\cdot\frac{1}{c_n})^2\leqslant$$
$$(a_1^2c_1^2+a_2^2c_2^2+\cdots+a_n^2c_n^2)(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}+\cdots+\frac{1}{c_n^2})$$

令 $C_n=\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}+\cdots+\frac{1}{c_n^2}$,得出

$$(a_1+\cdots+a_n)^2\leqslant C_n(a_1^2c_1^2+\cdots+a_n^2c_n^2)\tag{4}$$

取 $c_n=n$,有

$$(a_1+\cdots+a_n)^2\leqslant C_n(a_1^2+2^2a_2^2+\cdots+n^2a_n^2)$$

其中
$$C_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{\pi^2}{6}$$

当 $n\to\infty$ 时,$C_n\to\frac{\pi^2}{6}$,就有

$$(a_1+\cdots+a_n)^2<\frac{\pi^2}{6}(a_1^2+2^2a_2^2+\cdots+n^2a_n^2)$$

Carleson 不等式 II 设 $a_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 则

$$(a_1+a_2\cdots+a_n)^2<\pi^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)(a_1^2+2^2a_2^2+\cdots+n^2a_n^2)$$

证明　在式(4)中取 $c_n^2=t+\frac{n^2}{t}$，并得到

$$a_1^2c_1^2+\cdots+a_n^2c_n^2=tp+\frac{1}{t}Q$$

$$P=a_1^2+\cdots+a_n^2\qquad Q=a_1^2+2^2a_2^2+\cdots+n^2a_n^2$$

由式(4)可得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant C_n(tp+\frac{Q}{t})$$

其中

$$C_n=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}+\frac{1}{t+\frac{2^2}{t}}+\cdots+\frac{1}{t+\frac{n^2}{t}}=\frac{t}{t^2+1}+\frac{t}{t^2+2^2}+\cdots+\frac{t}{t^2+n^2}$$

在图1中，有

$$\frac{t}{2}=\frac{1}{2}|OM_{n-1}|\cdot|OM_n|\cdot\sin\alpha_n=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{t^2+(n-1)^2}\cdot\sqrt{t^2+n^2}\cdot\sin\alpha_n$$

$$\sin\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{t^2+(n-1)^2}\cdot\sqrt{t^2+n^2}}>$$

$$\frac{1}{t^2+n^2}$$

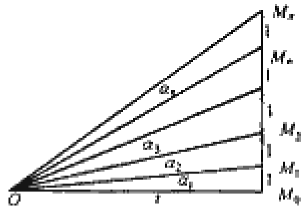


图1

$$\frac{1}{t^2+n^2}<\sin\alpha_n<\alpha_n$$

$$C_n=\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{t^2+n^2}<\alpha_1+\cdots+\alpha_n<\frac{\pi}{2}$$

$$(a_1+\cdots+a_n)^2<\frac{\pi}{2}(tP+\frac{Q}{t})$$

令 $t=\sqrt{\frac{Q}{P}}$，得 $tP+\frac{Q}{t}=2\sqrt{PQ}$，这样

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2<\pi\sqrt{PQ}$$

$$(a_1+a_2\cdots+a_n)^4<\pi^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)(a_1^2+2^2a_2^2+\cdots+n^2a_n^2)\qquad(5)$$

这是 Carleson 不等式中的一个.

推广2　设 $a_1,a_2,\cdots$ 是不全为零的非负实数序列，又设 $\sum_{k=1}^{\infty}k^2a_k^2<+\infty$，则

$$(\sum_{k=1}^{+\infty}a_k)^4\leqslant\pi^2(\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^2)(\sum_{k=1}^{+\infty}k^2a_k^2)$$

其中 π^2 是最好的常数.

上述推广有下列积分形式:设 f 是 $[0,+\infty]$ 上非负实值函数,使得 $x \mapsto f^2(x)$ 和 $x \mapsto x^2f^2(x)$ 是同一区间上的可积函数,则

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^4 \leqslant \pi^2\left(\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty} x^2f^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

其中 π^2 也是最好的常数.

有许多人对这两个不等式做了进一步推广,1941 年 B. Sz-Nagy 证明了下列不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right|^q + \left|\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k a_k\right|^q <$$
$$\frac{\pi q}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{p_1} \mid a_k \mid^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \times \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mid a_k \mid^{p_2}\right)^{\frac{1}{(p_2-1)p_1}} \left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right|^q <$$
$$\frac{\pi q}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{p_1} \mid a_k \mid^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \times \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mid a_k \mid^{p_2}\right)^{\frac{1}{(p_2-1)p_1}}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots$ 是实数,$q = 1 + \dfrac{p_2}{p_1(p_2-1)}$,$1 \leqslant p_1 \leqslant 2$,且 $1 < p_2 \leqslant 2$.

1940 年和 1943 年 W. B. Caton 和 R. Bellman 又分别推广了 Carleson 不等式. 1948 年 V. I. Levin 改进了他们的结果,得到

定理 2 若 $p > 1, q > 1, \lambda > 0, \mu > 0$,且 f 是 $(0,\infty)$ 上非负实值函数,使得 $x \mapsto x^{p-1-\lambda}f(x)^p$ 和 $x \mapsto x^{q-1+\mu}f(x)^q$ 在所考虑的区间上是可积函数,则

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant c\left(\int_0^{+\infty} x^{p-1-\lambda}f(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\mu/(p\mu+q\lambda)} \times \left(\int_0^{+\infty} x^{q-1+\mu}f(x)^q\mathrm{d}x\right)^{\lambda/(p\mu+q\lambda)}$$

其中

$$c = \left(\frac{1}{ps}\right)^s\left(\frac{1}{qt}\right)^t\left(\frac{\Gamma\left(\frac{s}{1-s-t}\right)\Gamma\left(\frac{t}{1-s-t}\right)}{(\lambda+\mu)\Gamma\left(\frac{s+t}{1-s-t}\right)}\right)^{1-s-t}$$

$$s = \frac{\mu}{p\mu + q\lambda} \qquad t = \frac{\lambda}{p\mu + q\lambda}$$

常数 c 是最好的.

有一些文章考虑了确定下列更为一般的不等式中的最好常数 k 的问题

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha} \mid f(x) \mid^{\beta}\mathrm{d}x \leqslant k\left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha_1} \mid f(x) \mid^{\beta_1}\mathrm{d}x\right)^{\alpha_1} \times \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha_2} \mid f(x) \mid^{\beta_2}\mathrm{d}x\right)^{\alpha_2}$$

这里指数是满足某些条件的实数,B. kjellberg 得到了重要结果.

我国数学家胡克对 Carleson 不等式给予了改进,得到以下几个定理.

定理 3 同 Nagy 不等式所设,并设 $1 - e(x) + e(y) \geqslant 0, x, y \in [a,b]$,则

$\mid f(a) \mid^p + \mid f(b) \mid^q \leqslant$

$$\begin{cases} q\left(\int_a^b |f'(x)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}-1}\left(\left(\int_a^b |f'(x)|^p dx\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right)^2 - B^2\right)^{\frac{1}{2p}} & 1 < p \leqslant 2 \\ q\left(\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right)^{1-\frac{2}{p}}\left(\left(\int_a^b |f'(x)|^p dx\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right)^2 - B^2\right)^{\frac{1}{2p}} & p > 2 \end{cases}$$

其中
$$B = \int_a^b |f'(x)|^p dx\int_a^b |f(x)|^\alpha e(x) dx - \int_a^b |f(x)|^\alpha dx\int_a^b |f'(x)|^p e(x) dx$$

定理 4 设 $a_n \geqslant 0$,则

$$\left|\sum a_n\right|^2 + \left|\sum(-1)^n a_n\right|^2 \leqslant \pi\left[\left(\sum a_n^2\right)^2\left(\sum n^2 a_n^2\right)^2 - \frac{1}{4}B_2^2\right]^{\frac{1}{4}}$$

其中
$$B_2 = \sum a_n^2\sum n(n+1)a_n a_{n+1} - \sum n^2 a_n^2\sum a_n a_{n+1}$$

若代 $B_2 = 0$,则上式即为 Nagy-Hardy-Carleson 不等式.

定理 5 设 $a_n \geqslant 0$,则

$$\left(\sum a_n\right)^2 \leqslant \pi\left[\left(\sum a_n^2\sum\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 a_n^2\right)^2 - \frac{1}{4}B_3^2\right]^{\frac{1}{4}}$$

其中
$$B_3 = \sum a_n^2\sum\left(n^2-\frac{1}{4}\right)a_n a_{n+1} - \sum\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 a_n^2\sum a_n a_{n+1}$$

代 B_3 为 0,则上式为 Landan 定理.

参考文献

[1] CARLESON F. Une inégalité[J]. Ark. Mat. Astr. Fys., 1934,25B(1):1-5.

[2] SZ-NAGY B. On Carleson's and related inequalities (Hungarian)[J]. Mat. Fiz., 1941, Lapok 48:162-175.

[3] LEVIN V I. Exact constants in the inequalities of Carlson's type (Russian)[M]. Doklady Akad, Nkad. Nauk SSSR(N.S.)59,1948:635-638.

[4] CATON W B. Aclass of inequalities[J]. Duke Math., 1946:442-461.

[5] BELLMAN R. An integual inequnlity. Duke Math., 1943, 9:547-550.

[6] KJELLBERG B. Ein Momentenproblem[J]. Ark. Mat., 1942, 29 A(2):1-33.

[7] KJELLBERG B. On some inequalities[J]. C.R 10e Congrés Math Scandinaves, Capenhappen, 1946: 333-340.

[8] KJELLBERG B. A not on an inequality[J]. Ark, Mat., 1956, 3:293-294.

[9] LEVIN V I, GODUNOVA E. Age neralization of Carlson's inequality (Russian)[J]. Mat, sb., 1965:643-646.

[10] BECKENBACH E F, BELLMUN R. In equalities[M]. New York: 2nd ed., Berlin Heidelberg, 1965.

[11] LEVIN V I, S B STECKIN. Inequalities[J]. Amer. Math. Soc. Transl. 1960,14(2):1-29.

[12] 胡克.论 Nagy-Carlson 型不等式[J].江西师范大学学报,1993,17(2):89-91.

Shannon 信息论与 2005 年高考试题

刘培杰

§1　试题与信息论

2005 年普通高等学校招生全国统一考试理科数学(必修 + 选修 Ⅱ)试题的最后一题(第 22 题)为:

(Ⅰ)设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)(0<x<1)$,求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设正数 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{2^n}$ 满足 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$,证明

$$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geqslant -n$$

这是一道既贴近课本又具有深刻背景的试题,它就是信息论中一个最基础的概念与基本定理的描述.

信息是一个十分广泛的概念,哲学家将其视为构成客观世界的除物质、能量外的第三大要素,现在人们更把它看做是推动社会文明的重要动力,它的广泛性不仅涉及人类社会的各个领域,而且在生物世界也都离不开信息的交流,从动物之间的各种动作交流到细胞的遗传生长都有信息的存在与作用.

由于信息概念的广泛性,试图对信息的一般形式进行度量是十分困难的. 20 世纪 20 年代,奈奎斯特(H. Nyquist)与哈特莱(L. Hartley)就已指出了信息度量与通信理论的关系,以及它们与概率、对数函数的联系. 到了 20 世纪 40 年代控制论的奠基人维纳(N. Wiener)、美国统计学家费希尔(E. Fisher)与美国数学家(C. E. Shannon)香农几乎同时提出了信息度量的熵的定义形式.

香农于 1916 年 4 月 30 日生于美国密歇根州佩托斯基. 曾就读于密歇根大学电子工程和数学系,于 1936 年获得理学学位. 1940 年在麻省理工学院获博士学位,后又在普林斯顿大学进修了一年. 之后,加入了新泽西州普林斯顿的贝尔电话实验室技术部.

1941年,在某种程度上出于战事的需要,香农对通信问题开始了深人的研究,并汇集他的研究成果,于1948年发表了名为《A Mathematical Theory of Communication》(通信中的数学理论)的论文.

现在看来伴随许多深奥的科学发现,当时产生科学突破的时机已经成熟了.但在通信理论领域却并非如此.虽然在20世纪40年代香农的工作并非与世隔绝,但是他的理论却非常独树一帜,以至于当时的通信专家都无法立即接受.但是随着他的定理逐渐被数学和工程界认可,这种理论发展至今已成为最重要的数学领域之一.

§2 香农熵与试题

下面我们介绍一下香农熵和高考试题的关系.

香农熵的基本概念来自随机试验(或随机变量)的不肯定性.一个随机试验包含有两个因素,即它的试验可能有多种结果出现,且每个结果的出现具有一定的可能性大小.如果可能出现的全体结果是有限或可数的,那么我们称这个随机试验是离散的.一个离散的随机试验或随机变量可以用 $X = [X, p(x)]$ 来表示,其中 X 为随机试验 X 的全体可能出现的结果,它的元素 $x \in X$ 为随机试验的基本事件,而 $p(x)$ 为在随机试验 X 中,x 出现的概率,以下记

$$p(\cdot) = \{p(x) \mid x \in X\}$$

为随机变量 X 的概率分布,如 $X = m = \{1, 2, \cdots, m\}$,那么相应的随机试验可表示为

$$X = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_m \end{Bmatrix}$$

我们可以对离散随机试验 $X = [m, p_i]$ 的不肯定性度量规定一个概率分布 $(p_i, i = 1, 2, \cdots, m)$ 的函数,也就是

$$H(X) = H(p^m) = H(p_1, p_2, \cdots, p_m)$$

关于随机试验不肯定度的公理化条件为:

公理1 在一个二值的随机试验中肯定试验的不肯定度为零,也就是 $H(0,1) = 0$.

公理2 在一个二值的随机试验中不肯定度 $H(p, 1-p)$ 是 $p \in (0,1)$ 的连续函数.

公理3 不肯定度 $H(X)$ 的大小与 X 中事件排列次序无关,也就是不肯定度函数 $H(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 关于变量 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是对称的.

公理4 不肯定度的大小具有可加性.也就是如果随机试验的某事件内部

蕴含不肯定度,那么这些不肯定度在平均概率意义下是可加的,即

$$H(p_1,p_2,\cdots,p_{m-1},q_1,q_2)=$$

$$H(p_1,p_2,\cdots,p_{m-1},p_m)+p_m\cdot H(\frac{q_1}{p_m},\frac{q_2}{p_m})$$

其中 $p_m=q_1+q_2$.

二进制熵函数

$$H_2(x)=-x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)\qquad 0<x<1$$

$$H_2(0)=H_2(1)=0$$

就满足这四条公理,在美国的一本信息论名著《The Theory of Information and Coding》(Robert J. McEliece 著)中的一个习题给出 $H_2(x)$ 具有如下性质:

(i) $H_2'(x)=\log_2(1-x)/x$;

(ii) $H_2''(x)=-(x(1-x)\log_2)^{-1}$;

(iii) $H_2(x)\leqslant 1$,等式成立当且仅当 $x=\frac{1}{2}$;

(iv) $H_2(x)\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to 0,1}H_2(x)=0$;

(v) $H_2(x)=H_2(1-x)$.

而这正是解决试题(Ⅰ)的基础.

如果我们记 $P_m=\{p^m=(p_1,\cdots,p_m)\mid p_i\geqslant 0,i=1,\cdots,m;\sum\limits_{i=1}^{m}p_i=1\}$,则在许多信息论著作中都有这样一个定理.

定理1 如果 $H(p^m)$ 为 p_m 上的函数且满足公理 1 ~ 4,那么 $H(p^m)$ 必为以下对数函数的形式

$$H(p_1,\cdots,p_m)=-\sum_{i=1}^{m}p_i\log_a(p_i)\tag{1}$$

由于上述 $H(p_1,\cdots,p_m)$ 的形式与热力学中的熵的形式十分相似,因此该不肯定性的度量函数被称为香农熵.

在工程界,对式(1)中对数的底 a 有不同的选择,常用的底取为 $a=2,3,e,10$,并由此产生的不同的信息单位分别为"比特"(Bit,信息度量的二进制单位),"铁特"(Tet,信息度量的三进制单位),"奈特"(Nat,信息度量的自然单位),"笛特"(Det,信息度量的十进制单位).

§3 一个基本性质

熵的一个最基本性质是:

定理2 $H(p_1,p_2,\cdots,p_n)\leqslant\lg n$,为证明它先证两个不等式.

(1) 对 $\forall x\in\mathbf{R}^+$,有 $1-\frac{1}{x}\leqslant\ln x\leqslant x-1$,其中等号成立当且仅当 $x=1$;

(2) 对 $p_i\geqslant 0,q_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}p_i=i=\sum_{i=1}^{n}q_i$,有

$$-\sum_{i=1}^{n}p_i\lg p_i\leqslant-\sum_{i=1}^{n}p_i\lg q_i$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\lg\frac{p_i}{q_i}\geqslant 0$$

其中等号成立当且仅当 $p_i=q_i,i=1,2,\cdots,n$.

证明 (1) 考虑函数 $f(x)=x-1-\ln x(x>0)$,由 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$ 及 $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$,得 $f(x)\geqslant f(1)=0$,即 $x-1\geqslant\ln x$,其中等号成立当且仅当 $x=1$,由此,令 $x=\frac{1}{y}$,便得 $1-\frac{1}{y}\leqslant\ln y$.

(2) 由(1) 得

$$\lg\frac{q_i}{p_i}=\lg e\cdot\ln\frac{q_i}{p_i}\leqslant\lg e(\frac{q_i}{p_i}-1)$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\lg g\frac{q_i}{p_i}\leqslant\lg e\cdot\sum_{i=1}^{n}p_i(\frac{q_i}{p_i}-1)=0$$

其中等号成立当且仅当 $\frac{q_i}{p_i}=1,i=1,2,\cdots,n$.

定理 2 的证明:

在基本不等式(2) 中令 $q_i=\frac{1}{n},j=1,\cdots,n$,即得:

当我们底取为 2 时定理 2 即可写成

$$H(p_1,p_2,\cdots,p_n)\leqslant\log_2 n$$

即

$$-p_1\log_2 p_1-p_2\log_2 p_2-\cdots-p_n\log_2 p_n\leqslant\log_2 n$$

取 n 为 2^n,则

$$-p_1\log_2 p_1-p_2\log_2 p_2-\cdots-p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\leqslant\log_2 2^n=n$$

即

$$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geqslant n$$

这就是 2005 高考试题,既贴近课本,倍感亲切,又隐藏高深背景,耐人寻味.

§4 对数和不等式

本节给出一个对数和不等式，并利用它来证明这道试题.

对数和不等式 对于非负数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lg \frac{a_i}{b_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \lg \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{2}$$

其中等号成立当且仅当 $\frac{a_i}{b_i}$ = 常数.

证明 为不失一般性，假定 $a_i > 0$ 和 $b_i > 0$.

由于对任意的正值 t 有 $f''(t) = \frac{1}{t}\lg e > 0$，可知函数 $f(t) = t\lg t$ 严格凸，因而由琴生(Jensen)不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(t_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i\right)$$

其中 $\alpha_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$，设 $\alpha_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$，$t_i = \frac{a_i}{b_i}$，可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \lg \frac{a_i}{b_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \lg \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$$

两边同时乘以 $\sum_{j=1}^{n} b_j$ 后，即为对数和不等式.

在不等式(2)中我们取 $b_i = \frac{1}{n}$，则 $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$，取 $i = 1,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，则式(2)变为 $\sum_{i=1}^{n} a_i \lg \frac{a_i}{b_i} \geqslant 0$.

亦即 $$\sum_{i=1}^{n} a_i \lg a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \lg b_i = -\lg n$$

令 $a_i = p_i$，n 为 2^n，则即为

$$\sum_{i=1}^{2^n} p_i \lg p_i \geqslant -\lg 2^n = -n$$

证毕.

§5 利用拉格朗日乘数法

信息熵 $H(p_1,p_2,\cdots,p_r)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\lg p_i$ 可视为 r 个信源符号 $a_i(i=1,2,\cdots,r)$ 的概率分布 $p_i(i=1,2,\cdots,r)$ 的函数,一般离散信源的 r 个概率分量 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 必须满足 $\sum_{i=1}^{r}p_i=1$,熵函数 $H(p_1,p_2,\cdots,p_r)$ 的最大值,应该是在约束条件 $\sum_{i=1}^{r}p_i=1$ 的约束下,熵函数 $H(p_1,p_2,\cdots,p_r)$ 的条件极大值.

由拉格朗日方法,作辅助函数

$$F(p_1,p_2,\cdots,p_r)=H(p_1,p_2,\cdots,p_r)+\lambda\left[\sum_{i=1}^{r}p_i-1\right]=$$
$$-\sum_{i=1}^{r}p_i\lg p_i+\lambda\left[\sum_{i=1}^{r}p_i-1\right] \tag{3}$$

式中,λ 为待定常数,对辅助函数 $F(p_1,p_2,\cdots,p_r)$ 中的 r 个变量 $p_i(i=1,2,\cdots,r)$ 分别求偏导数,并设之为零,可得 r 个稳定点方程

$$-(1+\lg p_i)+\lambda=0\qquad i=1,2,\cdots,r \tag{4}$$

由此方程组可解得

$$p_i=2^{(\lambda-1)}\qquad i=1,2,\cdots,r \tag{5}$$

将式(5)代入约束方程,有

$$\sum_{i=1}^{r}p_i=\sum_{i=1}^{r}2^{(\lambda-1)}=r\cdot 2^{(\lambda-1)}=1$$

即得

$$2^{(\lambda-1)}=\frac{1}{r} \tag{6}$$

由式(5)、式(6)知当 $p_i=\frac{1}{r}(i=1,2,\cdots,r)$ 时熵函数的最大值

$$H_0(p_1,p_2,\cdots,p_r)=H\left(\frac{1}{r},\frac{1}{r},\cdots,\frac{1}{r}\right)=-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{r}\lg\frac{1}{r}=\lg r$$

故有

$$-\sum_{i=1}^{r}p_i\lg p_i\leqslant\lg r$$

取 $r=2^n$ 时便为前面提到的高考试题.

§6 熵的惟一性

Shannon 离散熵定义为：设有一个离散随机变量 X，它有 N 个可能取值，分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$，各种取值出现的概率分别为 $p_1=p(a_1),p_2=p(a_2),\cdots,p_N=p(a_N)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{N}p_n=1$，则 $H(p_1,\cdots,p_N)=-\sum\limits_{n=1}^{N}p_n\lg p_n$ 称为 Shannon 熵.

那么这个函数是否具有惟一性呢？

1957 年 A.I.Khinchin 给出了信息熵的公理性条件，下面我们用它来证明熵函数的惟一性定理.

定理 设 $H_n(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是概率矢量 $\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 的非负实函数，对于任意 n，概率矢量满足 $p_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$，若 $H_n(\boldsymbol{P})$ 满足下述公理：

(1) 对 $\forall n\in\mathbf{N}$，函数 $H_n(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的连续和对称函数.

(2) 扩展性，对 $\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$H_{n+1}(p_1,\cdots,p_n,0)=H_n(p_1,\cdots,p_n)$$

(3) 极值性，对 $\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$H_n(p_1,\cdots,p_n)\leqslant H_n(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$$

(4) 强可加性，若 $p_ip_{ij}\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}p_ip_{ij}=1,\sum\limits_{j=1}^{m}p_{ij}=1(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 有

$$H_{nm}(p_1p_{11},p_1p_{12},\cdots,p_1p_{1m},\cdots,p_np_{n_1},p_np_{n_2},\cdots,p_np_{m})=$$
$$H_n(p_1,p_2,\cdots,p_n)+\sum_{i=1}^{n}p_iH_m(p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_m})$$

则得

$$H_n(p_1,\cdots,p_n)=-\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i\lg p_i \tag{7}$$

其中 λ 为一正常数.

证明 首先讨论特殊情况，即概率矢量 $\boldsymbol{P}$ 是等概分布的情况，$p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$. 为简便起见，我们令

$$L(n)=H_n(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}) \tag{8}$$

根据公理(2) 和(3) 得

$$L(n)=H_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)=H_{n+1}\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n},0\right)\leqslant$$

$$H_{n+1}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1},\cdots,\frac{1}{n+1}\right)=L(n+1) \tag{9}$$

即 $L(n)$ 是 n 的单调不减函数.

再由公理(4) 强可加性，首先我们令

$$m=n \qquad p_i=\frac{1}{n} \qquad p_{ij}=\frac{1}{n}$$

$$i=1,2,\cdots,n \qquad j=1,2,\cdots,n$$

得

$$H_{n^2}\left(\frac{1}{n^2},\cdots,\frac{1}{n^2}\right)=H_n\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}H_n\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$$

即得

$$L(n^2)=L(n)+L(n)=2L(n)$$

又令

$$m=n^2 \qquad p_i=\frac{1}{n} \qquad p_{ij}=\frac{1}{n^2}$$

$$i=1,2,\cdots,n \qquad j=1,2,\cdots,n^2$$

$$H_{n^3}\left(\frac{1}{n^3},\cdots,\frac{1}{n^3}\right)=H_n\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}H_{n^2}\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n^2},\cdots,\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$H_n\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)+H_{n^2}\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n^2},\cdots,\frac{1}{n^2}\right)$$

即得

$$L(n^3)=L(n)+L(n^2)=L(n)+2L(n)=3L(n)$$

以此类推，假设对于 $r-1$($r\geqslant 1$ 的任意正整数) 有

$$L(n^{r-1})=(r-1)L(n)$$

现令

$$m=n^{r-1} \qquad p_i=\frac{1}{n} \qquad p_{ij}=\frac{1}{n^{r-1}}$$

$$i=1,2,\cdots,n \qquad j=1,2,\cdots,n^{r-1}$$

同理根据公理(4)，得

$$H_{n^r}\left(\frac{1}{n^r},\cdots,\frac{1}{n^r}\right)=H_n\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}H_{n^{r-1}}\left(\frac{1}{n^{r-1}},\cdots,\frac{1}{n^{r-1}}\right)$$

即得

$$L(n^r)=L(n)+L(n^{n-1})=L(n)+(r-1)L(n)=rL(n)$$

由此证得，对于任意 $r\geqslant 1$ 的正整数，有

$$L(n^r)=rL(n) \tag{10}$$

现设 n,r,m 均为正整数，且满足 $r\geqslant 1,n\geqslant m\geqslant 2$，则必存在有正整数 s 使下列不等式成立

$$m^s\leqslant n^r\leqslant m^{s+1}$$

取对数得

$$s\lg m \leqslant r\lg n \leqslant (s+1)\lg m$$

由于 $m > 1$,即 $\lg m > 0$,所以有

$$\frac{s}{r} \leqslant \frac{\lg n}{\lg m} \leqslant \frac{s+1}{r} \tag{11}$$

由式(9) 的单调不减性,得

$$L(m^s) \leqslant L(n^r) \leqslant L(m^{s+1})$$

又由式(10),上式可写成

$$sL(m) \leqslant rL(n) \leqslant (s+1)L(m)$$

同理,由于 $m > 1, L(m) > 0$,上式为

$$\frac{s}{r} \leqslant \frac{L(n)}{L(m)} \leqslant \frac{s+1}{r} \tag{12}$$

由式(11)、(12) 可得

$$\left|\frac{L(n)}{L(m)} - \frac{\lg n}{\lg m}\right| \leqslant \frac{1}{r}$$

上式左边与 r 无关,而 r 是大于 1 的任意正整数,所以 $r \to \infty$ 时上式仍成立,因而可得

$$\frac{L(n)}{L(m)} = \frac{\lg n}{\lg m}$$

由于 n, m 是任意正整数,所以可有

$$L(n) = \lambda \lg m$$

其中 λ 为常数,它与 n, m 无关.因此,证得在 P 是等概分布的特殊情况下有

$$H_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right) = \lambda \lg n = -\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{n}$$

关于 $p_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为任意有理数的一般情况的证明可参见姜丹编著的《信息论与编码》(中国科学技术大学出版社,2001 年合肥:29-30).

满足上述 4 个公理的为 Shannon 熵,选择其他公理,就可能会得出一些其他的函数形式,如 1961 年 A Renyi 的工作,1967 年 J.N.Kapur 的工作,1973 年 M.Behara 和 P.Nath 的工作.

关于 J pfanzagl 问题,J.Aczél 1968 年证明了,若 f 是可微函数,则

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$$

式中,$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1, p_i > 0, q_i > 0 (i = 1, \cdots, n), n > 2$,等价于

$$f(p) = a\lg p + b \qquad a > 0$$

1969 年 P.Fischer 证明了满足上述条件的不等式

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i) \qquad n \geqslant 2$$

的全部解都是单调的，而对于 $n \geqslant 3$，它们是可微的.

Gy. Muszéiy 于 1969 年对 $n = 2$ 确定了不等式

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$$

的全部解，它们在 (0,1) 上是连续的.

参考文献

[1] 申农.通信的数学理论[M].沈永朝译.上海:上海市科学技术编译馆版,1965.

[2] 孟庆生.信息论[M].西安:西安交大出版社,1986.

[3] BRILLOUIN L. Science and Information Theory [M]. New York: 1956,13-14.

[4] KIRMSER P G. Problem E 1274, Amer [J]. Math. Monthly,1957,64:432.

[5] ACZÉL, J. problem 3 from Reparts of Meetings [J]. Aeguationes, 1968, Math 1:300.

[6] FISCHER P. Surlinégalité $\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$ [J]. Aequationes Math,1969(2):363.

[7] MUSZÉLY GY. Über die stetigen Lösungen der Ungleichung $pf(p) + (1-p)f(1-p) \geqslant pf(q) + (1-p)f(1-q)$ [J]. Aequationes Math,1969(2):362-363.

Nature's great book is written in mathematical symbol.

——伽利略

利用函数迭代构造技巧方程组

吴康[①]　苏文龙[②]　罗海鹏[③]

摘要　利用函数迭代,构造了若干种技巧方程组,包括线性循环方程组、余弦循环方程组、正切循环方程组等,给出了通用解法.

§0　引言

方程和方程组的求解,是中学数学教学和中学数学竞赛长盛不衰的课题.中学数学教学主要涉及常规方程和方程组,中学数学竞赛则更倾向于带有技巧的非常规方程和方程组(通常称之为技巧方程和技巧方程组).中科院院士张景中先生在《数学竞赛》创刊号上发表长篇论文《迭代——数学赛题的待开发矿点之一》,指出函数迭代埋藏着相当丰富的能量,许多材料可以用做中学数学教学研究、中学数学竞赛、初等数学研究的开发.本文不揣冒昧,探讨一下利用函数迭代构造技巧方程组的方法及其应用,以供同好批评指正.

§1　基本方法

给定非空集合 M,设函数 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 M, M',而 $M' \subseteq M$,则可以迭代:记 $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $\cdots$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, $n \in \mathbf{N}_0$($\mathbf{N}_0$ 为非负整数集).如果 $f(x)$ 有反函数,则用 $f^{-1}(x)$ 记之,$f^n(x)$ 的反函数记为 $f^{-n}(x)$. n 叫做 $f^n(x)$ 关于 $f(x)$ 的迭代指数,$n \in \mathbf{Z}$($\mathbf{Z}$ 为

---

① 吴康(1957—　),男,广东高州人,汉族,硕士,华南师范大学副教授,研究生导师,《中学数学研究》主编,数学教育指导组(硕士和教育硕士)组长,中国数学奥林匹克高级教练员.

② 苏文龙(1947—　),男,广西梧州人,汉族,广西大学梧州分校教授、科研处处长,广西科学院广西计算中心客座研究员,广西师范学院研究生导师,享受国务院特殊津贴专家.

③ 罗海鹏(1947—　),男,广东东莞人,汉族,广西科学院研究员、副院长,研究生导师,广西计算机学会理事长,享受国务院特殊津贴专家.

整数集). 注意 $f^2(x)$ 一般不等于 $[f(x)]^2$, 其余符号也有此区别.

构造方程组

$$\begin{cases} f(x_1)=x_2 \\ f(x_2)=x_3 \\ \vdots \\ f(x_{n-1})=x_n \\ f(x_n)=x_1 \end{cases} \quad n\in \mathbf{N}(\mathbf{N}\text{ 为正整数集}) \tag{1}$$

由其构造特点, 称之为由 $f(x)$ 引出的 n 阶循环方程组, 简称为 $f(x)$ 循环方程组. 显然此方程组可写成等价形式

$$\begin{cases} x_2=f(x_1) \\ x_3=f^2(x_1) \\ \vdots \\ x_n=f^{n-1}(x_1) \\ x_1=f^n(x_1) \end{cases} \tag{2}$$

易见其求解关键是方程

$$x=f^n(x) \tag{3}$$

的求解. 称方程(3) 为 $f(x)$ 循环方程组的特征方程, 其根称为特征根, 也称为不动点(这是简称, 详细的应是函数 $f(x)$ 的 n 次迭代不动点). 方程(3) 的每个根 x', 对应着方程组(1) 或方程组(2) 的 n 组解

$$\begin{gathered}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x',f(x'),f^2(x'),\cdots,f^{n-1}(x')),(f(x'),f^2(x'),\cdots,\\ f^{n-1}(x'),x'),(f^2(x'),f^3(x'),\cdots,f^{n-1}(x'),x',f(x')),\cdots,\\ (f^{n-1}(x'),x',f(x'),\cdots,f^{n-2}(x'))\end{gathered} \tag{4}$$

以下我们一般在复数范围内讨论方程组(1) 或(2) 的求解.

§2 线性循环方程组

设 $f(x)=ax+b$ 或 $\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0,\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}\neq 0\right)$, $x\in\mathbf{C}$, 则称 $f(x)$ 循环方程组为线性函数循环方程组或线性分式函数循环方程组, 均简称为线性循环方程组, 其中 $\mathbf{C}$ 为复数集. 下面讨论此方程组的求解.

1. $f(x)=ax+b$ 的情形

(1) $a=1$ 的特例. 此时, 若 $b\neq 0$, 则方程组(1) 或(2) 无解; 若 $b=0$, 则

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = r, r \in \mathbf{C}$,有无穷多个解.

(2)$a \neq 1$ 的一般情形.解方程

$$x = ax + b \tag{5}$$

其根为 $x = \dfrac{b}{1-a}$,记之为 c,则 $c = ac + b$,从而

$$x_2 - c = a(x_1 - c), x_3 - c = a(x_2 - c) = a^2(x_1 - c), \cdots,$$

$$x_n - c = a(x_{n-1} - c) = \cdots = a^{n-1}(x_1 - c),$$

$$x_1 - c = a(x_n - c) = \cdots = a^n(x_1 - c),$$

$$(1 - a^n)(x_1 - c) = 0$$

情形1 $a^n \neq 1$.则 x_1 有惟一解 $x_1 = c$,从而方程组(1)或(2)有惟一解$(c, c, \cdots, c)$.

情形2 $a^n = 1$.则 x_1 可以为任意复数 r,从而方程组(1)或(2)有无穷多组解$(r, a(r-c)+c, a^2(r-c)+c, \cdots, a^{n-1}(r-c)+c)$.(注:此时 $a = e^{i\theta}$, $\theta = 2k\pi/n, k = 0,1,2,\cdots,n-1$.)

例1 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 3 = y \\ 2y + 3 = z \\ 2z + 3 = x \end{cases}$$

简解 $(x, y, z) = (-3, -3, -3)$

例2 解方程组

$$\begin{cases} \omega x + 3 = y \\ \omega y + 3 = z \\ \omega z + 3 = x \end{cases}$$

其中 $\omega = e^{2\pi i/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

简解 $(x, y, z) = (r, r\omega + 3, r\omega^2 + 3\omega + 3) \quad r \in \mathbf{C}$

2. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c \neq 0, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0\right)$ **的情形**

解方程

$$x = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{6}$$

其根为

$$x = [(a-d) \pm \sqrt{\Delta}]/2c \qquad \Delta = (d-a)^2 + 4bc$$

(1)$\Delta = 0$ 的特例.此时记 $p = (a-d)/2c$,则 $p = \dfrac{ap+b}{cp+d}$,从而

$$\frac{1}{x_2-p}=\frac{1}{\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}-\dfrac{ap+b}{cp+d}}=\frac{(cp+d)(cx_1+d)}{(ad-bc)(x_1-p)}\xlongequal{化简}\frac{1}{x_1-p}+\frac{c(a+d)}{2}$$

记 $q=c(a+d)/2$，则

$$\frac{1}{x_2-p}=\frac{1}{x_1-p}+q,\frac{1}{x_3-p}=\frac{1}{x_2-p}+q=\frac{1}{x_1-p}+2q,\cdots,$$

$$\frac{1}{x_n-p}=\frac{1}{x_{n-1}-p}+q=\cdots=\frac{1}{x_1-p}+(n-1)q,$$

$$\frac{1}{x_1-p}=\frac{1}{x_n-p}+q=\cdots=\frac{1}{x_1-p}+nq$$

此时，若 $q=0$，则 $a=-d$，由 $\Delta=0$ 可得 $ad-bc=0$，引出矛盾.故 $q\neq0$，从而方程组(1) 或方程组(2) 无解.

(2)$\Delta\neq0$ 的一般情形.此时记 $p_1=[(a-d)+\sqrt{\Delta}]/2$，$p_2=[(a-d)-\sqrt{\Delta}]/2$，则 $p_1\neq p_2$，$p_1=\dfrac{ap_1+b}{cp_1+d}$，$p_2=\dfrac{ap_2+b}{cp_2+d}$.从而

$$\frac{x_2-p_1}{x_2-p_2}=\frac{\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}-\dfrac{ap_1+b}{cp_1+d}}{\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}-\dfrac{ap_2+b}{cp_2+d}}\xlongequal{化简}\frac{cp_2+d}{cp_1+d}\cdot\frac{x_1-p_1}{x_1-p_2}$$

记 $\dfrac{cp_2+d}{cp_1+d}=q$，则 $q\neq0$，且

$$\frac{x_2-p_1}{x_2-p_2}=q\cdot\frac{x_1-p_1}{x_1-p_2},\frac{x_3-p_1}{x_3-p_2}=q\cdot\frac{x_2-p_1}{x_2-p_2}=q^2\cdot\frac{x_1-p_1}{x_1-p_2},\cdots,$$

$$\frac{x_n-p_1}{x_n-p_2}=q\cdot\frac{x_{n-1}-p_1}{x_{n-1}-p_2}=\cdots=q^{n-1}\cdot\frac{x_1-p_1}{x_1-p_2},$$

$$\frac{x_1-p_1}{x_1-p_2}=q\cdot\frac{x_n-p_1}{x_n-p_2}=\cdots=q^n\cdot\frac{x_1-p_1}{x_1-p_2}$$

情形 1　$q^n\neq1$，则方程组(1) 或方程组(2) 有两解：$(p_1,p_1,\cdots,p_1)$ 和 $(p_2,p_2,\cdots,p_2)$.

情形 2　$q^n=1$，则方程组(1) 或方程组(2) 有无穷多个解：$(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，其中 $r_k=\dfrac{p_1(r-p_2)-p_2(r-p_1)q^{k-1}}{(r-p_2)-(r-p_1)q^{k-1}}$，$k=1,2,\cdots,n$，$r\in\mathbf{C}$，$r\neq-d/c$，$(r-p_2)-(r-p_1)q^{k-1}\neq0$，即对每个 k，$k=1,2,\cdots,n$，只要 $q^{k-1}\neq1$，便有 $r\neq\dfrac{p_2-p_1q^{k-1}}{1-q^{k-1}}$.

例 3　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x+5}=y\\\dfrac{3y-1}{y+5}=z\\\dfrac{3z-1}{z+5}=x\end{cases}$$

简解　$\Delta=(5-3)^2+4\cdot(-1)\cdot 1=0$,方程组无解.

例 4　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{3x+5}{x+7}=y\\\dfrac{3y+5}{y+7}=z\\\dfrac{3z+5}{z+7}=x\end{cases}$$

简解　$\Delta=(7-3)^2+4\cdot 5\cdot 1=6^2$,$p_1=1$,$p_2=-5$,$q=1/4$,方程组有两解:$(1,1,1)$ 和 $(-5,-5,-5)$.

例 5　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_1-1}{x_1+2}=x_2\\\dfrac{x_2-1}{x_2+2}=x_3\\\cdots\\\dfrac{x_5-1}{x_5+2}=x_6\\\dfrac{x_6-1}{x_6+2}=x_1\end{cases}$$

简解　$\Delta=(2-1)^2-4\times1\times1=-3$,$p_1=\omega$,$p_2=\omega^2$,$\omega$ 同例 2,$q=-\omega$,方程组有无穷多个解:$\left(r,\dfrac{r-1}{r+2},-\dfrac{1}{r+1},-\dfrac{r+2}{2r+1},-\dfrac{r+1}{r},-\dfrac{2r+1}{r-1}\right)$,$r\in\mathbf{C}$,$r\neq-2,-1,0,1,-\dfrac{1}{2}$.

§3　余弦循环方程组

设 $f(x)=2x^2-1$,则称 $f(x)$ 循环方程组为 2 倍角余弦循环方程组;改为 $f(x)=4x^3-3x$,则称 $f(x)$ 循环方程组为 3 倍角余弦循环方程组;… 一般地,

设 $\cos m\theta = f(\cos\theta)$，$f(x)$ 为 m 次第一类切比契夫多项式，则称 $f(x)$ 循环方程组为 m 倍角余弦循环方程组，均简称为余弦循环方程组. 下面讨论方程组的求解.

1. 2 倍角余弦循环方程组

(1) $|x| \leqslant 1$ 的情形. 此时可设 $x_1 = \cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$，则 $x_2 = \cos 2\theta, x_3 = \cos 4\theta, \cdots, x_n = \cos 2^{n-1}\theta, x_1 = \cos 2^n\theta$，归结为三角方程

$$\cos 2^n\theta = \cos\theta \tag{7}$$

其解为 $\theta = \dfrac{2k}{2^n - 1}\pi, 0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1$ 或 $\theta = \dfrac{2k}{2^n + 1}\pi, 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$，分别记为 θ_k 和 θ_k'，从而得到方程组(1) 或方程组(2) 的 2^n 个解

$$(\cos\theta_k, \cos 2\theta_k, \cdots, \cos 2^{n-1}\theta_k) \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1 \tag{8}$$

$$(\cos\theta_k', \cos 2\theta_k', \cdots, \cos 2^{n-1}\theta_k') \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} \tag{9}$$

另一方面，用逐步代入法可知 x_1 应满足一个 2^n 次的代数方程，在复数范围内恰有 2^n 个解，从而恰可导出方程组的 2^n 个解. 因此式(8)、(9) 已是方程组的全部解.

(2) $|x| > 1$ 的情形. 由上一段的讨论知方程组不存在使 $|x_1| > 1$ 的解，但请注意例 7 的变例(利用了双曲余弦函数).

例 6　解方程组

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 = y \\ 2y^2 - 1 = z \\ 2z^2 - 1 = x \end{cases}$$

简解　$n = 3, \theta_k = \dfrac{2}{7}k\pi, 0 \leqslant k \leqslant 3, \theta_k' = \dfrac{2}{9}k\pi, 1 \leqslant k \leqslant 4$，方程组有 8 个解：$(\cos\theta_k, \cos 2\theta_k, \cos 4\theta_k), 0 \leqslant k \leqslant 3$ 和 $(\cos\theta_k', \cos 2\theta_k', \cos 4\theta_k'), 1 \leqslant k \leqslant 4$.

例 7　解方程组

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 = y \\ 2y^2 - 1 = z \\ 2z^2 - 1 = u \\ 2u^2 - 1 = \sqrt{5} \end{cases}$$

解　若 $|x| \leqslant 1$，由前面的论述可得 $\sqrt{5} = \cos 16\theta$，引出矛盾. 故 $|x| > 1$，可令 $x = \pm \operatorname{ch}\theta = \pm \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$(双曲余弦函数)，$\theta \geqslant 0$，则易见 $y = \operatorname{ch} 2\theta, z = \operatorname{ch} 4\theta, u = \operatorname{ch} 8\theta$，从而 $\sqrt{5} = \operatorname{ch} 16\theta = (e^{16\theta} + e^{-16\theta})/2$，解得 $e^{16\theta} = \sqrt{5} \pm 2$，

$16\theta = \ln(\sqrt{5}\pm 2)$, $\theta = \frac{1}{16}\ln(\sqrt{5}\pm 2)$，故

$$(x,y,z,u) = \left(\pm\frac{\sqrt[16]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[16]{\sqrt{5}-2}}{2},\frac{\sqrt[8]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[8]{\sqrt{5}-2}}{2},\right.$$
$$\left.\frac{\sqrt[4]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}}{2},\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$$

共 2 个解.

2. m 倍角余弦循环方程组($m\geqslant 3$)

讨论类似于本节中第 1 小节的情形，仅举两例说明.

例 8 解方程组

$$\begin{cases}4x^3-3x=y\\4y^3-3y=x\end{cases}$$

简解 $n=2$, $m=3$. 设 $|x|\leqslant 1$, $x=\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则 $y=\cos 3\theta$, $x=\cos 9\theta=\cos\theta$, $9\theta=2k\pi\pm\theta$, $k\in\mathbf{Z}$, $\theta=\frac{k}{4}\pi\xrightarrow{\text{记}}\theta_k$, $k=0,1,2,3,4$；或 $\theta=\frac{k}{5}\pi\xrightarrow{\text{记}}\theta_k'$, $k=1,2,3,4$. 可得方程组的 9 个解(类似于前述讨论，可知这已是方程组的全部解)：$(\cos\theta_k,\cos 3\theta_k)$, $k=0,1,2,3,4$ 和 $(\cos\theta_k',\cos 3\theta_k')$, $k=1,2,3,4$.

评注 请读者用通常的代数变换法求解此方程组，得到根式解，并比较这里的结果.

例 9 解方程组($x,y\in\mathbf{R}$)

$$\begin{cases}4x^3-3x=y\\4y^3-3y=5\end{cases}$$

简解 如上讨论，$|x|\leqslant 1$ 时方程组无解. 故 $|x|>1$，可令 $x=\pm\operatorname{ch}\theta$, $\theta>0$，可得 $y=\pm\operatorname{ch}3\theta$, $5=\pm\operatorname{ch}9\theta$，但 $5=-\operatorname{ch}9\theta$ 无解，故 $5=\operatorname{ch}9\theta$，解得 $\theta=\frac{2}{9}\ln(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})$, $(x,y)=\left(\frac{\sqrt[9]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[9]{5-2\sqrt{6}}}{2},\frac{\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}}{2}\right)$.

评注 本方程组另有 8 个复数解，但求解较繁.

3. 混合型余弦循环方程组.

仅举 1 例说明名称的缘由及求解方法.

例 10 解方程组

$$\begin{cases}4x^3-3x=y\\2y^2-1=x\end{cases}$$

简解 设 $|x|\leqslant 1$, $x=\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则 $y=\cos 3\theta$, $x=\cos 6\theta=$

$\cos\theta, 6\theta = 2k\pi \pm \theta, k \in \mathbf{Z}, \theta = \frac{2}{5}k\pi, k = 0,1,2$ 或 $\theta = \frac{2}{7}k\pi, k = 1,2,3$,分别记为 θ_k 和 θ_k',可得方程组的6个解(已是全部解):$(x, y) = (\cos\theta_k, \cos 3\theta_k)$, $k = 0,1,2$ 和 $(\cos\theta_k', \cos 3\theta_k')$, $k = 1,2,3$.

§4　正切循环方程组

设 $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$,则称 $f(x)$ 循环方程组为2倍角正切循环方程组;改为 $f(x) = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$,则称为3倍角正切循环方程组;……;一般地,设 $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, g(x) = \binom{n}{1}x - \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{5}x^5 - \cdots, h(x) = 1 - \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{4}x^4 - \binom{n}{6}x^6 + \cdots$,则 $\tan m\theta = f(\tan\theta)$,称 $f(x)$ 循环方程组为 m 倍角正切循环方程组,均简称为正切循环方程组.类似地可定义余切循环方程组,留给感兴趣的读者.

1.2 倍角正切循环方程组的实数解

此时可设 $x_1 = \tan\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,则 $x_2 = \tan 2\theta, x_3 = \tan 4\theta, \cdots, x_n = \tan 2^{n-1}\theta, x_1 = \tan 2^n\theta = \tan\theta$,故 $2^n\theta = k\pi + \theta, k \in \mathbf{Z}$,从而 $\theta = \frac{k}{2^n - 1}\pi, 1 - 2^{n-1} \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1$,于是方程组(1)或方程组(2)有 $2^n - 1$ 个实数解:$(\tan\theta_k, \tan 2\theta_k, \cdots, \tan 2^{n-1}\theta_k), \theta_k = \frac{k}{2^n - 1}\pi, 1 - 2^{n-1} \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1$.

2.2 倍角正切循环方程组的复数解

令 $x = \frac{2x}{1-x^2}$,解得 $x = 0, \pm \mathrm{i}$.因此可考虑

$$\frac{\mathrm{i} - x_2}{\mathrm{i} + x_2} = \frac{\mathrm{i} - \frac{2x_1}{1 - x_1^2}}{\mathrm{i} + \frac{2x_1}{1 - x_1^2}} = \left(\frac{\mathrm{i} - x_1}{\mathrm{i} + x_1}\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{i} - x_3}{\mathrm{i} + x_3} = \left(\frac{\mathrm{i} - x_2}{\mathrm{i} + x_2}\right) = \left(\frac{\mathrm{i} - x_1}{\mathrm{i} + x_1}\right)^4$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{i}-x_n}{\mathrm{i}+x_n}=\left(\frac{\mathrm{i}-x_{n-1}}{\mathrm{i}+x_{n-1}}\right)^2=\cdots=\left(\frac{\mathrm{i}-x_1}{\mathrm{i}+x_1}\right)^{2^{n-1}}$$

$$\frac{\mathrm{i}-x_1}{\mathrm{i}+x_1}=\left(\frac{\mathrm{i}-x_n}{\mathrm{i}+x_n}\right)^2=\cdots=\left(\frac{\mathrm{i}-x_1}{\mathrm{i}+x_1}\right)^{2^n}$$

令$\frac{\mathrm{i}-x_1}{\mathrm{i}+x_1}=t$,则$t^{2^n}=t$,$t=0$或$t^{2^n-1}=1$,$t=e^{\mathrm{i}\alpha_k}$,$\alpha_k=\frac{2k\pi}{2^n-1}$,$1-2^{n-1}\leqslant k\leqslant 2^{n-1}-1$.因此可解得方程组(1)或方程组(2)的全部解为上述2^n-1个实数解和2个复数解($\pm\mathrm{i}$, $\pm\mathrm{i}$,$\cdots$, $\pm\mathrm{i}$).

3. m 倍角正切循环方程组

解法类似于上,仅举一例说明.

例 11 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}=y\\[2ex]\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}=x\end{cases}$$

简解 $\frac{\mathrm{i}-y}{\mathrm{i}+y}=\left(\frac{\mathrm{i}-x}{\mathrm{i}+x}\right)^3$,$\frac{\mathrm{i}-x}{\mathrm{i}+x}=\left(\frac{\mathrm{i}-y}{\mathrm{i}+y}\right)^3=\left(\frac{\mathrm{i}-x}{\mathrm{i}+x}\right)^9$,可解得全部解为7个实数解:$(\tan\theta_k,\tan 3\theta_k)$,$\theta_k=\frac{k}{8}\pi$,$-3\leqslant k\leqslant 3$,以及2个复数解:($\pm\mathrm{i}$, $\pm\mathrm{i}$,$\cdots$, $\pm\mathrm{i}$).

4. 混合型正切循环方程组

诸如

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{1-x^2}=y\\[2ex]\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}=x\end{cases}$$

之类,留给感兴趣的读者.

编后语 1992年诺贝尔经济学奖获得者 Gary S. Becker 曾说:"我有位老师,费兰克·奈特(Frank Knight),他认为经济学是如此简单,因此他纳闷为什么平常人不能成为伟大的经济学家.经济学是简单的,因此没什么技巧可言,只要使用得有意义,但使用得有意义却并不总是容易办到的."(《圆桌会议:展望法与经济学的未来》,《比较》19期:73.).与经济学不同,平常人注定不能成为数学家,更不要谈著名.因为数学是复杂的,是充满技巧的,但我们可以将它们使用得有技巧,这并不是太难做到的,吴康教授等的文章就是一篇讲解题技巧的文章.吴康教授兴趣广泛,会写词作曲并演唱,2003年第一届数学奥林匹克理论研讨会在湖南师范大学召开时,晚间聚会的表演使代表们眼界大开.

Riemann 猜想漫谈(一)①

卢昌海 [美]

If you could be the Devil and offer a mathematician to sell his soul for the proof of one theorem-what theorem would most mathematicians ask for? I think it would be the Riemann Hypothesis.

—H. Montgomery

一、Hardy 的电报

让我们从一则小故事开始我们的 Riemann 猜想之旅吧.故事发生在大约 70 年前,当时英国有一位很著名的数学家叫做 Godfrey Hardy(1877—1947),他是两百年来英国数学界的一位"勇者".为什么说他是勇者呢?因为在 17 世纪的时候,英国的数学家与欧洲大陆的数学家之间发生了一场激烈的论战.论战的话题是谁先发明了微积分.论战的当事人一边是英国的科学泰斗 Isaac Newton (1642—1727),另一边是欧洲大陆(德国)的哲学及数学家 Gottfried Leibniz (1646—1716).这一场论战打下来,两边筋疲力尽自不待言,还大伤了和气,留下了旷日持久的后遗症.英国的许多数学家开始排斥起来自欧洲大陆的数学进展.一场争论演变到这样的一个地步,英国数学界的集体荣誉及尊严、Newton 的赫赫威名便都成了负资产,英国的数学在保守的舞步中走起了下坡路.

这下坡路一走便是两百年.

在这样的一个背景下,在复数理论还被一些英国数学家视为来自欧洲大陆

---

① 这个故事让我想起一句有趣的无神论者的祈祷语:God, if there is one, save my soul if I have one (上帝啊,如果你存在的话,拯救我的灵魂吧,如果我有灵魂的话).

远在 Riemann 之前,Riemann ζ 函数(当然那时还不叫这个名字)的级数表达式就已经出现在了数学文献中,但是那些表达式中函数的定义域较小.Riemann 把 Riemann ζ 函数的定义域大大地延拓了,这一点对于 Riemann 猜想的表述及研究具有重要的意义.仅凭这一点,即使把 Riemann 称为 Riemann ζ 函数的提出者之一,也并不过份.

$\sin(\pi s/2)$在 $s=0$ 及 $s=2n$(n 为自然数)时也为零,但是 $s=0$ 时 $\zeta(1-s)$有极点,$s=2n$(n 为自然数)时 $\Gamma(1-s)$有极点,因此只有在 $s=-2n$(n 为自然数)时可以由 $\sin(\pi s/2)=0$ 推知 Riemann ζ 函数的取值为零.

的危险概念的时候，土生土长的英国数学家 Hardy 却对来自欧洲大陆（德国——又是德国）、有着复变函数色彩的数学猜想——Riemann 猜想——产生了浓厚的兴趣，积极地研究它，并且取得了令欧洲大陆数学界为之震动的成就（这一成就将在后文中介绍），算得上勇者所为.

当时 Hardy 在丹麦有一位很好的数学家朋友叫做 Harald Bohr（1887—1951），他是著名量子物理学家 Niels Bohr 的弟弟. Bohr 对 Riemann 猜想也有浓厚的兴趣，曾与德国数学家 Edmund Landau（1877—1938）一起研究 Riemann 猜想（他们的研究成果也将在后文中介绍）. Hardy 很喜欢与 Bohr 共度暑假，一起讨论 Riemann 猜想，常常待到假期将尽才匆匆赶回英国. 结果有一次当他赶到码头时，发现只剩下一条小船可以乘坐了. 在汪洋大海中乘坐一条小船可不是闹着玩的事情，弄得好算是浪漫刺激，弄不好就得葬身鱼腹. 信奉上帝的乘客们此时都忙着祈求上帝的保佑. Hardy 却是一个坚决不信上帝的人，不仅不信上帝，有一年还把向大众证明上帝不存在列入自己的年度六大心愿之中，且排名第三（排名第一的是证明 Riemann 猜想）. 不过在这生死攸关的时刻 Hardy 也没闲着，他给 Bohr 发去了一封电报，电报上只有一句话：

"我已经证明了 Riemann 猜想！"

Hardy 为什么要发这么一个电报呢？回到英国后他向 Bohr 解释了原因，他说如果那次他乘坐的船真的沉没了，那人们就只好相信他真的证明了 Riemann 猜想，但他知道上帝是肯定不会把这么巨大的荣誉送给他——一个坚决不信上帝的人——的，因此上帝一定不会让他的小船沉没的.①

上帝果然没有舍得让 Hardy 的小船沉没. 自那以后又过去了 70 来个年头，吝啬的上帝仍然没有物色到一个可以承受这么大荣誉的人.

二、Riemann ζ 函数与 Riemann 猜想

那么这个让上帝如此吝啬的 Riemann 猜想究竟是一个什么样的猜想呢？在回答这个问题之前我们先来介绍一个函数：Riemann ζ 函数. 这个函数虽然挂着 Riemann 的大名，却不是 Riemann 提出的. 但是 Riemann 虽然不是这一函数的提出者，他的工作却大大加深了人们对这一函数的理解，为其在数学与物理上的广泛运用奠定了基础. 后人为了纪念 Riemann 的卓越贡献，就用他的名字命名了这一函数.[2]

Riemann ζ 函数 $\zeta(s)$ 是级数表达式（n 为自然数）

$$\zeta(s)=\sum_{n}n^{-s}\qquad \mathrm{Re}(s)>1$$

在复平面上的解析延拓. 之所以需要解析延拓，是因为上面这一表达式 —— 如

① 注：[1]、[2]见下册.

我们已经注明的——只适用于平面上 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 的区域(否则级数不收敛).Riemann 找到了上面这一表达式的解析延拓(当然 Riemann 没有使用"解析延拓"这一现代复变函数论的术语).运用路径积分,解析延拓后的 Riemann ζ 函数可以表示为

$$\zeta(s) = \frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi}\int_C \frac{(-w)^{s-1}}{e^w - 1}\mathrm{d}w$$

式中的积分环绕正实轴进行(即从 ∞ 出发,沿实轴上方积分至原点附近,环绕原点积分至实轴下方,再沿实轴下方积分至 ∞——离实轴的距离及环绕原点的半径均趋于 0);式中的 Γ 函数 $\Gamma(s)$ 是阶乘函数在复平面上的推广,对于正整数 $s > 1$:$\Gamma(s) = (s-1)!$.可以证明,这一积分表达式除了在 $s = 1$ 处有一个简单极点外在整个复平面上解析.这就是 Riemann ζ 函数的完整定义.

运用上面的积分表达式可以证明,Riemann ζ 函数满足以下代数关系式

$$\zeta(s) = 2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin(\pi s/2)\zeta(1-s)$$

从这个关系式中不难发现,Riemann ζ 函数在 $s = -2n$(n 为自然数)取值为零,因为 $\sin(\pi s/2)$ 为零[3].复平面上的这种使 Riemann ζ 函数取值为零的点被称为 Riemann ζ 函数的零点.因此 $s = -2n$(n 为自然数)是 Riemann ζ 函数的零点.这些分布有序的零点性质十分简单,被称为 Riemann ζ 函数的平凡零点(trivial zeros).除了这些平凡零点外,Riemann ζ 函数还有许多其他的零点,那些零点被称为非平凡零点.对 Riemann ζ 函数非平凡零点的研究构成了现代数学中最艰深的课题之一.我们所要讨论的 Riemann 猜想就是关于这些非平凡零点的猜想,在这里我们先把它的内容表述一下,然后再叙述它的来龙去脉:

> Riemann 猜想:Riemann ζ 函数的所有非平凡零点(non - trivial zeros)都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 的直线上.

在 Riemann 猜想的研究中数学家们把复平面上 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 的直线称为 critical line,运用这一术语,Riemann 猜想也可以表述为:Riemann ζ 函数的所有非平凡零点都位于 Critical line 上.

这就是 Riemann 猜想的内容,它是 Riemann 在 1859 年提出的.从其表述上看,Riemann 猜想似乎是一个纯粹有关复变函数的命题,但我们很快将会看到,它其实却是一曲有关素数分布的神秘乐章.

2003 年 11 月 6 日写于纽约

http://www.changhai.org/

编后语 在 Notices of the AMS Vol 50(2003)中 J. Brian Conrey 指出：Hilbert 在其著名的 1990 年 Paris 国际数学家大会上的演讲中，将 Riemann 假设列为 20 世纪的数学家有待研究的 23 个问题之一，现在我们发现它被摆在 21 世纪的数学家面前！Riemann 假设(RH)被提出到现在已经过 140 年，现在可能是关于它的研究的历史中最活跃的时期，近年来，在数学和物理的若干领域的交汇处，有大量关于 RH 的研究工作出现.

在过去的 10 年中，American Institute of Mathematics(AIM)资助了 3 个聚焦 RH 的专题讨论会，第 1 次(RH Ⅰ)是 1996 年 8 月在西雅图华盛顿大学，第 2 次(RH Ⅱ)是 1998 年 10 月在维也纳的 Erwin Schrödinger 研究所，第 3 次(RH Ⅲ)是 2002 年 5 月在 New york 的 Courant 数学研究所.

鉴于这个数学中最具挑战性的问题再度引起人们关注，以及 Andrew wiles 证明了 Fermat 大定理后未解决的大猜想越来越少.我们在这里发表海外华人卢昌海先生的长篇论著的第一节 Riemann 猜想漫谈.

卢昌海先生先就读于上海复旦大学物理系后留学美国，现在华尔街从事股票投资，曾亲自参加 RH 的零点验证工作.(数以兆计的零点符合 RH，最近 rande Lune 的工作显示前 10 兆零点都在$\frac{1}{2}$直线上，另外，Sebastian Wedeniwaki 组织了一个多人捐助的分布计算计划，它宣称已验证前 100 兆零点都在 1/2 轴上，Anderew Odlyzko 也已经计算了在零点 10^{20}、10^{21} 和 10^{22} 附近数以百万计的零点)

本文经上海《科学》杂志编辑田廷彦先生推荐发表.

2005 年底辽宁教育出版社出版了一本"奇书"——《上帝掷骰子吗？量子物理史话》，内容充满了日本动漫《名侦探柯南》和金庸武侠，作者曹天元与本文作者卢昌海非常类似，出生于上海，从复旦大学毕业后去了美国.而且都非专业人士，曹天元学的是金融与经济，而卢昌海学的是物理，更加巧合的是二人都是从网络写手开始.据新浪网论坛主编董文俊介绍《量子物理史话》2003 年 4 月以连载形式出现在新浪网"大话春秋论坛"，2004 年 6 月刊完，而卢昌海也开始于 2003 年(网址：http://www.changhai.org)并且直到今天也没有写完，二人涉及的均是数学和物理中的超级难题，看来科普也进入了平民化的"超女"时代，但愿本文集发行量也如《量子物理史话》一样出人意料.

A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns... The mathematician's patterns, like the painter's or poet's, must be beautiful... Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

——哈代

我国之三分角家及方圆家

余宁生 述

§1 三分角问题略史

三等分角之尺规作圆问题，在公元5世纪(约在周贞定王时)，希腊即已有人研究，但因纯粹几何不能决定其本身能力之范围，正如Archimedes不能自举其身所居之地球(除非是另有支点)，故虽经多人努力，终未获结果．直至公元1638年(明崇祯十二年)，法国大哲学家Descartes创建解析几何，始得尺规作圆之解析准则．然此法则，须待求作几何元素之解析式获得后，方能判定，尚不能应用于未求出之先．故又待200年，至1837年(清道光十七年)Wantzel简化关于方程式代数解法之Abel定理时，始连带证明三等分角与倍立方两问题不能用尺规作圆，此2 400年前之古问题，经过1 100余载无结果之尝试，始见端倪，复历200年，方告否决，迄今又110余载矣．

§2 汪联松君

1936年8月18日，北平晨报登载郑州铁路站长汪联松君之三分角作法，颇引起国人注意．据其自述，乃耗14年精力所获之结果．其法为错误，自不待言，舛谬之点，在一轨迹问题：以$\angle BAC$为任意角，作$ED \parallel BA$．取A为心作若干同心圆，交AC于K，交DE于H，则KH弧中点轨迹为一直线．驳斥其说者，同年9月27日武汉扫荡报，有李森林君一文，11月份数学杂志，有顾澄君一文，12月份中等数学月刊，有郭焕庭、刘乙阁二君一文，各用不同方法，指陈该理之误．盖其轨迹实为一二次以上之曲线也．郭刘二君曾求出轨迹之直坐标方程式．笔者试以极坐标法解之，较为简便，兹录如次：

如图 1，取 A 点为极，HK 弧中点为 $M(r,\theta)$，则 H 点之极坐标显为 $(r,2\theta)$. 延长 KA 交 DE 于 G，命 $GA=c$，因 $DE\parallel AB$，故

$$\angle DHA=\angle HAB=2\theta-\alpha$$
$$\angle HGA=\angle BAK=\alpha$$

用正弦定律于 $\triangle AGH$，得

$$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin(2\theta-\alpha)}$$

所以
$$r\sin(2\theta-\alpha)=c\sin\alpha$$

再化为直坐标方程式，即知其非直线，读者试自为之.

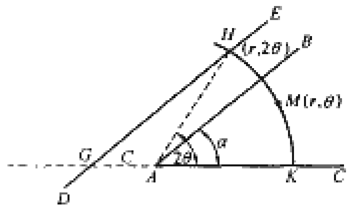


图 1

§3　吴佑之君

汪君之作，在抗日战争前一年，战时八载艰辛，国人咸致力于救亡图存之大业，本题无关现实，遂沉寂不复有所闻. 1945 年 8 月 14 日胜利来临，民族精神奋振，对此纯理问题，又引人兴趣，继汪君而起者为成都吴佑之君，其作法见 1946 年 12 月四川省立科学馆之科学月刊第四期，今简化如次：

设 BAC 为已知角，a 为定长，在 AC 上，取 $AS=SR=a$；在 AB 上，取 $AO=OQ=a$，作 $SS'\,//\,RR'\,//\,AB$，及 $OO'\,//\,QQ'\,//\,AC$，令 OO' 与 RR' 交于 M，又 QQ' 与 SS' 交于 N，则 AM 与 AN 为求作之三等分线(图 2).

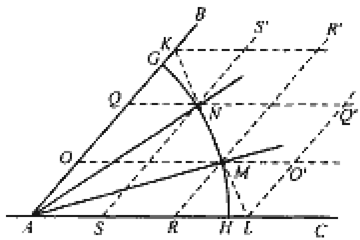


图 2

上法之不合，甚属显然，试在角之二边上，取 $RL=OK=a$，则易证 $LM=MN=NK$，且 L,M,N,K 共在一直线上，而 $AM=AN$，以 A 为心，作过 M 与 N 之弧，交二边于 H 与 G，如 HM，MN 与 NG 三弧相等，则 MN 与 NG 二弦亦必等. 但 $\triangle NAG$ 为等腰，故 $\angle AGN$ 为锐角，而其补角 $\angle NGK$ 为钝角，必大于锐角 $\angle AKN$(为等腰三角形 LAK 之底角). 因此 $GN>KN=MN$，由此矛盾，可断 MN 与 NG 二弧不相等.

吴君对其作法，颇具信心，1948 年 1 月初上海杨嘉如君发明三分角法之讯盛传各地后，吴君于 18 日发表其意见，谓"五六年前已精心研究，杨君之论，恐是抄袭"云云，5 月 14 日又致函本编译者，另举一作法，原作繁冗，删去其中无关

步骤，简化如下文.

在 $\angle MON$ 二边上，取 $OA = OB$，联 AB，三等分于 F 与 F'，作过 F 及 F' 而与 AB 垂直之二直线，交以 O 为心，以 OA 为半径之圆弧于 E 及 E'，再以 A 为心，EE' 为半径，作弧交 AB 弧于 K，过 K 任作一直线，在其上任意取 $KB_3 = B_3B_2 = B_2B_1$，三等分 KE 弦于 G 与 H，联 B_2H 与 AE 弧之交点，即为 AB 弧上三等分点(图 3).

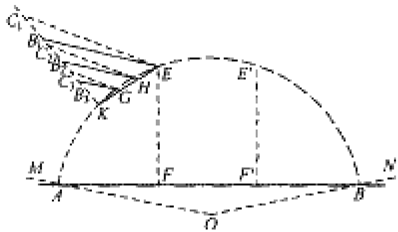


图 3

原作未有证明，其意显然认 KE 与 KB_1 上三等分点联线必三等分 KE 弧，其谬误极易见. 因显然可在过 K 所引直线上，另取首尾相接之三等长线段，并加上法联至 KE 上之三等分点，其与 KE 弧之交点，自与上异，而得另一组三等分点矣. 译者举此以答吴君，不复见其有所表示，似已自明其误，不意事隔恰一周年，忽有灌县袁履坤君，于 1949 年 5 月 13 日，致函四川大学数理研究会主办之笛卡尔半月刊，称"吴君……已完成全部解法，…… 诚为吾国学术界之光荣.……特 …… 附寄吴君原稿，敬希披露" 云云，阅其解法及证明，较之一年前著作，实未见有何进步，所表现之学力，尚未逮初中程度，其证明仍多错误，不再录于此. 兹仅述其作法而示其不合如次.

其作法在任意 $\angle BAC$ 二边上，取 $AE = AF$，作等腰梯形 $EFDH$，并使等腰等于一底，即 $EH = HD = DF$，吴君认 AD 与 AH 三等分已知角 BAC(图 4).

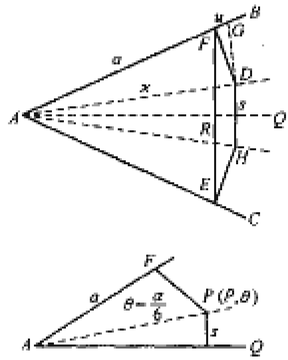


图 4

作 $\angle BAC$ 之分角线 AQ，由解析几何理知 D(与 H) 轨迹为一双曲线，以 $F(E)$ 为焦点，AQ 为准线，而离心率 $e = 2$，此双曲线与三分角线只有二交点，故除巧合外(此不得谓为尺规作图)，D(或 H) 之位置，不能适合，综观吴君三种

作法,皆乏确定性,不特理论上不能成立,其误差亦每大至相当程度,毫无实用上价值.

今进以极坐标法求上述之交点,取 A 为极,AQ 为极轴,双曲线上动点 D 之极坐标为(ρ,θ),命 $\angle CAB=\alpha$,$AF=a$,自 D 至AQ 之距离为 s,则 $s=\rho\sin\theta$,又按余弦定律,$PF^2=a^2+\rho^2-2a\rho\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)$.

代入 $PF^2=4s^2$,有 $a^2+\rho^2-2a\rho\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)=4\rho^2\sin^2\theta$,即为双曲线之极方程式,再求其与三等分角线 $\theta=\frac{\alpha}{6}$ 之交点

$$a^2+\rho^2-2a\rho\cos\frac{\alpha}{3}=4\rho^2\sin^2\frac{\alpha}{6}$$

$$\rho^2\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{6}\right)-2a\rho\cos\frac{\alpha}{3}+a^2=0$$

或 $\rho^2\left(2\cos\frac{\alpha}{3}-1\right)-2a\rho\cos\frac{\alpha}{3}+a^2=(\rho-a)\left[\rho\left(2\cos\frac{\alpha}{3}-1\right)-a\right]=0$

故得二根为 $\rho=a$,$\rho=\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{3}-1}$,由前一根,知所求点乃以 A 为心,以 AF 为半径之圆,与双曲线之交点,须由四次方程式方可定之,仍未可藉尺规求作,至于后一根,必须先求 $\cos\frac{\alpha}{3}$,亦即应先作$\frac{\alpha}{3}$,归于本题.

上文获致之结果,用纯几何理亦可明之.如 AD 为一三分角线;则在$\triangle ADH$,$\triangle ADF$ 中,$\angle DAH=\angle DAF$,有公共边 AD,且 $DH=DF$,故此二三角形,有二边及其一相对角,对应相等,故必 $\angle AHD(=\angle ADH)$ 与 $\angle AFD$,或相等,或相补,在相当时,$AD=AH=AF$,即 $\rho=a$ 之情形.在相补时,因 $\angle AHD$ 为等腰三角形底角,必为锐角,故 $\angle AFD$ 必为钝角,以 D 为心,DF 为半径作弧,与 AB 边之交点 G,必在线段 AF 过 F 之延长线上,可命 $DH=2s$,$AF=a$ 如前;且$AD=x$,$FG=u$,显见 $x=a+u$,此时 $\triangle DAH\cong\triangle DAG$,故 $\angle ADH=\angle AGD$,是以等腰三角形 DAH 与 FDG 相似.因此

$$x:2s=2s:u$$

即
$$x:2x\sin\frac{\alpha}{6}=2x\sin\frac{\alpha}{6}:x-a$$

$$4x\sin^2\frac{\alpha}{6}=x-a$$

所以
$$\frac{a}{1-4\sin^2\frac{\alpha}{6}}=\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{3}-1}$$

§4　杨师禹君

稍后于吴佑之君者有杨师禹君.1947年6月科学月刊第10期载有其三等分60°角作法及证明,且指出原证中不合之点,兹不复录其证,仅由笔者简化其作法,并以较浅明方法,示其错误.

杨君之法首为任作一圆,过60°之C角顶点,交其二边于A及B,兹为讨论简便计,设所作圆之心O在其一边上,再取AO为直径作一圆O'.自O作AB之垂线OF,延长之交O圆于P,在FA上取$FH=\frac{1}{2}FP$,在H作AB之垂线交O'圆于D,联AD及OD各交O圆于Q与R,则CR,CQ三等分60°之C角(图5).

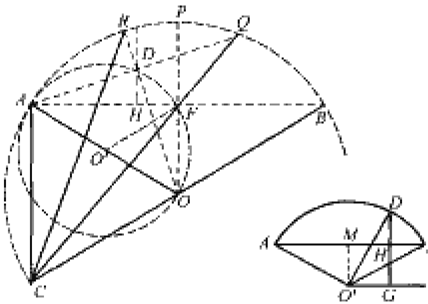


图5

命$OB=OC=1$,因$\angle C=60°$,而$\angle CBA=30°$,$\angle AOB=\angle AO'F=120°$,故易明

$$AC=1, AB=\sqrt{3}, OF=FP=\frac{1}{2}, HF=\frac{1}{2}FP=\frac{1}{4}$$

$$O'A=O'F=\frac{1}{2}, AF=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

再自O'作$O'M\perp AF$,$O'G\parallel AF$与DH之延长线交于G,则$DG\perp O'G$,由此得

$$O'G=MH=MF-HF=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\cos\angle DO'G=\frac{O'G}{O'D}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)=\frac{1}{2}\times 0.732\ 05=0.366\ 025$$

检表得

$$\angle DO'G = 68°31'46''$$

故
$$\angle DO'F = \angle DO'G - \angle GO'F = 38°31'46''$$

$$\angle BCQ = \angle BAQ = \frac{1}{2}\angle DO'F = 19°15'53''$$

与 20° 相差约 4%.

§5 杨嘉如君

以三分角问题而哄动一时者，当推上海一会计员杨嘉如君，其法系 1948 年 1 月 4 日上海大陆报首先揭布，据伪中央社报导(1 月 6 日伪中央社上海电)，"颇引起科学界之重视，且佥认为我国数界上之光荣……早在 1938 年，他就证明了这个原则，一度曾将其法则呈诸牛津、剑桥诸大学，及纽约泰晤士学院、加尼西学院，以待证实.他们的答案，颇有相同之处，都认为仅用圆规与直尺来解答三等分任何一角问题，绝不可能，并众口一声地劝告杨君放弃这个企图……杨君肄业扈市中法学堂时，……承认'圆形求积'与'立方展开'之不可能，而对'一角三等分'之不可能起了怀疑，9 年以后，杨君以衣架作戏，忽然……起了特殊的灵感，……就寻得了答案".此传奇式之消息，遂激动一般人士之好奇心，其时各地知名之数学家，对此仍表怀疑，1 月 9 日天津大公报，载有南开大学吴大任教授谈话；1 月 12 日伪中央社长春电，详述长春大学教务长张德馨博士意见；皆指出本题解决之不可能.惟杨君自信之强，尤甚于吴佑之君.彼曾谓"……我深信我确实已发明这个原则，除非有人能指出他的谬误，否认……法则的正确性".又称"我静候全世界科学家数学家，来公认这原则的正确性，或是指出他的破绽".更气愤言之，曰"高等数学，我虽不懂，不过我希望海内外同流，能不吝指出我法则的错误处".孟子有言，"舜人也，予人也，有为者亦若是"，三分角家之精神类此，自未可厚非，惜其致力之途径则谬，有志作纯理研究者，首当知所研讨之问题，今日已发展至若何程度，权威之说，如无充分理由，固可不必轻信，但亦不必无故"轻"疑.今日之纯理科学，已达高远之域，未具有基本学识及相当修养者，断难望有徒恃灵感即可成功之事，否则徒耗时间精力，终归失败.

兹请先简述其作法，次指其错误.

设 $\angle BAC$ 为欲三等分之角，以 A 为心，任意长为半径，作圆弧，交其二边于 H 与 I.联 HI 弦，取作直径，在其上作一半圆，IH 上右三等分点为 L，半圆上右三等分点为 O，作 LO 之中垂线，交 HI 之延线上于 U，以 U 为心，$UL = UO$ 为半径作弧，交圆心角 $\angle HAI$ 之对弧于 W；即为所求三等分点之一，同法可作出另一三等分点 V(图 6).

杨君之证明，为其原作之第 18 条，谓“…… 平分 BAW 角及 CAV 的二等分线，…… 将恰合于三等分线上”；无怪乎有人评为“实是滑稽之至，自欧氏以来，从未有用此种方法作为证明者”.

上法所犯之病，与汪联松君同，尽皆误认某种轨迹之性质也. 若此作圆能合，即不啻认：遇二定点之一切圆弧上，每一三等分点之轨迹为圆，其是否正确，自不难验以解析几何.

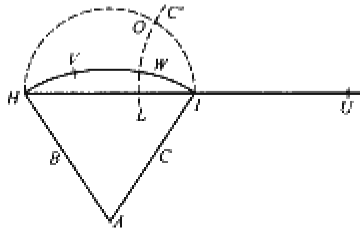


图 6

取 HI 为 x 轴，其中垂线为 y 轴(图略)，并命各点坐标为

$$A(0,-\lambda),H(-k,0),I(k,0)$$

且 HI 弧上右三等分点为 $P(x,y)$，而 $AH = AI = R$ 与 $\angle YAF = \theta,\angle YAI = 3\theta$，如此则

$$\tan 3\theta = \frac{k}{\lambda},\sin\theta = \frac{x}{R},\cos\theta = \frac{y+\lambda}{R}$$

$$R^2 = k^2+\lambda^2 = k^2(1+\cot^2 3\theta) = k^2\csc^2 3\theta = \frac{k^2}{\sin^2 3\theta}$$

$$x = R\sin\theta = \frac{k\sin\theta}{\sin 3\theta} = \frac{k}{3-4\sin^2\theta}$$

$$y = R\cos\theta-\lambda = k\left(\frac{\cos\theta}{\sin 3\theta}-\cot 3\theta\right) = \frac{k(\cos\theta-\cos 3\theta)}{\sin 3\theta} =$$

$$\frac{2k\sin 2\theta\sin\theta}{\sin\theta(3-4\sin^2\theta)} = \frac{2k\sin 2\theta}{3-4\sin^2\theta}$$

所以

$$\frac{y}{x} = 2\sin 2\theta$$

即

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x} \tag{1}$$

但

$$3-4\sin^2\theta = \frac{k}{x}\qquad \sin^2\theta = \frac{1}{4}\left(3-\frac{k}{x}\right) = \frac{3x-k}{4x}$$

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-\frac{3x-k}{2x} = \frac{k-x}{2x} \tag{2}$$

将式(1)、(2) 两边平方相加，即得

$$\left(\frac{y}{2x}\right)^2+\left(\frac{k-x}{2x}\right)^2 = 1$$

化简后，并使成范式，即知乃双曲线

$$\frac{\left(x+\frac{k}{3}\right)^2}{\left(\frac{2k}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{2k}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$$

至于原作法所用之圆，以 $U(u,0)$ 为心，半圆上右三等分点 O 之坐标易知为

$$x=k\cos 60^\circ=\frac{k}{2}\qquad y=k\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}k$$

由 U 至 L 与至半圆上右三等分点 O 等远之理，得

$$\left(u-\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)^2=\left(u-\frac{k}{3}\right)^2$$

所以

$$\frac{1}{3}ku=\frac{8}{9}k^2\qquad u=\frac{8}{3}k$$

故圆之方程式为

$$\left(x-\frac{8}{3}k\right)^2+y^2=\left(\frac{7}{3}k\right)^2$$

即

$$x^2+y^2-\frac{16}{3}kx+\frac{15}{9}k^2=0$$

此圆与双曲线有交点二及互切点一如下

$$O_1\left(\frac{1}{2}k,\frac{\sqrt{3}}{2}k\right),\quad O_2\left(\frac{1}{2}k,-\frac{\sqrt{3}}{2}k\right),\quad L\left(\frac{1}{3}k,0\right)$$

此外更无其他交点.

§6　论准确度

吴杨二君之作法，皆系差近者，兹就直角之特例，论其准确度.

按吴君第一作法，当 $\angle BAC$ 为直角时

$$MR\perp AR$$

$$\tan\angle MAL=\frac{MR}{AR}=\frac{1}{2}$$

查表得 $\angle MAL=26^\circ34'$ 弱，与 30° 之差为 12% 弱. 由此又知 $\angle MAN=90^\circ-2\times 26^\circ34'=36^\circ52'$，误差尤大，竟约达 23%.

杨君作法之准确度颇高，为便利计算，取 $k=3$，注意

$$\cos 75^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\qquad \sin 75^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

则易得象限弧 IH 上右三等分点 P 之坐标为

$$x = 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$y = 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - 3 = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

所以
$$UP^2 = \left[\frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1) - 8\right]^2 + \left[\frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)\right]^2 =$$

$$106 - 33\sqrt{3} = 48.842\ 324$$

$$UP = \sqrt{48.842\ 324} = 6.989$$

故与圆半径 7 之差为 0.011，以此差为长之弦所对圆心角为 θ，则差近的

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{0.011}{3} = 0.001\ 8$$

查表
$$6' < \frac{\theta}{2} < 7'$$

即
$$12' < \theta < 14'$$

§7 袁成林君

除上述诸三分角家外，尚有兼方圆家者，为广汉交通部第五区八总段三十分段袁工程司成林．彼对此二题之解法，在 1948 年 1 月 21、22 两日成都新民报刊登，三分角作法原文为："$\angle AOB$ 为一任何角，以 O 点为圆心，作任意圆，引长 AO 交圆于 C 点，得 AOC 直线，然后以 C 为定点，用直尺及刚画圆之圆规，向 OB 上作 CD' 直线，但必须 DD' 为圆规之长，即等于 OD 之长(作法简单，因 C 点及 OB 为固定点线，作时将圆规与直尺并后移动即得)．即得 CDD' 直线，最后作 $OE \parallel CD$，则 $\angle BOE$ 为 $\frac{1}{3}\angle AOB$ 之角度"(图 7)．

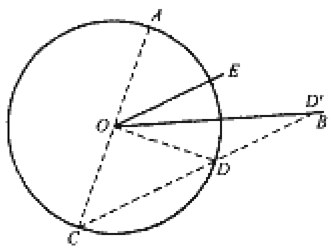


图 7

原文附有证明无误，与上述诸三分角家异，且其态度尚属谨慎，彼虽亦欲"向法国数学会、诺贝尔奖金会，及世界有名数学家审核 ……"，然有"但不知是否合乎原出题之规定" 一语，新民报披露此稿后，曾遣记者来译者处询问意见，比告以"…… 未合作图规矩，…… 圆规 …… 直尺之用，…… 不能如该作法所云：圆规与直尺合并后移动一类作法，故该法之证明虽无误，但不合作图之规矩，失其原意 ……"，袁工程司见 1 月 23 日报载此谈话后，曾致译者一函，将其

作法稍加修改，即过 C 作三适当直线，交 O 圆于 D_1, D_2, D_3，而在其延长线上，取 D_1', D_2', D_3' 使 $D_1D_1' = D_2D_2' = D_3D_3' = OC$，过 D_1', D_2', D_3' 作一圆交 OB 于 D，再如上法作圆即成（图略），其错误尽在认 D' 等轨迹为圆，不知其实乃 Pascal 蚶线（Limaçon），亦称心脏线（Cardioid），首以此解三分角者，为法人 Roberval（1602—1675），距今已有三百年之历史，译者以此意函复之，嗣后即未再得来信。

至于袁工程司之解方圆问题，错误在于认圆周率 π 为有理数 $\frac{22}{7}$，不知此实乃一差近值，其五位小数之值，为 3.142 86 弱，自第三位小数起，即已不复与 $\pi = 3.141\ 59\cdots$ 相同矣。二者之差，虽仅 0.04%，即万分之四，然究非相等。

§8　宋叙伦君

后于杨袁诸人约一载，又见成都新新新闻报导伪四川省府教育厅职员宋叙伦君创获三分角法之消息，而未载其法。承吾师曾远荣博士辗转托索得原文，兹简述其作法如次：

设 $\angle A$ 为欲三等分之角，以 A 为心作 BC 弧；另任取一点 D 为心，作一弧，在其上截取等弧 $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{GE}$，联 BE、DE，又联 DF, DG 交 BE 于 I 及 H。再联 CE，过 H 与 I，作 CE 之平行线，交 BC 于 J 与 K，则 AJ 与 AK 三等分已知角 A（图 8）。

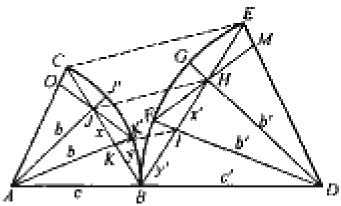


图 8

原作初未有证明，作者仅认其有正确性之可能。旋又发表其证法，大略如次：在 DE 上取 $EM = GH$，联成 EMH 与 FIH 两三角形，而证得二者全等，又在 AC 上取 $CO = J'J$，联成 COJ 与 $K'KJ$ 两三角形，而谓"如 n 倍 $CB = BE$，则此三角形亦为彼三角形之 n 倍"，遂断 $\triangle COJ \cong \triangle K'KJ$，其意殆指 $\triangle COJ \backsim \triangle EMH$，$\triangle K'KJ \backsim \triangle FIH$，不知 $\angle JCO = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$ 与 $\angle HEM = 90° - \frac{1}{2}\angle BDE$，如非 $\angle BDE = \angle BAC$，二者绝不相等，因之此二三角形绝无相似之可能也。

此证法固不合，其作法亦易明其不符。命 $\angle BAC = 6\theta$，$\angle BDE = 6\alpha$，如作法正确，则应可证

$$\frac{\tan 3\theta}{\tan \theta}=\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}KJ}=\frac{\frac{1}{2}BE}{\frac{1}{2}IH}=\frac{\tan 3\alpha}{\tan \alpha}=\text{常数}$$

但 $$\tan 3\theta=\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}=\frac{\sin \theta(3-4\sin^2\theta)}{\cos \theta(4\cos^2\theta-3)}=\tan \theta\cdot\frac{4\cos^2\theta-1}{4\cos^2\theta-3}$$

所以 $$\frac{\tan 3\theta}{\tan \theta}=\frac{4\cos^2\theta-1}{4\cos^2\theta-3}=\frac{2(\cos 2\theta+1)-1}{2(\cos 2\theta+1)-3}=\frac{2\cos 2\theta+1}{2\cos 2\theta-1}$$

显非常数，今再验以特值如下：

$$\text{令 }\theta=15\quad\frac{\tan 45^\circ}{\tan 15^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ+1}{2\cos 30^\circ-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

$$\text{令 }\theta=22\frac{1^\circ}{2}\quad\frac{\tan 67\frac{1^\circ}{2}}{\tan 22\frac{1^\circ}{2}}=\frac{2\cos 45^\circ+1}{2\cos 45^\circ-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+\sqrt{2}$$

后者约为前者之 1.56 倍，若精确作图，亦可见其谬.

今更以纯几何方法揭明其误，在此采归谬论证，如图 8，令

$$BH=BI+IH=y'+x'=a'\qquad BJ=BK+KJ=y+x=a$$

如图 8，按平分角线长公式

$$b^2=\frac{4}{(b+c)^2}bcs(s-a)=\frac{4}{(b+c)^2}bc(a+b+c)(-a+b+c)$$

$$b(b+c)^2=4c(a+b+c)(-a+b+c)=4c[(b+c)^2-a^2]$$

所以 $$a^2=\frac{1}{4c}(b+c)^2(b-4c)$$

若 AK，AJ 亦为三等分角线，则

$$a'^2=\frac{1}{4c'}(b'+c')^2(b'-4c')$$

按作法 $x:y=x':y'$，又按平分角线性质

$$x:y=b:c,x':y'=b':c'$$

故 $$b:c=b':c'$$

是以作圆时可选 $BD=AB$，即 $c=c'$，则 $b=b'$，由是 $a^2=a'^2$，而知 $\triangle BDH\backsim\triangle BAJ$，因此 $\angle BDE=\angle BAC$，除所作任意角 BDE 适为已知角 $\angle BAC$ 之三分之一外，AK 与 AJ 不得为所求之三等分角线.

注　成都何籽钦君曾用三角学方法证明宋君之法无效，理与上同，见成都中等数学座谈会刊行中等数学杂志第九期(1949 年 4 月)，被有四川大学先修班同学赵不凡君未能了解何君所用归谬论证之性质，有所怀疑，并误由 $x:y=x':y'=b':c'$ 断定 AK 为 $\angle BAJ$ 之分角线，而认宋君作法合理，尽未能透彻了解几何定理之过也.

§9　刘明君

1949 年 1 月 17 日，成都西方日报致函译者，谓成都某高中有同学刘明君以其作法投寄该报，托其转请译者校阅. 此作虽无法免于谬误，然可见作者之根底，远胜于宋、杨、吴诸人. 其法取任意角 A，在 A 角一边上，截取任意长 AB，于 AB 中点 D，作垂线 DC，与 A 角另一边交于 C，过 B 求作一直线，交 CD 于 E，交 AC 于 F，而使 $EF = AF$，则 $\angle DAE$ 为 A 角之 $\frac{1}{3}$（图 9）. 尽因

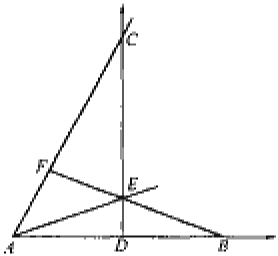


图 9

$$\angle EAD = \angle EBD, \angle FAE = \angle FEA$$

故
$$\angle BAC = \angle FAE + \angle DAE = \angle FEA + \angle DAE = (\angle EAB + \angle EBA) + \angle DAE = \angle EAD + \angle EBD + \angle DAE = 3\angle DAE$$

刘君进而以解析几何法求 DE 之长，彼取 AB 及 DC 为坐标轴，命 $DE = z$，而诸已知点坐标为

$$A(-c,0), B(c,0), C(0,a)$$

则由下列二方程式：

直线 AC　　$ax - cy + ac = 0$

直线 BE　　$zx + cy - cz = 0$

之公解，得交点 F 之坐标为 $\left[\frac{c(z-a)}{a+z}, \frac{2az}{a+z}\right]$，因 $AF = FE$，故

$$\sqrt{\left[\frac{c(z-a)}{a+z} + c\right]^2 + \left(\frac{2az}{a+z}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{c(z-a)}{a+z}\right]^2 + \left(\frac{2az}{a+z} - z\right)^2}$$

化简得一三次方程式

$$z^3 - 3az^2 - 3c^2z + c^2a = 0$$

刘君谓解之可得所求之值.

欲明上式不能以平方根求解,可就特例验之,取 $a = 2, c = 1$,有

$$z^3 - 6z^2 - 3z + 2 = 0$$

易以综合除法,断定其无有理根,因 ± 1, ± 2 均不适合,知为不可作,如用 Eisenstein 定理(见 Birkhoff-Mac-Lane: A Survey of Modern Algebra 101 - 102),可立判其在有理数域内为不可约,因之不能以尺规作图.

至于特别角有可作者,亦可就上之方程式判之,例如 $\angle A = 45°$ 可以三等分,在此易知 $a = 1, c = 1$,得

$$z^3 - 3z^2 - 3z + 1 = (z + 1)(z^2 - 4z + 1) = 0$$

其一无理根 $z = 2 - \sqrt{3} = \tan 15°$,即所求之解也.

刘君更谓三次方程式之解,用及倍立方法(其意殆指开立方),而倍立方为可作,法亦未合,其法作一直角三角形如图 9,使图中 $BD \perp AC$,取

$$AB = b, CD = ka$$

为已知量,且使 $AD = BC$,则 BC 为 kab 之立方根,因命 $AD = BC = x$,则

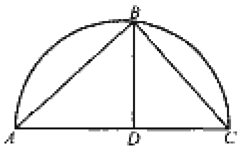


图 9

$$b^2 = x(x + ka) \qquad x^2 = ka(ka + x)$$

所以

$$b^2 : x^2 = x : ka$$

而

$$x^3 = kab$$

然此题为:求作一直角三角形,使其一腰长为一已知量,在斜边上射影等于他一腰,而他一腰在斜边上射影长为他二已知量之积,吾人何所据而断其可以尺规作图耶?

§10 尾　　声

Merrill 于所著 Excursion in Mathematics 一书中,曾剖析此类问题尝试者之心情,颇为透澈,兹录其译文(译者门人范际平教授译,见中等算学月刊第三、四两卷各期),以殿此补编.

"凡属人类,天生有一种崇高的特性,也就是好胜的心理,这种心理,使人探险攀高,赴汤蹈火而不辞.…… 惟其是需要魄力和技巧的艰苦工作,才有诱惑的力量.有些人以为数学家之所以不能化圆为方等等,乃是因工作太难的缘故.存了这个念头,当然想要自己去解决问题,以便打倒一切数学家,出人头地,总

之,一切麻烦都因学识不够,竟不知是不可能之事,真是可惜.现在无法证明高峰绝壁不可攀登,探险家仍然继续尝试,将来终有登临之一日,但是想求出圆周率的有理值一切问题,决无成功之可能,这方面探讨的工作,必然是劳而无功".

(摘自 Richard Courant, Herbert Robbins 著.《近代数学概观》第二册.余介石,杨锡宽,译.中华书局出版,1951 年 9 月第 1 版)

【注释】

著名数学家 Felix Klein 在一本小册子《Famous Problems of Elementary Geometry》(《初等几何的著名问题》沈一兵译,高等教育出版社)中介绍了尺规作图的简要历史.

在古代的几何学中,直尺和圆规总是一起使用的.1797 年,意大利的马歇罗尼(Mascheroni, Lorenzo,1750—1800)仅仅用圆规成功地实现了所有作图,他把他的方法写在著作《圆周几何》Geometria del Compasso 中,并且宣称用圆规作图在实用上比直尺要更精确.从 1797 年开始 Mascheroni 任帕维大学教授.Mascheroni 的原著,很难阅读,后人得益于 Hutt 的简明德文译本 Die Mascheroni' Schen Constructionen(1880).

随后不久,法国人,特别是卡诺(Carnot,Lazare Nicolas Marguerite,1753—1823)弟子,包括 Géométrie de Position 的作者,他们从另一方面努力,使作图尽可能地只用直尺来实现.

这里我们产生了一个问题:在什么情形下,一个代数方程的解可以只有直尺来图解呢? Carnot 的弟子们没给出一个充分明确的答案.

1818 年布里昂肖(Brianchon, Charles - Julien,1785—1864)Brianchon 发表了一篇题为 Les app lications de la théorie des transversales 的文章,其中他证明只有直尺我们能将一切有理形式的代数表达式作图表示,并指出在很多情况下如何去做,与 Mascheroni 一样 Brianchon 也强调实用性,Mascheroni 在《圆周几何》中明确指出:他是为力学写的,因此带有实用的观点,而 Brianchon 则强调他的方法特别适合于测量学的野外工作.

彭色列(Poncelet Jean - Victor,1788—1867)在他的著作 Traité des propriétés projectives(Vol 1 Nos 351—357)中首次提出并证明了:若给出一个圆及其圆心,则只用直尺可以解决任何初等作图问题,不过对于作图必须理解为求圆心和圆周上的某点,而不是画出连续的圆弧.

1833 年,深受彭色列影响的德国数学几何学家斯坦纳(Steiner Jacob,1796—1863),在他的一篇著名论文中发展了这个思想,其题目为 Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linieund eines festen kreises, als Lehrgegenstand für höhere Unterrichts-anstalten und zum Selbstunterricht.

——编者注

编后语 这篇作品是口述历史,作者早已作古,整理者为我国著名数学家余介石先生,余介石是早年东南大学学生,与严济慈,赵忠尧等同期,熊庆来先生在中国科学院数学研究所欢迎会上的讲话(1957 年)中就提到过他.

重发此文的用意在于向那些沉醉于证明大定理一夜成名者提供历史之鉴,乱世出刁民,盛世出痴人,解放后中国出现过两次大规模的业余人士证明数学大问题的高潮,一次是

1977年徐迟先生《哥德巴赫猜想》一文发表之后，在那个整个民族精神振奋，个性解放，崇尚自我奋斗的年代，这篇文章无疑是具有震撼力的，但同时由于徐老的浪漫也给许多引车卖浆之流造成了"苦战能过关"的错觉，于是出现了对哥德巴赫猜想群起而证之的疯狂局面，据1992年《人民日报》发表的《光明日报》记者温红彦的文章《是正确认识哥德巴赫猜想的时候了》中统计，十几年来全国各地自称证明出哥德巴赫猜想的人数以千计，光是中国科学院数学所就收到100麻袋这样的论文，但没一篇是正确的。

另一个时期就是改革开放以来国力渐强，太平盛世，特别是当英国费伯出版社和美国布卢姆斯伯出版社为炒作其新出版的希腊作家阿·佐克西亚季斯的小说《彼得罗斯大叔和哥德巴赫猜想》而悬赏一百万美元，奖给在两年内解开哥德巴赫猜想数学之谜的人的消息公布之后，又掀起了新的"证明"热潮，买的没有卖的精，直至2002年3月15日最后期限一过，一切终成笑谈。

希望这篇我们从故纸堆中挖出的旧闻，会对那些走火入魔的伪数学爱好者有所警醒，他们并不真爱数学而是爱数学带来的荣耀与利益，已故青年作家浪漫骑士王小波在他的《时代三部曲》中的《青铜时代》里，描写了一个证明费马大定理的故事，其中可圈可点的一句话是："证明了费马大定理，就证明了自己是世界上最聪明的人，这种事值得一干"。

I find both a special pleasure and constraint.
In describing the progress of mathematics.
Because it has been part of so much speculation.
A ladder for mystical as well as rational thought.
In the intellectual ascent of man.

—— 布罗诺斯基

前苏联一次数学竞赛活动纪实

华罗庚

二月二十七日　讲演

（一）讲员　教育科学研究院通讯研究员

马尔库塞维奇教授(A.I.Markushevich)

讲题　级数

听讲者　第七第八级学生

（二）讲员　斯大林奖金获得者刘斯透尔尼克教授

讲题　多角形及多面体

听讲者　第九第十级学生

三月二十四日　讲演

（一）讲员　斯大林奖金获得者(科学院研究员)

柯尔莫哥洛夫(A.N.Kolmogoroff)

讲题　对称性

听讲者　第七第八级学生

（二）讲员　斯大林奖金获得者(科学院通讯研究员)

亚历山大罗夫(P.S.Alexandroff)

讲题　复虚数

听讲者　第九第十级学生

三月三十一日　讲演

（一）讲员　雅诺夫斯基教授(Prof.S.A.Yanovsky)

讲题　算术与代数

听讲者　第七第八级学生

（二）讲员　杜勃诺夫教授(Prof.Y.S.Dubnoff)

讲题　长度　面积　体积

听讲者　第九第十级学生

四月七日　　第一次竞赛

四月十四日　　第一竞赛的结果与问题解答

四月二十一日　　第二次竞赛

四月二十八日　　竞赛会给奖式及莫斯科大学力学数学系教授和优秀学生招待会

在这里,我附带地说明一下苏联的教育制度,小学5年,中学5年,所以上面所说第七第八级学生,是指的中学二、三年级学生,其年龄大概是十三四岁的光景,第九第十级学生是指的中学四、五年级学生,其年龄大概为十五六岁,五年级即为中学的最后一年.

编后语　这篇资料是我国已故的著名数学家华罗庚教授1946年访问前苏联时3月21日所记日记的片段,在访问莫斯科期间,狄龙涅与华罗庚提到了莫斯科数学竞赛会的事,当时已举办39次,题目很难."1945年的一道题将好些教授都给难倒了"(狄龙涅语),今天重发这篇文章的目的在于提醒我们竞赛不是最终目的,普及数学似乎更为根本,但今天的中国数学名家已消失在竞赛舞台之外.(原文见华罗庚著.熊峰,文药编《华罗庚:下棋找高手》(中科院院士笔谈录)解放出版社:10-11.)

The only way to learn mathematics is to do mathematics.

——哈尔莫斯

介绍匈牙利施外则米克拉司数学竞赛

A. 瑞尼

M. 施外则是匈牙利的年轻而很有天赋的数学家. 他在第二次世界大战时和苏联站在一边对德国及匈牙利法西斯作战, 于 1945 年胜利前不久死去, 去世时年仅 22 岁(M. 施外则死后, 他的研究成果已由 P. 托兰(1910—1976 Turan. Paul) 整理发表于 Acta Sci. Math., Seged, 1946. 施外则另外的一个结果已在 L. 费耶尔(1880—1959 Fejer. Leopolt) 及 G. 舍贵合作的论文中发表). 为了纪念施外则我们于 1949 年开始组织了施外则数学竞赛. 竞赛每年在匈牙利的大学生中进行, 而是由波亚·雅诺司数学会所主办. 通常是在 11 月的某一天中在匈牙利的每一所大学及高等学校(有 10 处) 中同时在黑板上公布 10 个数学题目, 而且印好分发给学生. 大学及高等学校里的或本年毕业的每一个学生都可以参加这一竞赛. 题目是由一个委员会所拟定的, 这个委员会由教授及讲师们组成, 每年分别由布达佩斯、赛哥得、得波瑞森三城的大学轮流负责组成拟题委员会. 委员会由一人负总责, 其他的委员及数学家们都给以帮助. 最近几年 P. 托兰、B. 次月克法、纳吉、T. 谢耳、K. 陶多立、A. 凯斯坦及 A. 瑞尼都担任过拟题委员会的负责人.

题目通常是这样的标准, 正在读第五学期的大学生所具有的一般知识就足够解决这些题目, 但这些题目并不太容易, 必需经过努力和具有一些创造能力才能解答这些题目, 当然所出的题目既不能在熟知的教科书中, 也不能在流行的文献中找到. 题目的水平大致和 G. 波利亚及 G. 舍贵的"分析中的习题及定理"(Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis) 一书中的平均水平一样, 这些题目可以这样的形容, 每一个数学家要想解答它们得要费一番苦思, 当然不需要太多. 学生们可以被允许利用一切文献, 但通常流行的文献的帮助是不大的, 因为这些题目在文献中是找不到的. 学生们不能相互商量来解答, 也不允许老数学家帮助他们, 直到现在我们还未发现有违反上述规定的, 学生及教师们都遵守这一规定.

1956 年所出的十个题目如下(因为 1956 年的十月事件,1956 年的竞赛推迟于 1957 年 2 月举行):

(1) 试证若函数 $C(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx$ 的间隔 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 为下降函数,则函数 $S(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx$ 在此间隔内为非负.

(2) 令 $m(n)$ 为 n 的最大素因子,试证级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot m(n)}$ 收敛.

(3) 试证若一凸多面体的每一面都有对称中心,则其面的个数为偶数.

(4) 令 $P_1,P_2,\cdots,P_n^2$ 为单位圆上 n 个相异的点,试求使 $\sum\sum_{i\neq k}\frac{1}{(P_i,P_k)}$ 为最小时这 n 个点的位置,此处 (P_i,P_k) 表示点 P_i,P_k 间的距离.

(5) 令 b_k 为一串实数满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2=+\infty$,对每一 $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$ 试造一串实数 a_k 使得对每一个 $n(n=1,2,\cdots)$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k>\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

而且

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<+\infty$$

(6) 试解下列无穷方程组

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n+k}{k-j}x_j=b_k\qquad k=0,1,2,\cdots$$

(7) 设有一 n 边凸多边形,用不相交的对角线可以把此凸多边形三角剖分(triangulation).试求这样的三角剖分的个数.如果还要求上述的三角剖分中每一个三角形至少与此多边形有一共同的边,试求这类三角剖分有多少个.

(8) 令 a_k 为一串实数. $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n,\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$, $U_n=|a_1|+2|a_2|+\cdots+n|a_n|$.试证若下列极限存在 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S$,而且 $\frac{U_n}{n}$ 为有界,则 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_0^2+S_1^2+\cdots+S_n^2}{n+1}=S^2$.

(9) 有 N 张牌,牌上的号码为 1 到 N.从这 N 张牌中任抽一张,然后放回,洗牌之后,再作下一次的抽牌.继续作这种试验.若第 v 次抽出之牌发现为以前曾经抽过的牌,试求 v 的均值.

(10) 试求一复数 z 使得

$$\max(|1+z|,|1+z^2|)$$

为最小.

有的学生可以解答上面10个题目中的7个.大约有50名学生送回部分的解答,当然很多学生试了一试,但是只能解答1～2个题目,就没有交解答,因为他们知道不会取得优胜.有八个学生得了奖,第一名奖1 500弗林(匈牙利币名),第二名奖1 000弗林,其余的奖以数学书,此外每一个得奖者还赠一奖状.授奖大会时公布题目的解答.此外拟题委员会的负责人还把原题目及解答负责写就,发表于 Matematikai Lapok 上.

在上述的授奖大会上还要详细地讨论竞赛会的题目,有时候对一个题目给出二三种解答,而且还讲解这些题目和数学中其他重要问题的关联.

在评卷时不只要考虑到解题的多寡,而且还要考虑解答的明晰性、风格的成熟性和解答的灵巧性,一个难题给以简单的解比一个容易题给以复杂的解要好得多.解这种题目不需要机械的方法.经过拟题委员会的反复比较学生们的试卷才能定案.每一个学生每年都可以参加竞赛(普遍说来有6次机会),而且允许连续得奖(我们已经发现有几个学生已经连续两次得奖).一般说来第一次不会得奖,通常是三年级及高年级的学生得奖,但是由我们的经验可以知道对三、四、五年级学生而言,得奖的机会并不是相差悬殊的,而且有一两次二年级的学生反而得到较好的解答并获得第三名奖.

竞赛对于那些没有参加竞赛但是私自解答(或者解答一部分)的学生们也起了刺激的作用.每年,施外则米克拉司数学竞赛在匈牙利的数学生活中都是一件重要的事情,实际上每一个数学家对这一竞赛都感兴趣.讨论这些题目的大会上所出席的人数是数学会开会时到会人数最多的(100～120人参加).直到现在得奖的学生几乎都是布达佩斯、赛哥得及得波瑞森大学的学生,工艺大学及师范大学的学生只在有限几次竞赛中得奖.

(王寿仁译)

二〇〇五年全国高中数学联合竞赛加试第三题解答①

孙自良② 周盛龙③

解法 1 对于每个非完全平方数 i，有 $k^2 < i < (k+1)^2$，所以

$$\{i\} = \sqrt{i} - k = \frac{i - k^2}{\sqrt{i} + k}$$

所以
$$\left[\frac{1}{\sqrt{i}}\right] = \left[\frac{\sqrt{i} + k}{i - k^2}\right]$$

当 $i - k^2 = 1$ 时

$$\left[\frac{\sqrt{i} + k}{i - k^2}\right] = 2k$$

当 $1 < i - k^2 \leqslant 2k$ 时

$$\left[\frac{\sqrt{i} + k}{i - k^2}\right] = \left[\frac{2k}{i - k^2}\right]$$

所以
$$\left[\frac{1}{\{\sqrt{i}\}}\right] = \left[\frac{2k}{i - k^2}\right]$$

定义
$$F(k) = \sum_{i=k^2}^{k^2+2k} f(i) = \sum_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]$$

所以
$$\sum_{i=1}^{240} f(i) = \sum_{i=1}^{14} F(i) + \sum_{i=225}^{240} f(i)$$

计算

$$F(1) = \left[\frac{2}{1}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] = 2 + 1 = 3$$

$$F(2) = \left[\frac{4}{1}\right] + \left[\frac{4}{2}\right] + \left[\frac{4}{3}\right] + \left[\frac{4}{4}\right] = 8$$

---

① 此文两作者均为 2003 年全国初中数学联赛黑龙江赛区一等奖得主，2006 年全国高中数学联赛黑龙江赛区一等奖得主，周盛龙还是 CMO 铜牌得主，周盛龙同学被保送至清华大学，孙自良同学被保送至哈尔滨工业大学。

② 孙自良，原哈尔滨师范大学附属中学，高三一班学生。

③ 周盛龙，原哈尔滨第三中学，高三二十四班学生。

同理

$F(3) = 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14$

$F(4) = 8 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$

$F(5) = 10 + 5 + 3 + 2 + 2 + 1 \times 5 = 27$

$F(6) = 12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 \times 6 = 35$

$F(7) = 14 + 7 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 \times 7 = 41$

$F(8) = 16 + 8 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 \times 8 = 50$

$F(9) = 18 + 9 + 6 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 \times 9 = 58$

$F(10) = 20 + 10 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \times 10 = 66$

$F(11) = 22 + 11 + 7 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \times 11 = 74$

$F(12) = 24 + 12 + 8 + 6 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \times 12 = 84$

$F(13) = 26 + 13 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \times 13 = 91$

$F(14) = 28 + 14 + 8 + 7 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \times 14 = 101$

所以
$$\sum_{i=1}^{14} F(i) = 672$$

又
$$\sum_{i=225}^{240} f(i) = 0 + 30 + 15 + 10 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 96$$

所以
$$\sum_{i=1}^{240} f(i) = 672 + 96 = 768$$

解法 2 通过观察可知

$$f(2) = [\sqrt{2} + 1] = 2$$

$$f(3) = \left[\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right] = 1$$

$$f(5) = [\sqrt{5} + 2] = 4$$

$$f(6) = \left[\frac{\sqrt{6} + 2}{2}\right] = 2$$

$$f(7) = \left[\frac{\sqrt{7} + 2}{3}\right] = 1$$

$$\vdots$$

我们猜想

$$f(t^2 + j) = \left[\frac{[\sqrt{t^2 + 1}] + t}{j}\right] \qquad j = 2, 3, \cdots, 2t$$

证明如下

$$f(t^2+j)=\left[\frac{1}{\sqrt{t^2+j}-t}\right]=\left[\frac{\sqrt{t^2+j}+t}{j}\right]$$

又当 $t\in\mathbf{Z}$ 时

$$[\sqrt{t^2+j}]=[\sqrt{t^2+1}]$$

故 $$f(t^2+j)=\left[\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{j}\right]=\left[\frac{[\sqrt{t^2+1}+t]}{j}\right]$$

则自变量从 t^2+1 到 t^2+2t 历遍的和为

$$\sum_{i=1}^{2t}\left[\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{i}\right]$$

所求转化为

$$\sum_{j=1}^{16}\sum_{i=1}^{2j}\left[\frac{[\sqrt{j^2+i}+j]}{i}\right]-\sum_{k=241}^{255}f(k)$$

又 $$f(241)=\left[\frac{[\sqrt{241}+15]}{16}\right]=1$$

故 $$\sum_{k=241}^{255}f(k)=15$$

现在来求

$$\sum_{j=1}^{16}\sum_{i=1}^{2j}\left[\frac{[\sqrt{j^2+i}+j]}{i}\right]=\sum_{j=1}^{16}\sum_{i=1}^{2j}\left[\frac{2j}{i}\right]=$$

$$\sum_{j=1}^{16}\sum_{i=1}^{j}\left[\frac{2j}{i}\right]+\sum_{j=1}^{16}\sum_{i=j+1}^{2j}\left[\frac{2j}{2}\right]$$

$$1\leqslant\left[\frac{2j}{i}\right]<2(j+1\leqslant i\leqslant 2j)$$

故 $$\sum_{j=1}^{16}\sum_{i=j+1}^{2j}\left[\frac{2j}{i}\right]=\frac{16^2-16}{2}=120$$

现求 $\sum_{j=1}^{16}\sum_{i=1}^{j}\left[\frac{2j}{i}\right]=\left[\frac{2}{1}\right]+\underbrace{\left[\frac{4}{1}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]}+\underbrace{\left[\frac{6}{1}\right]+\left[\frac{6}{2}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]}+\cdots=$

$$2+6+11+16+22+29+34+42+49+56+63+72+78+87+96=663$$

所求和为 $$663+120-15=768$$

费马——孤独的法官①

刘培杰　王忠玉

1.出身贵族的费马

皮埃尔·费马(Pierre de Fermat),1601年8月17日生于法国南部图卢兹(Towlouse)附近的博蒙·德·罗马涅(Beaumont de Lomagen)镇,同年8月20日接受洗礼.费马的双亲可用大富大贵来形容,他的父亲多米尼克·费马(Domiaique Fermat)是一位富有的皮革商,在当地开了一家大皮革商店,拥有相当丰厚的产业,这使得费马从小生活在富裕舒适的环境中,并幸运地享有特权进入格兰塞尔夫(Grandselve)的方济各会修道院受教育.老费马由于家财万贯和经营有道,在当地颇受人们尊敬,所以在当地任第二领事官职,费马的母亲名叫克拉莱·德·罗格,出身穿袍贵族.父亲多米尼克的大富与母亲罗格的大贵,构筑了费马富贵的身价.

费马的婚姻又使费马自己也一跃而跻身于穿袍贵族的行列.费马娶了他的舅表妹伊丝·德·罗格.原本就为母亲的贵族血统而感到骄傲的费马,如今干脆在自己的姓名前面加上了贵族姓氏的标志"de".今天,法国古老贵族家庭的后裔依然很容易被辨认出来,因为名字中间有一个"德"字.一听到这个字,今天的法国人都会肃然起敬,脑海中浮现出"城堡、麋鹿、清晨中的狩猎、盛大的舞会和路易时代的扶手椅……".

从费马所受的教育与日后的成就看,费马具有一个贵族绅士所必备的一切.费马虽然上学很晚,直到14岁才进入博蒙·德·罗马涅公学.但在上学前,费马就受到了非常好的启蒙教育,这都要归功于费马的叔叔皮埃尔.据考克斯(C.M.Cox)研究(《三百位天才的早期心理特征》)获得杰出成就的天才,通常有超乎一般少年的天赋,并且在早期的环境中具有优越的条件.显然,少年天才的祖先在生理上和社会条件上为他们后代的非凡进步作出了一定的贡献.在这里

① 本节摘自哈尔滨工业大学出版社的新书《从毕达哥拉斯到怀尔斯》,刘培杰,王忠玉编著.王忠玉,哈尔滨工业大学博士,吉林大学博士后.

卢梭所极力倡导的"人人生来平等"的信条是完全不起作用的，因为根本不可能所有的人都站在一个起跑线上，而且许多人的起跑线远远超过了绝大多数人几代才跑到的终点线．贝尔曾评价费马说：他对主要的欧洲语言和欧洲大陆的文学，有着广博而精湛的知识．希腊和拉丁的哲学有几个重要的订正是得益于他．用拉丁文、法文、西班牙文写诗是他那个时代绅士们的素养之一，他在这方面也表现出了熟练的技巧和卓越的鉴赏力．

费马的子女有三女二男，除了大女儿克拉莱出嫁之外，四个子女继承了费马高贵的出身，使费马感到体面．两个女儿当了修女，次女当上了菲玛雷斯的副主教．尤其是长子克莱曼·萨摩尔，继承了费马的公职，在 1665 年也当上了律师．费马那个贵族的大家族得以继续显赫．

2．官运亨通的费马

迫于家庭的压力，费马走上了文职官员的生涯．1631 年 5 月 14 日在法国图卢兹就职，任晋见接待官，这个官职主要负责请愿者的接待工作．如果本地人有任何事情要呈请国王，他们必须首先使费马或他的一个助手相信他们的请求是重要的．另外费马的职责还包括建立图卢兹与巴黎之间的重要联系，一方面是与国王进行联络，另一方面还必须保证发自首都的国王命令能够在本地区有效地贯彻．

但据记载，费马根本没有应付官场的能力，也没有什么领导才能．那么他是如何走上这个岗位的呢？原来这个官是买来的．

费马中学毕业后，先后在奥尔良大学和图卢兹大学学习法律，费马生活的时代，法国男子最讲究的职业就是律师．

有趣的是，法国当时为那些家财万贯但缺少资历的"准律师"尽快成为律师创造了很好的条件．1523 年，佛朗期瓦一世组织成立了一个专门鬻卖官爵的机关，名叫"bureau des parries casuelles"，公开出售官职．由于社会对此有需求，所以这种"买卖"一经产生，就异常火爆，并一直沿续到今天．因为鬻卖官职，买者从中可以获得官位从而提高社会地位，卖者可以获得钱财使政府财政得以好转．因此，到了 17 世纪，除了宫廷官和军官以外的任何官职都可以有价出售．直到今日，法院的书记官、公证人、传达人等职务，仍没有完全摆脱买卖性质．法国的这种买官制度，使许多中产阶级从中受益，费马也不例外，费马还没大学毕业，便由家里在博蒙·德·罗马买好了"律师"和"参议员"的职位，等到费马大学毕业返回家乡以后，他便很容易地当上了图卢兹议院顾问的官职．从时间上，我们便可体会到金钱的作用．费马是在 1631 年 5 月 1 日获得奥尔良(Orleans)大学民法学士学位的，13 天后即 5 月 14 日就已经升任图卢兹议会晋见接待员了．

尽管费马在任期间没有什么政绩，但他却一直官运亨通．费马自从步入社

会直到去世都没有失去官职，而且逐年得到提升，在图卢兹议会任职 3 年后，费马升任为调查参议员．这个官职有权对行政当局进行调查和提出质疑．

1642 年，费马又遇到一位贵人，他叫勃里斯亚斯，当时是最高法院顾问，他非常欣赏费马，推荐他进入了最高刑事法庭和法国大理院主要法庭，这又为费马进一步升迁铺平了道路．1646 年，费马被升为议会首席发言人，以后还当过天主教联盟的主席等职．

有人把费马的升迁说成是并非费马有雄心大志，而是由于费马身体健康．因为当时鼠疫正在欧洲蔓延，幸存者被提升去填补那些死亡者的空缺．其实，费马在 1652 年也染上了致命的鼠疫，但却奇迹般地康复了．当时他病得很重，以至他的朋友伯纳德·梅登（Bernard Medon）已经对外宣布了他的死亡．所以当费马脱离死亡威胁后，梅登马上开始辟谣，他在给荷兰人尼古拉斯·海因修斯（Nicholas Heinsius）的报告中说：

我前些时候曾通知过您费马逝世．他仍然活着，我们不再担心他的健康．尽管不久前我们已将他计入死亡者之中．瘟疫已不在我们中间肆虐．

但这次染上瘟疫给费马一贯健康的身体带来了损害．1665 年元旦一过，费马开始感到身体不适，于 1 月 10 日辞去官职，3 天以后溘然长逝．由于官职的缘故，费马先被安葬在卡斯特雷（Castres）公墓．后来，改葬在图卢兹的家族墓地中．

3．淡泊致远的费马

数学史家贝尔曾这样评价费马的一生："这个度过平静一生的、诚实、和气、谨慎、正直的人，有着数学史上最美好的故事之一"．

很难想象一个律师、一位法官能不沉溺于灯红酒绿、纸醉金迷，而能自甘寂寞、青灯黄卷，从根本上说这种生活方式的选择源于他淡泊的天性．在 1646 年，费马升任议会首席发言人，后又升为天主教联盟的主席等职，但他从没有利用职权向人们勒索，也从不受贿，为人敦厚、公开廉明．

另一个原因是政治方面的，俗话说高处不胜寒，政治风波时刻伴随着他．在他被派到图卢兹议会时，恰是红衣天主教里奇利恩（Richelien）刚刚晋升为法国首相 3 年之后，那是一个充满阴谋和诡计的时代，每个涉及国家管理的人，哪怕是在地方政府中，都不得不小心翼翼以防被卷入红衣主教的阴谋诡计中，费马用研究数学来逃避议会中混乱的争吵，这种明哲保身的作法，无意中造就了这位"业余数学家之王"．

按费马当时的官职，权力是很大的．从英国数学家凯内尔姆·迪格比爵士（Sir Kenelm Digby）给另一位数学家约翰·沃利斯（John Wallis）的信中我们了解到一些当时的情况：

他（费马）是图卢兹议会最高法庭的大法官，从那天以后，他就忙于非常繁

重的死刑案件.其中最后一次判决引起很大的骚动,它涉及一名滥用职权的教士被判以火刑烧死.这个案子刚判决,随后就执行了.

由此可见,费马的工作是很辛苦的,所以很多人在考虑到费马的公职的艰难费力的性质和他完成的大量第一流数学工作时,对于他怎么能找出时间来做这一切感到迷惑不解.一位法国评论家提出了一个可能的答案:费马担任议员的工作对他的智力活动有益无害.议院评议员与其他的——例如在军队中的公职人员不同,对他们的要求是避开他们的同乡,避开不必要的社交活动,以免他们在履行职责时因受贿或其他原因而腐化堕落.由于孤立于图卢兹高层社交界之外,费马才得以专心于他的业余爱好.

幸好,费马所献身的所谓"业余事业"是不朽的,费马熔铸在数论之中,这是织入人类文明之锦的一条粗韧的纤维,它永远不会折断.

4.复兴古典的费马

日本数学会出版的《岩波数学辞典》中对费马是这样评价的:"他与笛卡尔不同,与其说他批判希腊数学,倒不如说他以复兴为主要的,因此他的学风,古典色彩浓厚."

早在1629年以前,费马便开始着手重写公元前3世纪古希腊几何学家阿波罗尼斯(Apollonius,约公元前260—170)所著的当时已经失传的《平面轨迹》(On Plane Loni),他利用代数方法对阿波罗尼斯关于轨迹的一些失传的证明作了补充,对古希腊几何学,尤其是对波罗尼斯圆锥曲线论进行了总结和整理,对曲线作了一般研究,并于1630年用拉丁文写撰写了仅有8页的论文《平面与立体轨迹引论》(Introdndtion anx Lieux Planes es Selides,这里的"立体轨迹"指不能用尺规作出的曲线,和现代的用法不同),这篇论文直到1679年他死后才发表出来.

早在古希腊时期,阿基米德(Archimedes)为求出一条曲线所包任意图形的面积,曾借助于穷竭法.由于穷竭法繁琐笨拙,后来渐渐被人遗忘.到了16世纪,由于开普勒在探索行星运动规律时,遇到了如何研究椭圆面积和椭圆弧长的问题.于是,费马又从阿基米德方法出发重新建立了求切线、求极大值和极小值以及定积分的方法.

费马与笛卡尔被公认为解析几何的两位创始人,但他们研究解析几何的方法却是大相径庭的,表达形式也迥然不同:费马主要是继承了古希腊人的思想,尽管他的工作比较全面系统,正确地叙述了解析几何的基本原理,但他的研究主要是完善了阿波罗尼斯的工作,因此古典色彩很浓,而笛卡尔则是从批判古希腊的传统出发,断然同这种传统决裂,走的是革新古代方法的道路,所以从历史发展来看,后者更具有突破性.

费马研究曲线的切线的出发点也与古希腊有关，古希腊人对光学很有研究，费马继承了这个传统．他特别喜欢设计透镜，而这促使费马探求曲线的切线，他在1629年就找到了求切线的一种方法，但迟后8年才发表在1639年的手稿《求最大值和最小值的方法》中．

另一表现费马古典学风之处在于费马的光学研究．费马在光学中突出的贡献是提出最小作用原理，这个原理的提出源远流长．早在古希腊时期，欧几里得就提出了今天人们所熟知的光的直线传播和反射定律．后来海伦统一了这两条定律，揭示了这两条定律的理论实质——光线行进总是取最短的路径．经过若干年后，这个定律逐渐被扩展成自然法则，并进而成为一种哲学观念．人们最终得出了这样更一般的结论："大自然总是以最短捷的可能途径行动"．这种观念影响着费马．但费马的高明之处则在于变这种哲学的观念为科学理论．

对于自然现象，费马提出了"最小作用原理"．这个原理认为，大自然各种现象的发生，都只消耗最低限度的能量．费马最早利用他的最小作用原理说明蜂房构造的形式，在节省蜂蜡的消耗方面比其他任何形式更为合理．费马还把他的原理应用于光学，做得既漂亮又令人惊奇，根据这个原理，如果一束光线从一个点 A 射向另一个点 B，途中经过各种各样的反射和折射，那么经过的路程——所有由于折射的扭转和转向，由于反射的难于捉摸的向前和退后——可以由从 A 到 B 所需的时间为极值这个单一的要求计算出来．由这个原理，费马推出了折射和反射的为今天人们所熟知的规律；入射角（在反射中）等于反射角；从一个介质到另一个介质的入射角（在折射中）的正弦是反射角的正弦的常数倍，折射定律其实都是1637年费马在笛卡尔的一部叫《折光》（la Dioptriqre）的著作中看到的，开始他对这个定律及其证明方法都持怀疑和反对态度，并因此引起了两人之间长达十年之久的争论，但后来在1661年他从他的最小作用原理中导出了光的折射定律时，他不但解除了对笛卡尔的折射定律的怀疑，而且更加确信自己的原理的正确性，可以说费马发现的这个最小作用原理及其与光的折射现象的关系，是走向光学统一理论的最早一步．

最能体现费马"言必称希腊"这一"复古"倾向的是一本历尽磨难保存下来的古希腊著作《算术》．17世纪初，欧洲流传着公元3世纪古希腊数学家丢番图（Diophantus）所写的《算术》一书，丢番图是古希腊数学传统的最后一位卫士．他在亚历山大的生涯是在收集易于理解的问题以及创造新的问题中度过的，他将它们全部汇集成名为《算术》的重要论著．当时《算术》共有13卷之多，但只有6卷逃过了欧洲中世纪黑暗时代的骚乱幸存下来，继续激励着文艺复兴时期的数学家们．1621年费马在巴黎买到了经巴歇（M. Bachet）校订的丢番图《算术》一书法文译本，他在这部书的第二卷第八命题——"将一个平方数分为两个平方数"

的旁边写道:"相反,要将一个立方数分为两个立方米,一个四次幂分为两个四次幂,一般地将一个高于二次的幂分为两个同次的幂,都是不可能的.对此,我确信已发现了一种美妙的证法,可惜这里空白的地方太小写不下",这便是数学史上著名的费马大定理.

5.议而不作的数学家

我国著名思想家孔子是"述而不作",而费马却是"议而不作".并且费马还有一个与毛泽东相同的读书习惯,"不动笔墨不读书".他读书时爱在书上勾勾画画,圈点批注,抒发见解与议论.他研究数学的笔记常常是散乱地堆在一旁不加整理,最后往往连书写的确切年月也难以稽考.他曾多次阻止别人把他的结果付印.

至于费马为什么会养成这种"议而不作"的习惯,有多种原因.据法国著名数学家韦尔(André Weil)分析是由于17世纪的数论学家缺少竞争所致,他说:

那个时代的数学家,特别是数论学家是很舒服的,因为他们面临的竞争是如此之少.但对微积分而言,即令在费马的时代,情形就有所不同,因为今天使我们许多人受到困扰的东西(例如优先权问题)也困扰过当时的数学家.然而,有趣的是费马在整个17世纪期间,在数论方面可以说一直是十分孤独的.值得注意的是在这样一段较长的时间中,事物发展是如此缓慢,而且这样从容不迫,人们有充足的时间去考虑大问题而不必担心他的同伴可能捷足先登.在那时候,人们可以在极其平和宁静的气氛中研究数论,而且说实在的,也太宁静了.欧拉和费马都抱怨过他们在这个领域中太孤单了.特别是费马,有段时间他试图吸引帕斯卡(Blaise Pascal)对数论产生兴趣并一起合作.但帕斯卡不是搞数论的材料,当时身体又太差,后来他对宗教的兴趣超过了数学,所以费马没有把他的东西好好写出来,从而只好留给了欧拉这样的人来破译.所以人们说欧拉刚开始数论研究时,除了费马的那些神秘的命题外,什么东西也没有.

对费马"议而不作"的原因的另一种分析是费马有一种恶作剧的癖好,本来从16世纪沿袭下来的传统就是:巴黎的数学家守口如瓶,当时精通各种计算的专家柯思特(Cossists)就是如此.这个时代的所有专业解题者都创造他们自己的聪明方法进行计算,并尽可能地为自己的方法保密,以保持自己作为有能力解决某个特殊问题的独一无二的声誉.用今天的话说就是严守商业秘密,加大其他竞争对手进入该领域的进入成本,以保持自己在此领域的垄断地位,这种习惯一直保持到19世纪.

当时有一个人在顽强地同这种恶习做斗争,他就是梅森神父.他所起到的作用类似于今天数学刊物的作用,他热情地鼓励数学家毫无保留地交流他们的思想,以便互相促进各自的工作.梅森定期安排会议,这个组织后来发展为法兰

西学院.当时有人为了保护自己发现的结果,不让他人知道拒绝参加会议,这时,梅森则会采取一种特殊的方式,那就是通过他们与自己的通信中发现这些秘密,然后在小组中公布.这种作法,应该说是不符合职业道德的,但是梅森总以交流信息对数学家和人类有好处为理由为自己来辩解,在梅森去世的时候,人们在他的房间发现了78位不同的通信者写来的信件.

当时,梅森是惟一与费马有定期接触的数学家.梅森当年喜欢游历,到法国及世界各地,出发前总要与费马会见,后来游历停止后,便用书信保持着联系,有人评价说梅森对费马的影响仅次于那本伴随费马终生的古希腊数学著作《算术》(Arithmetica).费马这种恶作剧的癖好在与梅森的通信中暴露无遗.他只是在信中告诉别人"我证明了这,我证明了那",却从不提供相应的证明,这对其他人来讲,既是一种挑逗,也是一种挑战,因为发现证明似乎是与之通信的人该做的事情,他的这种作法激起了其他人的恼怒.笛卡尔称费马为"吹牛者";英国数学家约翰·沃利斯则把他叫做"那个该诅咒的法国佬".而这些因隐瞒证明给同行所带来的烦恼给费马带来了莫大的满足.

这种议而不作与费马的性格也有关.费马生性内向,谦抑好静,不善推销自己,也不善展示自我,所以尽管梅森神父一再鼓励,费马仍固执地拒绝公布他的证明.因为公开发表和被人们承认对他来说没有任何意义,他因自己能够创造新的未被他人触及的定理所带来的那种愉悦而感到满足.

另外一个更为实在的动机是,拒绝发表可以使他无需花费时间去全面地完美他的方法,从而争取时间去转向征服下一个问题.此外,从费马的性格分析,他应该采取这种方式,因为他频频抛出新结果不可避免会招来嫉妒,而嫉妒的合法发泄渠道就是挑剔,证明是否严密完美是永远值得挑剔的.特别是那些刚刚知道一点皮毛的人,所以为了避免被来自吹毛求疵者的一些细微的质疑所分心,费马宁愿放弃成名的机会,当一个缄默的天才.以致当帕斯卡催促费马发表他的研究成果时,这个遁世者回答说:"不管我的哪个工作被确认值得发表,我不想其中出现我的名字".

费马的议而不作带来的副作用是他当时的成就无缘扬名于世,并且使他暮年脱离了研究的主流.

编后语　一个人在数学的某个领域表现得非常出色,并不能保证他在数学的其他领域也能够有超凡的表现.法国的天才数学家哈达玛(Jacques Hadamard)承认,他很难掌握李群,似乎他将其全部的精力都用在了自己的专业领域上,对其他的数学问题无能为力(哈达玛(Jacques Hadamard)著《数学领域中的发明哲学》.普林斯顿:普林斯顿大学出版社,1949:115).本文介绍的法国数学家Fermat就是这样一位,虽然他参与了微积分和概率论的创立,但似乎他的全部天分在于数论,这也是使他名垂青史的原因之一,他是一个传奇人物.

平面组合几何问题探索

田廷彦①

组合几何研究的是几何图形的组合性质及其他复杂关系,诸如几何计数、凸性、对称、染色和覆盖、嵌入、分解与拼补,等等.尤其是平面组合几何,题目直观易懂而技巧甚高,内容也精彩纷呈,令人有进入胜境之感.

组合几何也是一门十分年轻的学科,相对于别的数学分支,世界上的专著还不多,国内也仅有上海教育出版社出版的单墫教授的《组合几何》一书,这本好书把平面组合几何的基本内容及技巧表现得淋漓尽致,而我们这篇文章,则尽力收集该书中没有的问题和定理,也算是一个补篇吧!需要事先声明的两点是,虽然这些都是笔者独立的结果,但不排斥别的文献中已经出现过类似结果;另外,笔者罗列的问题,一般是困难的,但也不排除那些只要灵机一动就可能做出的题目.

我们衷心希望中国的几何研究能像不等式研究那样热热闹闹、欣欣向荣.

§1 Sylvester 问题及推广

Sylvester 问题是组合几何中较早的一条定理.也就是说,如果在平面上给出 $n(\geqslant 3)$ 个点,并且过每两点的直线通过另外某个点,那么这 n 个点在一条直线上.

利用反演这个工具,我们建立下面的:

定理1 如果在平面上给出 $n(\geqslant 4)$ 个点,并且任3点不共线,又过每3点的圆通过另外第4点,那么这 n 个点在一个圆上.

由此,很容易想到:若过每5点的椭圆通过第6点,那么 n 个点在一椭圆上

① 田廷彦,任职于上海科学技术出版社,《科学》编辑部.

吗?显然,用初等工具看来是无能为力了;可我们还要研究一般代数曲线乃至更一般的曲线.我们提出下面的:

问题1 设某种曲线用 k 个点便可确定.证明或否定:对任意某种曲线及相应的 k,若平面上有 $n(>k)$ 个点,且过任意 k 点的这种曲线又过第 $k+1$ 个点,则这 n 点在某一条这样的曲线上.

相信这个问题的彻底解决要动用高等数学中的"重型武器",我们却希望对某些特殊的曲线(比如椭圆等)有初等的答案.

§2 一些几何计数的问题

注:今后若谈到点(直线)处于一般位置,是指任意三点(三线)不共线(点)(且对直线,还要两两不平行).

有许多几何计数问题,凡和凸 n 边形有关的下面再讲.这里给出几个问题.

问题2 平面上 n 个点处于一般位置,任三点组成的三角形中,等腰三角形、直角三角形、正三角形至多有多少个?此问题还可提及一些特殊的四边形计数之上界(如平行四边形、菱形、矩形、正方形、圆内接四边形,等等).

这是一个很难的问题,可能无法求出其精确表达式,但求出其阶(针对正三角形时较难)还是可以的.

问题3 n 条直线处于一般位置,它们把平面割成若干部分,求分割在同构意义下的种类 $f(n)$.

这是一个重要且自然的基本问题.另外,我们还要指出有如下定理.首先我们声明,对于 k 条边围成的无界区域也看成是"广义"的 k 边形.如图1所示即为一四边形.



图1

定理2 n 条直线处于一般位置,它们把平面分成若干部分,这些部分的最大边数为 k,则 $\min k=4$,当 $n\geqslant 4$ 时.

§3 中　　点

这里的中点,即指线段中点,有一个熟知的结果,对于平面上任给的 n 个点,其两两连线的中点构成的集至少有 $2n-3$ 个元素.我们于是问:

问题4 这 n 个点有约束(比如处于一般位置、构成凸 n 边形等)时,中点集的元素至少为多少呢?

另外，关于区域，我们还有如下问题：

问题 5 设一凹域面积为 S_1，其凸包面积为 S_2，又若凹域中任两点的中点组成之集的面积为 S'，今问 S_1、S_2 和 S' 有何基本不等关系？

§4 平面上的圆

这里有许多著名问题，我们略而不谈．只是说说几个不太为人注意的内容．首先我们建立：

定理 3 设点集的"宽度"就是点集凸包的宽度（此定义在下文给出），则若一平面点集 S 有 n 个点，以这 n 个点为圆心作半径为 R 的圆，存在一条直线和这些等圆均有公共点的充要条件是：$2R \geqslant S$ 的宽度．

由此容易建立：

定理 4 对任意 $n \geqslant 3$，平面上存在 n 个等圆，使任意其中 $n-1$ 个圆都被某一直线穿过，却没有一条直线同时穿过这 n 个圆．

定理 5 对于 $n \geqslant 4$，存在 n 个彼此相离的圆，使得过任 3 个圆有一直线，却没有一条直线穿过此 n 个圆．

对于彼此两两相离的圆的问题，还有很多没有被揭示出来．

另外一个问题也颇有意思：

问题 6 证明或否定：对任意正整数 $n, k, n > k \geqslant 3$，若平面上有 n 个单位圆，任 k 个中至少有 2 个有公共点，则此 n 个圆覆盖平面的面积 $S < 4(k-2)\pi$．

目前已知（借助一些其他结果）当 $k = 3$ 时是正确的．

§5 覆　　盖

这是组合几何中一大门类，我们尽量避开老生常谈，提一些新的问题和定理．

首先，我们有：

定理 6 有限个总面积为 3 的正方形可以用来平行覆盖边长为 1 的正方形．

由定理 6，我们得到如下定理及问题：

定理 7 有限个总面积为 27 的两两相似的凸区域可以覆盖与它们相似且面积为 1 的凸域．

问题 7 27 不是一个"好"的系数,问最小可降低到几?

另外一个重要问题是:

问题 8 设 A、B 两域,面积分别为 $S(A)$、$S(B)$,若有限个正方形,只要其总面积分别为 $k_1S(A)$、$k_2S(B)$,即可分别覆盖 A、B,今问,若有限个总面积为 $k_1S(A)+k_2S(B)$ 的正方形,能覆盖 $A\cup B$ 吗?

我们等待的是一个初等而简洁的证明.

覆盖中有一个重要问题——Vitali 覆盖问题,在此有必要作点引申.Vitali 问题是这样的:有限多个圆(或别的相似凸域)所覆盖的总面积为 S,则存在常数 $k>0$,k 和凸域形状有关,和个数也有关,使得可以从中找出若干个互不重叠的圆(或别的相似凸域),使其面积之和 $\geqslant kS$.

我们的定理和问题是:

定理 8 设两个单位圆覆盖了一凸域(面积为 S),则

$$\max S=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\sqrt{2}$$

定理 9 设 3 个单位圆覆盖了一单连通区域(面积为 S),则

$$\max S=\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\pi$$

对于 n 个单位圆,记 k 的上确界为 $g(n)$,又若对于平面上 n 个单位圆,任两者有公共点,记其覆盖平面的最大面积为 $f(n)$,于是我们的问题是:

问题 9 对哪些 n,$g(n)=\dfrac{\pi}{f(n)}$?已知对 $n=3,4$ 成立.

§6 接触问题

两个区域只是在边界上有公共点,则称它们相接触.显然一个圆最多和 6 个两两不交的等圆相接触;但对等球得出系数 12 可就不那么容易了,从 Kepler、Newton 时代一直到现在,都有数学家在研究与此有关的课题.

我们的结果是建立了如下漂亮的定理:

定理 10 平面上任一凸域可以和 6 个两两不交且与之全等的凸域接触.

这是一个很漂亮的结果,但要用到凸域支撑线的概念和对称性的方法.

很自然地,我们想到:

问题 10 对于一空间凸体,系数 12 还可以保持成立吗?这个问题想必不是太难.

§7　点集的染色

这也是一大门类，甚至涉及实变函数；在组合几何中，欧氏 Ramsey 理论中多是这种问题，很难却也引人入胜.

我们先给出如下定义，如一子集 A 经过平移、旋转后和 B 集完全重合(对应到每点上)，则称 A 和 B 平面合同，如果还带反射，则称为空间合同(其时也可分别称为顺向合同与逆向合同).

为避免通常的欧氏 Ramsey 问题，我们提出：

定理 11　不可能将一闭圆盘(或一线段)划分成两个子集，使其中一个和另一个平面合同或空间合同. 但若将圆心(或线段中点)挖去，则很容易构造两个子集，使其中一个仅需旋转即可与另者完全重合.

另外，很自然地有如下的：

问题 11　对任意闭域，定理 11 的否定结果都成立吗?有没有一般的判定方法?(即甚至不是闭域的情况.)

还有两个不大引人注意的染色问题，也极有趣味.

问题 12　证明或否定：平面存在一种二染色，使得任一曲线上的点不全同色.

问题 13　如果问题 12 的结果是肯定的，那么比曲线更一般的性质能否导致肯定结果呢?

相信这个问题比较困难.

§8　反射和对称

这一领域内容极为精彩，又易为许多书刊所忽略，因此在本文中要详细论述.

定理 12　设一有界图形有多条对称轴，则它们交于一点. 并且若有两条对称轴的夹角为 $\frac{360^\circ}{k}$，$k \in \mathbf{N}$，$k \geq 4$，则该图形至少有 $\frac{k}{4}(3-(-1)^k)$ 条对称轴. 当 k 为分数时，可建立类似结论；而当 k 为无理数时，则有无数条对称轴，此时图形只能是一系列同心圆.(当然，只需"无数条"这一条件即可.)

定理 13　对于 5 种正多面体，对称轴分别为 3，9，9，15，15(依面数增多而言)，或有一个统一公式

$$\sum\left(1-2\left\{\frac{E}{x}\right\}\right)\frac{x}{2},\quad x=E,F,V$$

这里 E、F、V 分别为多面体的边数、面数和顶点数."$\{\cdot\}$" 表示取一数的小数部分.

我们提出如下问题:

问题 14 对于 13 种"阿基米德"体,定理 13 中的对称轴公式还成立吗?

对于简单多面体,我们附带给出如下定理:

定理 14 对任意 3 个正整数 V、F、E,存在顶点数、面数、棱数分别为 V、F、E 的简单多面体的充要条件是

$$V+F-E=2$$

且
$$\frac{3}{2}V\leqslant E\leqslant 3V-6$$

这里用的构造法十分巧妙,还要对 $E(\bmod 3)$ 进行分类.

定理 15 对于一面积为 S 的三角形、平行四边形及一般的闭凸域,分别存在一条直线,使它们沿直线折叠后重叠部分的面积 $\geqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2}S$,$>\frac{3}{8}S$,$>\frac{1}{4}S$.

问题 15 定理 15 中的"$\frac{3}{8}$"、"$\frac{1}{4}$"还能改进吗?最好是几?

我们知道,光和台球都是按反射规则行进的,由此也引申出几个精彩的结果.

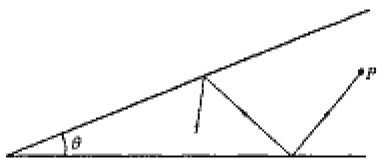


图 2

定理 16 如图 2,角 θ 内有一点光源 P,由它发出的光在角 θ 两边来回反射,则至多反射$\lceil\frac{\pi}{\theta}\rceil$次,且是可以达到的.

"$\lceil x\rceil$" 表示不小于 x 的最小整数.此题证明不难,但巧妙地运用了反转(也是对称),把光路转化成一条射线来讨论.

问题 16 对于某个闭凸域及某个正整数 $k(\geqslant 3)$,该域存在一内接凸 k 边形,正好为一束光走过的折线,今问:存在的判别准则是什么?

至于台球,在数学上为方便起见,可把它视做几何点,此时与点光源性质没有多少差异,我们假定台球速度极快,顷刻之间跑完了全部路程,它跑过的路径称为"台球径迹",相当于"光路",如果曾经回到起始点,我们称两起始点之间的路程是"台球闭径迹".

下面我们给出"稠密"的概念:一个闭域内的台球径迹称为是稠密的:是指台球在闭域边内反射,走出一系列折线段,若对于任何闭域内一点,任意 $\varepsilon > 0$,以此点为圆心,ε 为半径作一圆 C,总有一条折线段穿过此圆,则称此台球径迹是稠密的.

如图 3,我们有如下十分精彩的定理:

定理 17 在一个长方形台球桌(没有腰洞、底洞)上,自 P 点出发沿某一方向打出台球,假定:台球无限快地永远运动下去,在碰到球桌边上时严格遵循反射定律,在到达角上时,按原路返回,设自 P 点反向沿长原方向首先和某边相交,且夹角为 α,长方形球桌的对角线和此边交角为 θ,则此台球径迹在球桌内稠密的充要条件是:$\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$ 为一无理数.

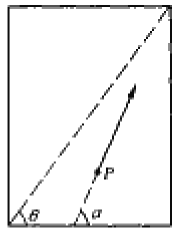


图 3

定理 18 圆形球桌内无稠密的台球径迹.

定理 17 对于经过平移和反射能铺满全平面的闭域(定理中是矩形,也可以是正六边形等)总是适用的,但需要丢番图逼近中的 Kronecker 定理,它是可以用抽屉原则来证明的.定理 18 告诉我们,存在某一种闭域(比如圆),没有任何台球的稠密径迹.自然地,我们提出如下问题:

问题 17 对于任一闭凸域,有无稠密的台球径迹,其判定准则是什么?若有,则怎样的径迹是稠密的?

还有一个重要的结果,不可不述.

设正 n 边形的外接圆为台球桌之边界,正 n 边形和其所有对角线构成的完全图中,有 $f(n)$ 个子图是台球闭径迹,求 $f(n)$.如图 4,表明 $f(6) = 6$.

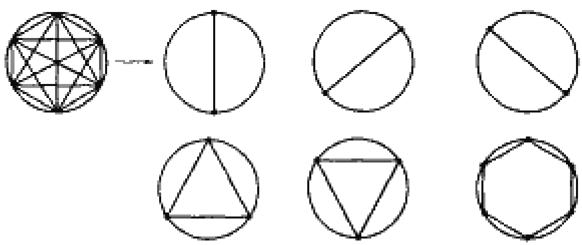


图 4

定理 19 设 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,则

$$f(n) = \left[\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{s}\left(1 + \alpha_i\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) - \frac{3 - (-1)^n}{8}\right] n$$

并由此得到：

(1) 仅当 $n = p$（素数）或 p^2 时，$f(n) < n$；

(2) 仅当 $n = 6,8,15,27$ 时，$f(n) = n$；

(3) 在其余情况，$f(n) > n$.

这个定理证明不十分难，但要用到 Euler φ 函数的一些性质.

§9　距离的构造与稳定性

这是一类比较新颖而有趣的问题.

我们知道，平面上 n 个点，两两之间有一个距离，共有 C_n^2 个，这些距离组成的集合 S，显然当距离两两不等时，S 的元素最多（正好 C_n^2 个）；又已证明 S 至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个元素，例如 n 个点组成一正 n 边形时，距离便正好有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 种.

当 S 的元素较少时，n 个点组成的形状是有限的. 例如，4 个点只有两种距离时，便只有 6 种构形（图 5）. 但 4 个点若有 3 种距离，则构形种数易知是无限的.

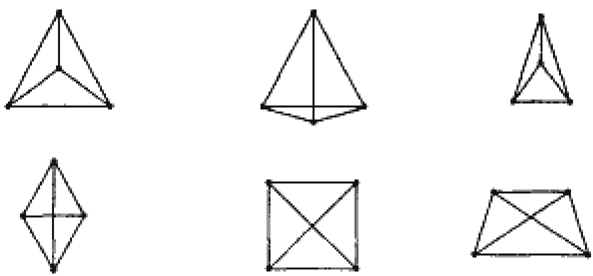


图 5

我们的问题是：

问题 18　对任意 $n \geqslant 3$，求 $f(n)$，使得距离种数 $\leqslant f(n)$ 时构形数有限，否则构形数无限.

这个问题一定较难，甚至较弱的问题 18′ 也相当于棘手.

问题 18′　当距离种数为 d 时构形数无限，一定能保证距离种数为 $d+1$ 时构形数无限吗？也有一定难度.

我们希望有初等办法求 $f(5)$ 和 $f(6)$.

下面,我们研究点集的稳定性.我们在这里考虑的都是处于一般位置的点集.

称 n 个点为平面稳定的:若 n 个点有 d 个距离被确定,如果每个点可自由平移或沿某个方向旋转,且原来 d 个距离保持不变,则剩下 C_n^2-d 个距离也固定不变,则称 n 个点为平面稳定的.

称 n 个点为空间稳定的,和平面稳定类似,只是除了平移和旋转,再加上沿某直线对称这一条件.

如图 6,设连过的线之长度均为确定,则图 6(a) 是平面稳定的,却不是空间稳定的,如作 C 关于 AB 的对称点 C',$DC\neq DC'$,如图 6(b) 所示.

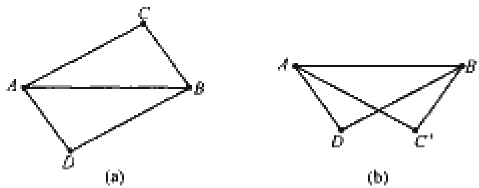


图 6

我们有如下结果:

定理 20 $n(\geqslant 4)$ 个点,若 $\frac{1}{2}n(n-3)+3$ 个距离被确定,则一定是平面稳定的;若只确定了 $2n-4$ 个距离,则一定是平面不稳定的.

定理 21 $n(\geqslant 4)$ 个点,若 $\frac{1}{2}n(n-3)+4$ 个距离被确定,则一定是空间稳定的;若只确定了 $3n-7$ 个距离,则一定是空间不稳定的.

§10 凸 n 边形的计数问题

这个领域问题众多,也有十分困难的.

问题 19 凸 n 边形对角线交点最少 n 个,设其为 $f(n)$,有 $f(4)=1$, $f(5)=5$, $f(6)=13$, $\cdots$.

问题 20 凸 n 边形任意三条对角线不交于一点(或取消这一条件),设所有对角线和边把整个区域分成若干个多边形,记边数最多者的边数为 k,今问是否有

$$\lim_{n\to+\infty}\min k=+\infty$$

问题 21 凸 n 边形任意三对角线不交于一点,设所有对角线和边把区域

分割成若干个多边形，记其中最大面积和最小面积之比为 λ，问是否有

$$\lim_{n\to+\infty} \min \lambda = +\infty$$

§11　正 n 边形

正 n 边形的问题，有一定的特殊性和趣味性，我们这里略微详细地说一下.

问题 22　正 n 边形的对角线有多少交点？特别地，猜测当 n 为奇数时，任 3 条对角线不共点.

定理 22　当 n 为偶数时，平分正 n 边形的最短线是两平行对边中点的连线.（事实上，对任意中心对称的凸形，平分其面积的最短线一定是过对称中心的某条线段.）

问题 23　当 n 为奇数时，猜想平分其面积的最短线是一段圆弧，若其一端在某条边上，则另一端在以该边的中垂线所通过的该正 n 边形的惟一顶点为端点的两边中的任一边上.

目前仅对 $n=3$ 时有简证.

需要声明的是，对于正 n 边形，问题 20、21 也适用，在此不再赘述.

问题 24　在正 n 边形（面积为 1）内找一点，使该点和正 n 边形任两顶点组成的三角形最小面积最大为 $f(n)$，当 n 为偶数时，求 $f(n)$，目前仅知

$$f(4)=\frac{1}{8},\quad f(6)=\frac{1}{15},\quad f(n)<\frac{2\sin\frac{\pi}{2n}}{n\sin\frac{2\pi}{n}}$$

定理 23　对于 n 为奇数时

$$f(n)=\frac{1}{2n\cos\frac{\pi}{n}}$$

且该点在其中心时达到.

问题 25　在正 n 边形及其对角线组成的完全图中嵌入（即和边、对角线均不相交）一个最大的圆，求其圆心的位置，已知当 n 为奇数时，圆心即为正 n 边形之中心.

§12　凸形（Ⅰ）

这是本文中最大的一个研究专题，分为几节讲述.

定义一个凸形两条平行支撑线之间的最小距离为该凸形的"宽度".(易见最大距离即为直径)

定理 24 任一凸形,必有外切正三角形、正四边形,对 $n>4$,不一定有外切正 n 边形,又对凸形边上的点,至多两个点除外,对任一点,必有以该点为顶点的内接正三角形存在,凸形必有内接正方形.对于 $n>4$,不一定有内接正 n 边形存在.又设凸形的宽度为 d,则其内接正三角形在某种情况下可以任意小,而内接正方形却不能任意小,设其边长为 l,则 $l\geqslant(4-2\sqrt{3})d$,此系数不可改进.

定理 25 设凸形的直径和宽度分别为 D,d,其最小外接圆和最大内含圆半径分别为 R,r,则 $R\leqslant\frac{D}{\sqrt{3}}$,$r\geqslant\frac{d}{3}$,此结果为最佳.

定理 25 乃是一个老结果.

问题 26 一直径为 1、面积为 S 的凸形中能嵌入的最大圆有多大?

定理 26 一凸 n 边形面积为 S_n,依次连结各边中点围成一内接 n 边形面积为 S_n',则当 $n\geqslant 5$ 时

$$\inf\frac{S_n'}{S_n}=\frac{1}{2},\quad \sup\frac{S_5'}{S_5}=\frac{3}{4}$$

定理 27 若凸 6 边形各边相等或各角相等,则

$$\inf\frac{S_6'}{S_6}=\frac{3}{4}$$

定理 27 并不易证.

问题 27 若凸 5 边形各边相等,是否有

$$\inf\frac{S_5'}{S_5}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$$

§13 凸形(Ⅱ)

本节我们将深入刻画凸形的一些性质.

我们注意到,若定义了凸形的直径 D 和宽度 d,则其支撑平行线之间的距离组成的集合 A 为一闭区间$[d,D]$,又对于凸形上任一点,必有凸形边上某一点至其距离最大,称为点径,点径集记为 B;又设凸形被任一方向的一束平行线覆盖,这些线在其内部(即弦)中的最长者记为方向弦,方向弦集记为 C;另外,平分周长弦集和平分面积弦集分别记为 E、F,它们都是闭区间(注意:这里五个集的元素都是长度).且 B、C 的最大元素为直径 D.我们有:

定理 28 $A = C$. 换句话说，若一平面闭凸曲线 S 有两条平行支撑线 l、l'，使 l、l' 的距离为宽度 d，则一定存在两点 A'、B'，$A' \in l \cap S$，$B' \in l' \cap S$，且 $A'B' \perp l$.

我们定义凸形的顶点为：过其点可作至少一条仅与凸形有惟一交点的支撑线. 于是便有：

定理 29 一个凸形至少有 3 个顶点.

定理 30 若一弦为凸形的方向弦，则过其端点有两条平行支撑线存在.

定理 31 设平面一闭凸曲线 S 直径为 D，面积为 s，宽度为 d；B 的最小元素为 l，则

$$S \leqslant \frac{\pi}{4}D^2, \quad d^2 \leqslant \sqrt{3}s,$$

$$\frac{1}{2}Dd \leqslant s < Dd, \quad s \leqslant \frac{\pi}{2}l^2,$$

$$d \leqslant l, \quad D \leqslant 2l, \quad k_1 ld < s < k_2 ld,$$

$$s \leqslant k_3 lD$$

除了 k_1, k_2, k_3 外，以上系数均为最佳.

k_1, k_2, k_3 也不难求，可能麻烦些. 另外，我们还可研究关于 C、E、F 的不等关系，这就远非一言能尽的了. 我们还有如下问题：

问题 28 若 A、B、C、D、E、F 中某一个仅有一个元素，能立即断定原凸曲线 S 为一个圆吗？

对于三角形，我们研究得深入些.

例如，易知 A(或 C) 的最大元素是这个三角形的最大边，最小元素是该边上的高. 但是对于 B，却有着复杂得多的结果，即下面的：

定理 32 对于一三角形，B 的最大元素为最大边，最小元素 l 为(不妨设 $\triangle A'B'C'$ 的最小角为 $\angle A'$，$A'B' \leqslant A'C'$)

$$l = \begin{cases} A'B'\sin A' & \angle A' \geqslant 45^\circ \\ \dfrac{A'B'}{2\cos A'} & \angle A' < 45^\circ \end{cases}$$

问题 29 研究一下三角形的 E、F 两集.

问题 29 不会很难，但较繁.

§ 14 广义 Heilbronn 型问题

这是本文最重要的一节，笔者也在上面做了大量工作. 原始的 Heilbronn 问

题，涉及的是三角形面积及有关比值的问题，我们这里的"广义"二字，无非是借用一下，实指各种几何测度（长度、面积）比值的问题.

定理 33 平面上有 n 个点，每两个点之间有一个距离，记最大距离和最小距离之比为 λ_n，求 $\inf \lambda_n$.

具体情况如下

$$\inf \lambda_3 = 1,\quad \inf \lambda_4 = \sqrt{2},\quad \inf \lambda_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\inf \lambda_6 = 2\sin\frac{2\pi}{5},\quad \inf \lambda_7 = 2,\quad \inf \lambda_8 = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}}$$

最后三个结果分别是笔者于 1991 年 8 月 9 日，1991 年 11 月 17 日，1992 年 3 月 15 日证出的.

另外，有

$$\sqrt{\frac{\sqrt{12}}{\pi}n + \frac{5}{24}} - 1 < \inf \lambda_n < \sqrt{\frac{\sqrt{12}}{\pi}n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\inf \lambda_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sqrt{12}}{\pi}}$$

对于四点组成的凸四边形内一点，$\inf \lambda_5^* = 2\sin\frac{7}{18}\pi$. 此证于 1992 年 9 月 16 日.

问题 30 求以下三者值（或证明其不存在）（$n \geqslant 3$ 时）

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\left(\inf \lambda_n - \sqrt{\frac{\sqrt{12}}{\pi}n}\right),\quad \inf_{n\in\mathbf{N}}\left(\inf \lambda_n - \sqrt{\frac{\sqrt{12}}{\pi}n}\right),\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\inf \lambda_n - \sqrt{\frac{\sqrt{12}}{\pi}n}\right)$$

此题毫无眉目.

至于空间 n 点的最大距离和最小距离之比 ρ_n，目前有：

定理 34 $\inf \rho_5 = \sqrt{\frac{12}{7}}$

问题 31

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\inf \rho_n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{\pi}}$$

注意此题等价于著名的 Kepler 装球问题.

还有一点需要提及，在很长一段时间内，人们猜测 $\inf \lambda_9 = \csc\frac{\pi}{8} \approx 2.613$，后来（1993 年 6 月 23 日）发现这是不对的，反例如图 7 所示，除 A_4A_5 外，其余线段长均为最小距离 1（图中连结者），则当 $\angle A_4A_9A_5 = \frac{7}{9}\pi$ 时，$A_4A_7 = A_2A_5 = A_3A_6$ 是这 9 点的直径 D，此时 $\lambda_9 \approx 2.579 < 2.613$！

笔者还找到过其他反例，不如这个好，但 $\inf \lambda_9$ 终为悬案.

对于面积型问题,即早有:

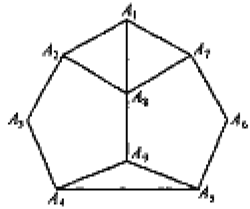


图 7

定理 35 设 n 个点($n \geqslant 4$)中任三点组成三角形面积的最大者和最小者之比为 μ_n,则

$$\inf \mu_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \inf \mu_6 = 3$$

可惜 $\inf \mu_7$ 至今不知.

研究凸 n 边形的 Heilbronn 型问题,又是层出不穷. Reinhardt 曾证明:

定理 36 设凸 n 边形直径为 D_n,周长为 C_n,面积为 S_n,则

$$C_n \leqslant 2n\, D_n \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$S_n \leqslant \frac{n}{2} D_n^2 \cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{\pi}{2n}$$

前者在 n 非 2 的正整数幂时可取到等号,后者在 n 为奇数时可取到等号.

另外,别人还在 D_n 固定的情况下,求出了 $\max S_4$, $\max S_6$ 和 $\max C_4$.

剩下来的问题中,头一个便是求 $\max S_8$(P. Erdös 为此设立 250 美元的奖金)和 $\max C_8$(当 $D_8 = 1$ 时).

笔者未能解决这个问题,但也有一些有益的尝试,对于求 $\max C_8$ 而言,所求的"最大反例"如下:

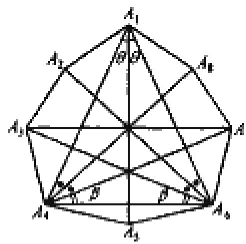


图 8

如图 8,整个图形关于 A_1A_5 对称,且八边形直径 $D_8 = 1$. 除了 A_4A_6 外,其余连出的对角线长都为 1,标好角 θ 和 β.

当 $\cos \beta = \sin \theta + \frac{1}{2}$,且 $\theta \approx 25°$(略小于 25°)时,$C_8 \approx 3.121\ 146\ 2\cdots$.

至今未找到比这个还大的反例.

对于一般的 $n(n = 2^k, k \in \mathbf{N})$,最好的结果为($D_n \triangleq 1$)

$$\max C_n \geqslant \begin{cases} \frac{4}{3}(n-1)\sin \frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{2}{3}(n+2)\sin \frac{\pi}{2(n+2)}, & k \text{ 为偶数} \\ \max\limits_{\theta,\beta} f_n(\alpha,\theta,\beta), & k \text{ 为奇数,其中} \end{cases}$$

$$f_n(\alpha,\theta,\beta) \triangleq \frac{2}{3}(n-2)\sin \frac{3\theta}{n-2} + 4\sin \frac{\beta}{2} + \frac{4}{3}(n-2)\sin \frac{3\alpha}{2(n-2)}$$

其中 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta - \beta$,且 $\cos \beta = \sin \theta + \frac{1}{2}$.

当 k 为偶数时,我们是这样构造的:先作一直径为 1 的 Reuleaux 三边形,将

其中一条弧$\frac{n+2}{3}$等分，把另两弧各$\frac{n-1}{3}$等分，连结三个顶点和 $n-3$ 个等分点即成. 当 k 为奇数时，原则上也是先作 Reuleaux 三边形，但要复杂一些，和8点时的例子有点类似.

我们又另外考虑了一个问题.

定理 37　设凸 n 边形直径为 D_n，最小边长为 l_n，则当 n 非 2 的幂时

$$\inf \frac{D_n}{l_n} = \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{2n},\quad \inf\frac{D_4}{l_4} = \sqrt{2}$$

那么 $\inf\frac{D_8}{l_8}$ = ?很容易猜测为

$$\inf\frac{D_8}{l_8} = \csc\frac{\pi}{8}$$

即当正八边形时达到最小. 这个猜测是错误的.

在介绍反例之前，我们先给出：

定理 38　使$\frac{D_n}{l_n}$达到最小的凸 n 边形的必要条件是它的每边等长.

8 点时的反例如下：

设图 9 中八边形各边长为 $l_8 = 1$，则 $D_8 \triangleq x$（图中所示所有对角线均长为直径 D_8），由托勒密定理和勾股定理，易知

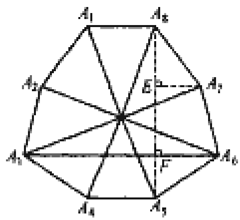


图 9

$$A_5F = \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$$

$$FE = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2x}\right)^2}$$

$$EA_8 = \sqrt{1-\left(\frac{x^2-x-1}{2x}\right)^2}$$

$$A_5A_8 = \sqrt{x^2-1}$$

由 $EA_8 + FE + A_5F = A_5A_8$ 得方程

$$\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2x}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{x^2-x-1}{2x}\right)^2} = \sqrt{x^2-1}$$

解得
$$x = 2.588 < 2.613$$

这是至今找到的最小反例，但 $\inf\frac{D_8}{l_8}$ 至今未知. 因此，迫切的问题是：

问题 32　当 n 为 2 的幂时，D_n 固定，求 $\max C_n$，$\max l_n$；特别地，D_8 固定，求 $\max C_8$，$\max l_8$ 和 $\max S_8$.

另外一个问题是：

问题 33 设凸 n 边形面积为 S_n，任三顶点中所组成三角形面积最小为 S_3，问下式是否成立

$$\inf \frac{S_n}{S_3}=\frac{n}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

我们只知此式对于 $n=3,4,5,6$ 时成立，却不知它是否已被解决.

1941 年匈牙利数学家 Sas 证明了凸形内的最大 n 边形，面积 $\geqslant\left(\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}\right)S_n$，$S_n$ 为凸形面积. 笔者倒可以运用这个定理证明以下结果：

定理 39

$$\frac{S_n}{S_3}>\frac{1}{18\pi^2}(2n+1)^2(n-1) \tag{1}$$

$$\frac{S_n}{S_3}>\frac{n^3}{45} \tag{2}$$

式(1) n 较大时为佳，式(2) n 较小时为佳.

我们还可以此和 Sas 定理证明：

定理 40 对于定理 35 中的 μ_n，有

$$\inf \mu_n\geqslant\frac{n}{2}-1,\quad n\geqslant 4$$

另外再给出一个小结果：

定理 41 对于三角形内两点，有

$$\inf \mu_5^*=4+2\sqrt{3}$$

§15 格　　点

格点问题历来丰富多彩，但因互相之间缺乏联系，容易被人忽略，现列举如下：

问题 34 最多有几个两两不同的格点(x_i,y_i)，$0\leqslant x_i,y_i\leqslant n$，使任意三点不共线；任三线(两两格点连线)不共点；任三点不组成直角(或等腰、正)三角形？(还可推到特殊的四边形，等等.)

问题 35 格点 n 边形的最小尺寸为多少，即设 n 个顶点的坐标分别为(x_i,y_i)，求 $\min(\max|x_i-x_j|,\max|y_i-y_j|)$；另求最小面积和周长.

定理 42 对任意 $n\geqslant 3$，存在 n 个格点，满足任三点不共线(甚至 n 点共圆)，任两点之间的距离为正整数.

问题 36　对任意凸 n 边形，存在与其相似的格点 n 边形的判别准则是什么？(此题甚至可用于一般点集.)

问题 37　二染色全平面格点，一定有一个四顶点均为同色格点且边平行或垂直于坐标轴的正方形存在吗？

此题看似不易.

定理 43　对于任意两条斜率为无理数的平行直线之间，必定存在无数格点.

这也是 Kronecker 定理的推论.

问题 38　对于任两条斜率为无理数的平行直线之间，一定存在素点(即横、纵两坐标互素的格点)吗？

也许这更接近数论.

定理 44　定义 n 个点的质心为$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$，其中$(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$为某一格点坐标. 定义一凸 n 边形的重心为$\left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n-2}S_ix_i, \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n-2}S_iy_i\right)$，也即将凸 n 边形剖分为 $n-2$ 个三角形，第 i 个三角形面积为 S_i，重心为(x_i, y_i)，$S = \sum_{i=1}^{n-2}S_i$ 为总面积大小，则有对任意 $n \geqslant 3$，存在无数个格点凸 n 边形，其重心也是格点.

最后，我们谈谈那个有点名气的"$4n-3$"猜想.

问题 39　平面上任给"$4n-3$"个格点，则必有 n 个格点其质心也是格点. "$4n-4$"则有反例.

这个问题是由一定背景提出的，本来它似乎纯粹是个数论或组合题，但把它放在这里自有一定的根据.

不难知道，若对 $n = p$(素数)成立，则对一切 n 均成立."$4n-3$ 猜想"直到 2003 年才被证明. 至于直线上的"$2n-1$"定理早就解决了.

有意思的是，人们在空间提出"$8n-7$"猜想被证明是错误的，事实上，要 19 个空间整点才能保证必有三点的质心也为整点.

一代数学大家 P. Erdös，N. Alon 一直十分关注这类问题.

§16　其他问题

在图论中，有连通图的概念，现假定警察和小偷都是图上的几何点，他们一刻也不能离开这个图的点和边. 当作为警察的点和作为小偷的点碰在一起时，

我们就认为警察抓住了小偷.

我们有如下假定:

(1) 在图上有若干名警察,一名小偷,且警察和小偷在不超过自己的最大速度的前提下,可任意控制自己的速度(否则问题太复杂了);

(2) 警察一般总比小偷跑得慢(否则小偷必被抓住,不必再讨论下去了);

(3) 每个警察每时每刻可以看清小偷的位置(否则成为随机过程,不在我们讨论范围之内);

(4) 警察最大速度和小偷最大速度之比为任意小或并非任意小.

我们的问题是:

问题 40 如果警察最大速度和小偷最大速度之比为任意小,对于任意一个图(比如几阶完全图),何以判断最少 12 个警察可以将小偷抓获?

比如,我们已经证明,一个正 n 边形及所有主对角线(注意在中点处不连通)组成的图中,这样的警察只需 4 名.

如果警察最大速度和小偷最大速度之比并非任意小,就更有组合几何味道了.

比如说,我们有如下结论:如图 10,在正三角形及其中位线组成的三角形上,有两名警察抓一名小偷,设小偷最大速度为 v_0,则只需一名警察最大速度为 $v_0/3$,另一名警察速度可任意小(但不为零),则小偷必被抓获.

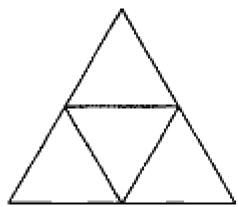


图 10

这样便促使我们提出另外一个问题:

问题 41 在一个图上,最少需要 n 名警察(速度均任意小)才能抓住小偷,那么任意 $k(k < n)$ 个警察,他们要抓住小偷,其速度之和(当然和 k 有关)最小是什么?

也就是说,这样我们的警察们最省气力.

组合几何中有趣的、深入的问题极多,我们只是窥豹一斑;当今世界上,许多著名数学家,如 P. Erdös, K. F. Roth, F. Toth, H. Hadwiger 及 R. Guy 等都研究组合几何,并取得了丰硕的成果.陈省身教授认为,这种几何将会在晶体物理方面得到应用.

编后语 *在全国高中数学联赛及中国数学奥林匹克即 CMO 中,组合几何具有重要地位,许多命题专家苦于无题可出.田廷彦先生这篇综述文章给出了许多题材.田先生毕业于上海交通大学,颇具数学天赋,是国内少数能独立解出 IMO 试题的专家之一.*

Some New Development on the Length of Golomb Ruler

Wang Yanqing, Li Xiaoming①

Abstract Let $x_1, x_2, \cdots, x_n$ be an increasing sequence of integers, where $x_1 = 0$, which satisfies the following conditions: if $|x_i - x_j| = |x_p - x_q|$ then $\{i, j\} = \{p, q\}$. Our objective is to find the order of minimum x_n for any given n. There are two interesting results in[1]. In this paper, the two results are both improved. In addition, it will be shown that the length of Golomb Ruler have been shortened to a half, and that the satisfying sequence can not be generated by such a quadratic formula as $x_i = ai^2 + bni + ci + dn^2 + en + f$ for any rational a, b, c, d, e and f.

Key words Golomb Ruler; graceful graph; difference triangle

1. Introduction

The concept of Golomb Rulers is a variation of graceful graphs. A graph of e edges is said to be graceful if its nodes can be numbered by the integers from $\{0, 1, \cdots, e\}$ such that the induced numbers on edges, *i.e.*, the positive differences of numbers assigned to their end nodes, are all different. Lots of attempt has been made on determining of whether a graph is graceful or not. It has been proved that every complete graph of $n > 4$ nodes is not graceful[4]. But unknown are more than known it is not even known if all tree graphs are graceful[3].

If we do not put any restriction on the ruler's length and only require that all distances between pairs of marks be different, the shortest ruler, for a given n, is called Golomb Ruler.

The idea of Golomb Ruler has a great variety of applications[5]. For example, a Golomb Ruler may correspond to optimal antennas geometry[2]. Unfortunately, we haven't found an efficient algorithm to generate Golomb Rulers. We do not even know

① Department of Computer Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001, China.本文为作者在爱尔兰访问期间所作报告的英文稿,作者为哈工大博士.

how long it should be in terms of order. In the following, we will shorten the length of the Golomb Ruler in[1], in other words, we have found a shorten Golomb Ruler.

For our purpose, let's rephrase the problem of finding a Golomb Ruler, *i.e.* determining n numbers $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ such that:

(1) If $|x_i - x_j| = |x_p - x_q|$ then $\{i, j\} = \{p, q\}$

(2) x_n is minimized.

For convenience, we call sequence $x_1, x_2, \cdots, x_n$ with $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ a graceful sequence if it satisfies the condition (1). It is clear that any graceful sequence must have $x_n \geqslant C_n^2$ since there are C_n^2 induced differences[1] (in fact, $x_n > C_n^2$ for $n > 4$[4]). And it isn't difficult to verify that $x_i = 2^{i-1} - 1$ generates graceful sequences for any n[1], but unfortunately x_n might be too big. In what follows, we'll present a formula, which generates a graceful sequence for any n and x_n is of order n^3. Compare the length with that of[1], and you should find that length has been shortened to a half. Also we shall give a proof that such a formula as $x_i = ai^2 + bni + ci + dn^2 + en + f$ cannot serve our purpose and we conjecture that $O(x_n) > n^2$.

2. Preliminary property and Lemma

Definition 1. Integer sequence $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ is called a graceful sequence if the differences of any pair of elements are unique. *i.e.* if $|x_i - x_j| = |x_p - x_q|$ then $\{i, j\} = \{p, q\}$

Definition 2. Following[1], to any graceful sequence of integers, the differences between elements of $\{x_i\}$ can be arranged in a so-called Difference Triangle (DT), where an element $t_{i,j}$ of DT is defined by $t_{i,j} = x_{i+1} - x_{i+1-j}$, and it is in the i^{th} row, the j^{th} column, here $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n-1$. Thus, the graceful sequence consists of $x_1 = 0$ and all the elements in the diagonal of corresponding DT.

Lemma 1. Let $a = pN + r$, $b = qN + s$, for any positive number p, q, r, s and N, if $N > r$, $N > s$ and $r \neq s$, then when N is given, $a \neq b$ must be true.

Proof: As $a = pN + r$, $b = qN + s$ thus $a - b = (p - q)N + (r - s)$. Because $r < N$, $s < N$, it is clear that $|r - s| < N$.

Case 1, $p = q$. Here $a - b = r - s$, $r \neq s$, so $a \neq b$ must be true.

Case 2, $p \neq q$. Supposed $a = b$, then $|p - q| N = |r - s|$, the left side, $p \neq q$ so $|p - q| \geqslant 1$, $|p - q| N \geqslant N$; While in the right side, $r < N$, $s < N$, so $|r - s| < N$ must be true, a contradiction.

Q.E.D.

3. Theorems and proof

Theorem 1. The length of Colomb Rulers of n marks is bounded by $\frac{(n-1)(n-1)^2+1}{2}$.

Proof: Set $x_i=\frac{(i-1)(i-2)n}{2}+i-1,(i=1,2,\cdots,n)$. Our fist step is to construct a DT. It's not hard to understand if any two elements in DT are different then our construction is successful. First, look at the following interesting Difference Triangle DT_1 together.

1						
$n+1$	$n+2$					
$2n+1$	$3n+2$	$3n+3$				
$3n+1$	$5n+2$	$6n+3$	$6n+4$			
$4n+1$	$7n+2$	$9n+3$	$10n+4$	$10n+5$		
$5n+1$	$9n+2$	$12n+3$	$14n+4$	$15n+5$	$15n+6$	
$6n+1$	$11n+2$	$15n+3$	$18n+4$	$20n+5$	$21n+6$	$21n+7$
…	…	…	…	…	…	…

It's easy to find that the graceful sequence, which generates the above DT_1, consists of 0 and all the elements in the diagonal of DT_1.

The elements in every column are increasing from top to end, so it's clear that there can't be two same elements in one column. There are $n-1$ columns totally, and any element in the i^{th} column mod n equals to $i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$. So if we prove that any pair of elements in two different columns can't be equal, we can say that DT_1 satisfied our condition.

Now select any pair of elements from two different columns as you wish. Suppose one of them is $a=pn+j_1$, the other is $b=qn+j_2$, here $j_1\neq j_2$. Because there are $n-1$ rows and $n-1$ columns totally, $j_1<n$ and $j_2<n$. Based on Lemma 1, $a\neq b$ is always correct. It proves that the above DT_1 is a graceful one. The upper boundary of above Difference Triangle DT_1 is $x_n=\frac{(n-1)(n-2)n}{2}+n-1=\frac{(n-1)((n-1)^2+1)}{2}$.

In above DT_1, if we replace n with $n-2$, the conclusion is still true. The result is the same as the Theorem 1 in[1], it's $x_n=(n-1)(1+\frac{(n-2)^2}{2})$.

Q.E.D.

Theorem 2. The length of Golomb Ruler with n marks can be shortened to about a half. When n is an odd integer, $x_n \leqslant (n-1) + \frac{(n-1)^2(n-2)}{4}$, else $x_n \leqslant (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{4}$.

Proof: In above DT_1, if we replace n with N, our objective now is to decrease N as much as possible. Thus we set $x_i = C_{i-1}^2 N + i - 1 (i = 2, 3, \cdots, n)$. If n is an odd number then set $N = \frac{n-1}{2}$, else if n is an even one then $N = \frac{n}{2}$. So the updated Difference Triangle DT_2 is below:

1				⋮			
$N+1$	$N+2$			⋮			
$2N+1$	$3N+2$	$3N+3$		⋮			
$3N+1$	$5N+2$	$6N+3$	$6N+4$	⋮			
$4N+1$	$7N+2$	$9N+3$	$10N+4$	⋮	$10N+5$		
$5N+1$	$9N+2$	$12N+3$	$14N+4$	⋮	$15N+5$	$15N+6$	
$6N+1$	$11N+2$	$15N+3$	$18N+4$	⋮	$20N+5$	$21N+6$	$21N+7$
…	…	…	…	⋮	…	…	…

Now that N is $\frac{n}{2}$ or $\frac{n-1}{2}$, from the 1st column to the $(N-1)^{th}$ one, the elements in every column mod N are from 1 to $N-1$ correspondingly, and those in the N^{th} column mod N are 0. From the $(N+1)^{th}$ column to $(n-1)^{th}$ column, when the elements mod N their remainders are from 1 to $N-1$ (or to zero when n is odd). Therefore, the DT_2 is split into two big blocks (see the dotted line in DT_2). The first N columns form the first block; the other block is from the $(N+1)^{th}$ column to the $(n-1)^{th}$ one.

Based on Theorem 1, it's easy to find that, inside any block, no two elements are duplicated. According to Lemma 1, if two columns mod N have different remainders, all elements of these two columns are unique. So our next target is to prove that any two elements in the different blocks, which have the same remainders mod by N, can't be the same.

In above DT_2, when j is given, $t_{i,j} = x_{i+1} - x_{i+1-j}$ will be increasing with i. Thus the largest element in the j^{th} column is

$$t_{n-1,j} = x_n - x_{n-j} = \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-j-1)(n-j-2)}{2}\right] \cdot N + (n-1) - (n-j-1) =$$

$$\left[j(n-2)-\frac{j(j-1)}{2}\right]\cdot N+j$$

While the smallest element of $(N+j)^{th}$ is

$$t_{N+j,N+j}=C_{N+j}^{2}N+N+j=\left[\frac{(N+j)(N+j-1)}{2}\right]\cdot N+j$$

If we can prove $t_{n-1,j}$ is always less than $t_{N+j,N+j}$ to any given j, our goal is achieved. That means that to any $j(j=1,2,\cdots,N)$ the following formula must be true.

$$\frac{(N+j)(N+j-1)}{2}>j(n-2)-\frac{j(j-1)}{2} \qquad (*)$$

Case 1, n is an odd. $N=\frac{n-1}{2}$, we want to prove

$$\left[\frac{n-1}{2}+j\right]\cdot\left[\frac{n-1}{2}+j-1\right]/2+1>j(n-2)-\frac{j(j-1)}{2}$$

$$2j^2-(n-1)j+\frac{(n-1)(n-3)}{4}+2>0$$

The parabola $y=2j^2-(n-1)j+\frac{(n-1)(n-3)}{4}+2$ opens upwards, and $(n-1)^2-[2(n-1)(n-3)+16]=-(n-3)^2-12<0$, so y is always more than zero. Our goal is accomplished.

Case 2, n is an even. $N=\frac{n}{2}>\frac{n-1}{2}$. If we replace N with $\frac{n}{2}$ in formula($*$), it is obviously that the formula is correct.

Now that DT_2 is constructed successfully, the upper boundary of Golomb Ruler is

$x_n\leqslant(n-1)+\frac{(n-1)^2(n-2)}{4}$, when n is an odd;

$x_n\leqslant(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{4}$, when n is an even.

Q.E.N.

Theorem 3. To any rational number a,b,c,d,e and f, graceful sequence cannot be generated by such a quadratic polynomial $x_i=ai^2+bni+ci+dn^2+en+f$.

Proof: We are discussing Difference Triangle, in which $t_{i,j}=x_{i+1}-x_{i+1-j}, 1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-1$, so if we set $x_i=a(i-1)^2+bn(i-1)+c(i-1),(i=1,2,3,\cdots,n)$, generality will not be lost. Since that $x_i=a(i-1)^2+bn(i-1)+c(i-1)$, the corresponding DT_3 is shown below

$1a+(bn+c)$

$3a+(bn+c) \quad 4a+2(bn+c)$

$5a+(bn+c) \quad 8a+2(bn+c) \quad 9a+3(bn+c)$

$$
\begin{array}{lllll}
7a+(bn+c) & 12a+2(bn+c) & 15a+3(bn+c) & 16a+4(bn+c) & \\
9a+(bn+c) & 16a+2(bn+c) & 21a+3(bn+c) & 24a+4(bn+c) & 25a+5(bn+c) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

If we can prove that there must be two equal elements in DT_3 when n becomes big enough, our conclusion is made.

First of all, we should exclude some conditions unnecessary to be considered.

If $a=0$. All elements in a single column are all the same, so $a \neq 0$;

If $b=0$. Based on the Theorem 2 in[1], it is obviously that sequence $\{x_i\}$ is not graceful.

Every element in DT must be more than zero. Let's look at $t_{1,1}=a+bn+c$. If $b<0$, no matter how big a and c are, when n becomes big enough, $t_{1,1}$ might be less than zero. That is unreasonable, so $b<0$ can not be true.

In addition, from $t_{1,1}=a+bn+c>0$, we can get $c>-a-2b$ (when $n=2$); from $t_{n-1,1}=(2n-3)a+bn+c>0$, we can get $(2a+b)n>3a-c$. No matter how small $3a-c$ is, $2a+b>0$ must be true.

On all account, we just need to prove that to any integer $a, b, c, a \neq 0$, $b>0$, $c>-a-2b, 2a+b>0$, the sequence $\{x_i\}$ corresponding with DT_3 is NOT graceful.

Let's pick up two special elements $t_{i1,j1}$ and $t_{i2,j2}$ in DT_3, in which $i_1=n-1$, $j_1=b+1$, $i_2=j_2=2a+b+1$. If $a>0$, j_1 is smaller column; otherwise j_1 is the bigger one.

if $\qquad 2a^2+b^2+2ab+2b+(-a-2b)=(a+b)^2+a^2-a \geqslant 0$

then $\qquad (-a-2b) \geqslant -(2a^2+b^2+2ab+2b)$

then $\qquad c>-a-2b \geqslant -(2a^2+b^2+2ab+2b)$

then $\qquad (2a^2+b^2+2ab+2b)+c>0$

So, we can find that

$2a^2+b^2+2ab+2b+(2a+b+1)+1+c-1>2a+b+1$. If $n=2a^2+b^2+2ab+2a+3b+2+c$, then $n-1>2a+b+1=j_2$;

Also, $c>-a-2b$, $n-1=c+2a^2+b^2+2ab+2a+3b+2-1>-a-2b+2a^2+b^2+2ab+2a+3b+1=(a+b)^2+a^2+a+b+1 \geqslant b+1=j_1$.

We can conclude that: If $a>0$, then $n-1>j_2>j_1>1$; If $a \leqslant 0$, then $n-1>j_1 \geqslant j_2>1$. So we can see that j_2, j_1 all exist.

Now let's see what will happen when $n=2a^2+b^2+2ab+2a+3b+2+c$.

$t_{i_1,j_1}-t_{i_2,j_2}=(x_{i_1+1}-x_{i_1+1-j_1})-(x_{i_2+1}-x_{i_2+1-j_2})=$

$$
\begin{aligned}
&ai_1^2+(bn+c)i_1-[ai_2^2+(bn+c)i_2]-\\
&[a(i_1-j_1)^2+(bn+c)(i_1-j_1)]+\\
&a(i_2-j_2)^2+(bn+c)(i_2-j_2)=\\
&a[i_1^2-i_2^2-(i_1-j_1)^2]+(j_1-j_2)(bn+c)+x_1=\\
&a[i_1^2-i_2^2-(i_1-j_1)^2]-2a(bn+c)=\\
&a[(n-1)^2-(2a+b+1)^2-(n-b-2)^2]-2a(bn+c)=\\
&a[n^2-2n+1-4a^2-4ab-4a-b^2-\\
&2b-1-n^2+2bn-b^2+4n-4b-4]-2a(bn+c)=\\
&-2a[2a^2+b^2+2ab+2a+3b+2+c-n]=0
\end{aligned}
$$

So when n becomes big enough, t_{i_1,j_1} and t_{i_2,j_2} must be equal.

Q.E.D.

4. Conclusion

In this paper, some progresses were made on solving Golomb Ruler. A shorten Ruler of order $O(x_n)\leqslant\frac{n^3}{4}$ was found. Moreover, a theorem prevents people from attempting in vain to find such a quadratic polynomial as $x_i=a_i^2+bn_i+c_i+dn^2+en+f$ to mark Golomb Ruler. However, this problem has not been solved completely, quite a lot of work should be done.

References

[1] XIAOMING LI. On the Length of Optimal Non-redundancy Linear Arrays[J]. Proc. of ICCS' Singapore, 1990: 90.

[2] UNNIKRISHNA PILLAI S. Yeheskel Bar-Ness Fred Haber. A New Approach to Array Geometry for Improved Spatial Spectrum Estimation[J]. Proceedings of the IEEE, 1985, 73(10).

[3] HARARY F. Lectures in Graph Theory[M]. Stevens Inst of Tech, Spring, 1985.

[4] GOLOMB S W. How to Number a Graph. Graph Theory and Computing[M]. New York: Academic Press, 1972: 23-37.

[5] BLOOM G S, GOLOMB S W. Numbered Complete Graphs, Unusual Rulers, and Assorted Applications[C]. Proceedings of the International Conference on the Theory and Applications of Graphs, Spring-Verlag, 1976.

编后语 有人说,计算机的前端与上游即是数学,从图灵到冯·诺伊曼都是纯数学家但对计算机领域又都有巨大贡献,我们从1966-1985年ACM图灵奖的名单即可发现许多获奖者同时又为数学家,如R.W.汉明(R.W.Hamming)(概率论与组合学),理查德·M.卡普(Richard M.Karp)(运筹学),迈克尔·O.拉宾(Michael O.Rubin)(概率论),达纳·S.斯科特(Dana S.

Scott)(集合论模态逻辑),J.H.威尔金森(J.H.Wilkinson)(数值线性代数),世界上最大的电脑公司顶尖部门是由纯数学家组成的,两者密不可分,王延青博士本科读的是计算机专业,但他酷爱数学,本文为其本科毕业时所作,他多年一直钟爱这一课题,这足以证明数学不单单是学数学人的专利,数学应该属于所有人,这正是数学存在的理由与数学普及的可能性证明.

数学奥林匹克是中国的强势领域,具有走向世界的实力,为此种考虑我们每期会发表一篇英文稿,逐年增加直至办成一个国际化刊物,希望有英文写作能力的作者为我们提供作品.

Mathematics is the most powerful technique for the understanding of pattern, and for the analysis of the relation of patterns... If civilization continues to advance in the next two thousands years, the overwhelming novelty in human thought will be the dominance of mathematical understanding.

——怀特海

密码与宝藏

Richard Spillman

Robert Morris 是维吉尼亚旅馆的经理，他砸开了一个保存了近 20 年的盒子.这个盒子是 Morris 的一个朋友 Thomas Jefferson Beale 于 1821 年给他的，Beale 告诉 Morris，若他 10 年内没有回来，就砸开它.自 Beale 离开以后，Morris 就再也没有得到关于他的任何消息.当 Morris 打开盒子时，他被震惊了.盒子里有两封写给他的信和一些写满数字的纸.信中说：1817 年，Beale 和他的 30 个朋友在圣达菲以北 250 英里处发现了一个特大的金银矿.在两年的时间中，Beale 和他的一些朋友陆续回到了维吉尼亚，埋藏了一吨的金银.在那张写满数字的纸上，隐藏着埋藏金子的地点，以及与他一起工作的 30 个人的子女的姓名.请 Morris 去挖出这些黄金，并将黄金分给名单上的人.信中还说，加密密钥将邮寄给他，但他却从没有收到过.

Morris 带着他无法读懂的宝藏图离开了.多年来他一直试图破解这些密码，但没有取得任何进展.最后，他告诉了 James Ward，并请他来分析这些密文.有意思的是，Ward 从这三段密文中的第二段中发现了密钥.第二段密文是由 1 ~ 1 322 的数字组成的：

115,73,24,807,37,52,49,17,31,62,647,22,7,15,140,47,29,107,79,84,56,239,10,26,811,5,196,308,85,52,160,136,59,211,36,9,46,316,554,122,106,95,53,58,2,42,7,35,122,53,31,82,77,250,196,56,96,118,71,140,287,28,353,37,1005,65,147,807,24,3,8,12,47,43,59,807,45,316,101,41,78,154,1005,122,138,191,16,77,49,102,57,72,34,73,85,35,371,59,196,81,92,191,106,273,60,394,620,270,220,106,388,287,63,3,6,191,122,43,234,400,106,290,314,47,48,81,96,26,115,92,158,191,110,77,85,197,46,10,113,140,353,48,120,106,2,607,61,420,811,29,125,14,20,37,105,28,248,16,159,7,35,19,301,125,110,486,287,98,117,511,62,51,220,37,113,140,807,138,540,8,44,287,388,117,18,79,344,34,20,59,511,548,107,603,220,7,66,154,41,20,50,

6,575,122,154,248,110,61,52,33,30,5,38,8,14,84,57,540,217,115,71,29,
84,63,43,131,29,138,47,73,239,540,52,53,79,118,51,44,63,196,12,239,
112,3,49,79,353,105,56,371,557,211,505,125,360,133,143,101,15,284,540,
252,14,205,140,344,26,811,138,115,48,73,34,205,316,607,63,220,7,52,
150,44,52,16,40,37,158,807,37,121,12,95,10,15,35,12,131,62,115,102,
807,49,53,135,138,30,31,62,67,41,85,63,10,106,807,138,8,113,20,32,33,
37,353,287,140,47,85,50,37,49,47,64,6,7,71,33,4,43,47,63,1,27,600,208,
230,15,191,246,85,94,511,2,270,20,39,7,33,44,22,40,7,10,3,811,106,44,
486,230,353,211,200,31,10,38,140,297,61,603,320,302,666,287,2,44,33,
32,511,548,10,6,250,557,246,53,37,52,83,47,320,38,33,807,7,44,30,31,
250,10,15,35,106,160,113,31,102,406,230,540,320,29,66,33,101,807,138,
301,316,353,320,220,37,52,28,540,320,33,8,48,107,50,811,7,2,113,73,16,
125,11,110,67,102,807,33,59,81,158,38,43,581,138,19,85,400,38,43,77,
14,27,8,47,138,63,140,44,35,22,177,106,250,314,217,2,10,7,1005,4,20,
25,44,48,7,26,46,110,230,807,191,34,112,147,44,110,121,125,96,41,51,
50,140,56,47,152,540,63,807,28,42,250,138,582,98,643,32,107,140,112,
26,85,138,540,53,20,125,371,38,36,10,52,118,136,102,420,150,112,71,14,
20,7,24,18,12,807,37,67,110,62,33,21,95,220,511,102,811,30,83,84,305,
620,15,2,10,8,220,106,353,105,106,60,275,72,8,50,205,185,112,125,540,
65,106,807,138,96,110,16,73,33,807,150,409,400,50,154,285,96,106,316,
270,205,101,811,400,8,44,37,52,40,241,34,205,38,16,46,47,85,24,44,15,
64,73,138,807,85,78,110,33,420,505,53,37,38,22,31,10,110,106,101,140,
15,38,3,5,44,7,98,287,135,150,96,33,84,125,807,191,96,511,118,40,370,
643,466,106,41,107,603,220,275,30,150,105,49,53,287,250,208,134,7,53,
12,47,85,63,138,110,21,112,140,485,486,505,14,73,84,575,1005,150,200,
16,42,5,4,25,42,8,16,811,125,160,32,205,603,807,81,96,405,41,600,136,
14,20,28,26,353,302,246,8,131,160,140,84,440,42,16,811,40,67,101,102,
194,138,205,51,63,241,540,122,8,10,63,140,47,48,140,288

Ward发现,这些数字表示的是美国《独立宣言》中的一些单词.每个明文字母对应于这些加编号的单词的第一个字母.结果明文如下:

I have deposited in the country of Bedford about four miles from Bufords in an excavation or vault six feet below the surface of the ground the following articles belonging jointly to the parties whose names are given in number three herewith, the first deposit consisted of ten hundred and fourteen pounds of gold and thirty eight hundred and twelve

pounds of silver deposited nov eighteen nineteen. The second was made dec eighteen twenty one and consisted of nineteen hundred and seven pounds of gold and twelve hundred and eighty eight of silver also jewels obtained in St Louis in exchange to save transposition and valued at thirteen thousand dollars. The vault is roughly lined with stone and the vessels rest on solid stone and are covered with others. Paper number one describes the exact locality of the value so that no difficulty will be had in finding it.

关键(即包含宝藏埋藏地点的)密文在第一张纸中,具体如下:

71,194,38,1701,89,76,11,83,1629,48,94,63,132,16,111,95,84,341,975,14,40,64,27,81,139,213,63,90,1120,8,15,3,126,2018,40,74,758,485,604,230,436,664,582,150,251,284,308,231,124,211,486,225,401,370,11,101,305,139,189,17,33,88,208,193,145,1,94,73,416,918,263,28,500,538,356,117,136,219,27,176,130,10,460,25,485,18,436,65,84,200,283,118,320,138,36,416,280,15,71,224,961,44,16,401,39,88,61,304,12,21,24,283,134,92,63,246,486,682,7,219,184,360,780,18,64,463,474,131,160,79,73,440,95,18,64,581,34,69,128,367,460,17,81,12,103,820,62,116,97,103,862,70,60,1317,471,540,208,121,890,346,36,150,59,568,614,13,120,63,219,812,2160,1780,99,35,18,21,136,872,15,28,170,88,4,30,44,112,18,147,436,195,320,37,122,113,6,140,8,120,305,42,58,461,44,106,301,13,408,680,93,86,116,530,82,568,9,102,38,416,89,71,216,728,965,818,2,38,121,195,14,326,148,234,18,55,131,234,361,824,5,81,623,48,961,19,26,33,10,1101,365,92,88,181,275,346,201,206,86,36,219,324,829,840,64,326,19,48,122,85,216,284,919,861,326,985,233,64,68,232,431,960,50,29,81,216,321,603,14,612,81,360,36,51,62,194,78,60,200,314,676,112,4,28,18,61,136,247,819,921,1060,464,895,10,6,66,119,38,41,49,602,423,962,302,294,875,78,14,23,111,109,62,31,501,823,216,280,34,24,150,1000,162,286,19,21,17,340,19,242,31,86,234,140,607,115,33,191,67,104,86,52,88,16,80,121,67,95,122,216,548,96,11,201,77,364,218,65,667,890,236,154,211,10,98,34,119,56,216,119,71,218,1164,1496,1817,51,39,210,36,3,19,540,232,22,141,617,84,290,80,46,207,411,150,29,38,46,172,85,194,39,261,543,897,624,18,212,416,127,931,19,4,63,96,12,101,418,16,140,230,460,538,19,27,88,612,1431,90,716,275,74,83,11,426,89,72,84,1300,1706,814,221,132,40,102,34,868,975,1101,84,16,79,23,16,81,122,324,403,912,227,936,447,55,86,34,43,212,107,96,314,264,1065,323,428,601,203,124,95,216,814,2906,654,820,2,301,112,176,213,71,87,96,202,35,10,2,41,17,84,221,736,820,214,11,60,

760

Ward 发现美国《独立宣言》对这段密文无效. 他又尝试了宪法、圣经、莎士比亚作品以及其他的文字,没有一个能有效破译. 一些人放弃了努力,认为这是一场骗局. 他们也许是对的. 其他一些人声称破解了,但还没有一个能找到宝藏.

不管真假与否,Beale 密码消耗了很多人的时间乃至生命. 1966 年,一位银行家投资买了一台钻孔机,打了大量的孔,但一无所获,甚至推平了一座山丘也没有找到任何东西. 看来埋藏黄金的神秘地点和秘密的加密法对我们的想象还是很有吸引力的,直至耗尽我们的生命.

(译自(美)Richard Spillman 的《Classical and Contemporary Cryptology》)

编后语 台湾社会学家金耀基教授著文介绍过一个有关剑桥大学的非常引人深思的趣事. 在剑桥,饭后举杯时会有这么一说:"愿上帝护佑数学,愿它们永不会被任何人所用."数论便是这样一门纯中纯的数学分支,哈代曾为之自豪,但近年来随着密码学的异军突起,数论显示了威力,验证了那句"无用之用方为大用"的古话,这篇密码学的小文章算是开了一个头,以后会有更多的文章介绍给读者.

God ever arithmetizes.

——雅可比

一封读者的来信

刘培杰主编：

我近日看了您主编的《500个最新世界著名数学智力趣题》[①]，感到你们付出了大量劳动，为数学事业作出了宝贵贡献！遗憾的是，看了您为该书所写的前言，却感到您有一错，错在把流行当真理，详细说明如下.

您在前言中引用了田松教授所著《永动机与哥德巴赫猜想》一书中说给民科的话："……".为此我要告诉您的真心话是，田松所著《永》书中犯有一个重大错误同样是把流行当真理！

田松既不懂又不会证 1+1，更不知 APB 定律，也没有看过民科的数十麻袋稿件，就把百年来流行的几篇用筛法证明弱命题$(a+b)$，…，$(1+c)$，…，$(1+3)$，$(1+2)$的文章当真理，并在中央电视台和其书中自欺欺人地公开撒谎说：民间科学爱好者不可能攻克哥德巴赫猜想.

我尊重陈景润、王元等数学家，但我更尊重真理.我从宏观的角度看问题，认为他们证的$(1+2)$，$(2+3)$，…，却是误人歧途的连篇废话；证 1+1 用不着筛法，若需用则正好需用筛法一次性全部筛掉他们所证的$(1+2)$，$(2+3)$，…，只有这样才能留下 1+1，证明 1+1.

哥德巴赫猜想不过是一个井蛙之见，哥氏没有看到在"1+1"后面那无限优美，无限宽广，无限宝贵的数学天空，以及其中的可用于所有矛盾事物的 APB 定律.

陈王之智不会大于天下人，群众才是真正的数学英雄！广大民科为什么不可能越超陈王？为什么不能推动数学发展？当然我也承认有些民科的东西实在低级，但决不是都错误.

流行的东西也会是错误的，落后的，中国不是曾经还流行过男人留长辫子，女人裹小脚吗？不是曾经还流行过文化大革命吗？

我早已用平方法(181)攻克了 1+1，早已发现了每一个大偶数都遵守的 APB 定律！……，并用 LATEX 打完论文.

① 本书于2006年1月由哈尔滨工业大学出版社出版，刘培杰、马国选主编.

声音

我也早已发现数学难题之海！足以向人类智慧和大型电脑挑战！

中国数学界普遍存在着学术歧视与学术造假，即只要是没有教授推荐的一切民间来稿，不管是一篇还是100篇，不管是一麻袋还是100麻袋，只要涉及1+1就一律判为全错！废纸！中科院数学所就是这样的.教授们都迷信筛法，迷信陈王，都以为只有一条大道通罗马，无暇顾及民间来稿，即使民间攻克了1+1多次也决不理睬.

中国数学界的现状使我找不到审稿人，更难发表，报国无门.

关于围棋.古今中外的业余与专业的数千万棋手们，目前还都只处于初级阶段，他们都还是在361纵横盘上"一手一子"的下棋，都还没有进步到"一手二子"、"一手多子"的下棋，更没有进步到在我提出的361对角盘，365对角盘，361太极盘，365太极盘上"一手多子"的下棋.

围棋本为模拟战争，交战双方一般都是一次派出多兵参战，哪像母鸡下蛋似地一次一子地出兵？

我深深地希望您改变看法，别把流行当真理！别小看民科！也别迷信陈王，他们也是人，也会有错误！

此致敬礼！

侯小山 2006.4.5 于北京

hou - xiaoshan@sina.com

What we know is very slight, what we don't know is immense. Man follows only phantoms.

——拉普拉斯

没有人告诉你是对还是错[①]

刘培杰

总导语：英国费伯出版社和美国布卢姆斯伯里出版社曾经悬赏一百万美元，奖给在两年内解开哥德巴赫猜想数学之谜的人．这两家出版社其实醉翁之意不在酒，真实意图是为希腊作家阿·佐克西亚季斯的小说《波得罗斯大叔和哥德巴赫猜想》作宣传，领奖的最后期限定为2002年3月15日．俗语说：重赏之下必有勇夫．百万美金像一块巨石，在中国老百姓的心中激起千重浪，于是中国大地再掀"证明"热潮．

哥德巴赫系德国－俄国数学家，1690年3月18日生于普鲁士柯尼斯堡，1764年12月1日卒于莫斯科．早年学习法学，后来在大学里攻读医学和数学．1725年移居俄国，任彼得堡科学院会议秘书兼数学教授．1727年到莫斯科当上沙皇彼得二世(Tsavevich Peter Ⅱ)的家庭教师．1742年起任外交部公使，1742年6月7日他在至瑞士数学家欧拉的信中提出猜想：任何一偶数 $n(n\geq 4)$ 是两个素数之和．

目前中国在哥德巴赫猜想研究上居于世界领先地位，以致1996年德国数学家Volke到中国科学院数学所访问时说："中国数学家对哥德巴赫猜想的贡献那么大，如果哥德巴赫还活着，我猜想他一定会首先选择到中国来访问．"同时他把哥德巴赫当年给欧拉的那封信的复件送给了中国数学研究所，以表示他对中国数学家的敬意．

中国第一个想拿走100万美元的是任大鸿先生．任大鸿先生是成都某设计院的职工，年近中年，额头宽大，从中国传统相面术来看是一位聪明绝顶之人；当他从媒体中得知费伯出版公司的悬赏之后，兴奋不已，马上把自己关在屋子里几天未出来，最后终于搞出了一份所谓"证明"，并向媒体发布了这一消息．

他对自己的证明颇为自信，这与他中学的求学经历有关，据称他中学时数

① 谨以此文献给所有数学业余爱好者．

学特棒，是数学课代表，很少有数学题能难住他.

此后任大鸿就开始等待数学界的答复并准备“领取”100 万美元的巨奖，但这并不容易，因为那两家出版公司规定，必须在两年内得到权威数学机构的认可，并于第 3 年在权威杂志上发表，对此不知任先生怎样想.

在哈尔滨也有多起证明事件. 第一起证明人赵东宁是一位女士，她在黑龙江省卫生学校教中医临床课. 赵中学毕业于哈尔滨一中，师从当时很有名望的教师冯宝琦先生，冯先生早年毕业于南京大学，系上海富家子弟. 因家庭出身毕业被发配至东北，先是在一中工作，后调至师专数学系. “八九风波”前赴美投奔中学同学，原国民党抗日将领张自忠将军孙子，至今定居美国，冯先生是黑龙江省数学奥林匹克运动首倡者之一，对自己的学生极尽提拔之能事.

冯宝琦先生对他的这位学生十分欣赏，赵女士确实给人以聪明、执着、脱俗之感，她对哥德巴赫猜想和素数个数公式很痴迷，从 1977 年至 1985 年已证明了 8 年，并为此耽误了自己的终身大事，她异常勤奋，做了大量计算，只可惜数学基础仅限于集合论，所以多年苦心求证，写了多稿均未果，笔者曾提供给她若干数论专著，如华罗庚先生的《堆垒素数论》，但她无法读懂，所以只能抛开已有的数学概念与符号另起炉灶，必然是错误多多. 笔者参加了当年的鉴定工作并指出了她所“发现”的素数个数公式之误. 曹珍富、陆子采、吕庆祝先生都指出了其“哥德巴赫猜想”的“证明”之误. 但她与笔者后来所遇到的那些“爱好者”不同. 她的超拔于物质生活之外的精神风貌与对自己热爱事业的执着精神今天也是少有，实在令笔者敬佩. 后来她也到了美国，做家庭服务员，并继续“证明”不停.

在职业数学家“宣称”证明了哥德巴赫猜想的人中最著名的一位应该算是原东北师范大学的教务长张德馨博士，张老 1905 年 3 月生于山东省费县，是东北解放后第一个回到祖国的留洋博士，他 1937 年在德国柏林大学获博士学位，当时解放区报纸在头版发表通栏“欢迎您，张博士”，后任东北大学教务长，是我国数论界的老前辈（虽然 Legendre 在 70 多岁时，才证明了 Fermat 大定理，当 $n =$ Γ时是正确的），并著有《整数论》（1958 年）这样的专著. 他在陈景润成名后，按捺不住，也给出了一个基于大量验证的“证明”，但数值验证决不能等同于证明，因为验证只能对有限数值，而自然数是无穷的，对哥德巴赫猜想来说验证早有人在进行. 皮平（N. Pipping）曾核对了 100 000 以内所有偶数；申懋功核对了 33 000 000以内的所有偶数；勒依时、富勒斯、哈蒙特与洛易（Light. Forres. Hammond and Roe）核对到 100 000 000；而尹定更核对到 500 000 000. 张德馨的“论文”发表在自己主管的《东北师大学报》（自然科学版）上，其理论依据居然是当时一句政治口号“实践是检验真理的惟一标准”，但数学界对“政治数学”和老资

格并不买账，终成笑谈.

第四位证明者叫秦正觉，家住北京北洼路北京无线电厂宿舍楼 2－4－203 室的秦正觉老人，1949 年毕业于上海交通大学航空工程系，后一直服务于空军，据他自己讲："他根本没有接触数学这门行当，特别是对传统数论而言，迄今我简直就是个数论盲".

但他认为：数论盲也有数论盲的"优势"，一张白纸，没有负担，可以沿着自己的思路摸索探寻.

秦先生同其他爱好者一样，都是从 1978 年开始从事"哥德巴赫猜想证明"的.

在开始的两年，他摸索出来所谓的"双余零筛法"，这使他看到了一线希望，从而坚定了证明的决心.

但是在接下来的 8 年里，他开始在余数分布规律的圈子中转悠，没有取得任何进展，但他挫之愈奋，几度灰心，几度奋踹.

后来他又摸索到了用数学归纳法证明哥德巴赫猜想的新路子，这使他又"前进"了一步，1993 年他又发表了"余数区间"这个"新概念"，使他觉得哥氏猜想已尽在掌握之中，于是秦先生于 1996 年将他的证明用中英文整理出来，由光明日报出版社出版.这是一部 42 万字，500 多页的巨著，这部书的出版得益于秦先生的校友.

秦先生 1945 年毕业于重庆南开中学，在那一届校友中，有当今著名数学家——美国加利福尼亚州立北岭大学数学教授、哲学博士林同坡（可惜他是代数学专家对解析数论并没有太多的发言权），林同坡先生为他的专著做了序.

另外张继庆同学长期支持他搞研究，宋卓敏、伍承德在经济上大力帮助他，为之提供出版经费，孙开远为他校对英文稿，他的一位叫马达瑭的同学还为此刻了一方"水滴石穿"的印章，以示庆祝，这些解放前的南开中学毕业生，其理想之高远，友谊之深厚，真令人感慨万千.

遗憾的是这是一场西西弗斯的悲剧，注定要失败，水已滴但石不仅没穿，而且根本没滴到那块石上，当然秦老先生并不介意，他在作者自白中写了一首诗：

我就是，
一支燃烧着的蜡烛；
当然希望：
在哥德巴赫猜想问题上，
发出一点点微弱的亮光.
我早就准备着：
吞下

"瞎子点灯，
白费蜡."
这个十分难咽的苦果，
可以成灰，
但不流泪，
更不后悔！

从以上几个"证明"事件中，第一我们可以看到中国古代那种期待生活中出现落魄公子娶了公主，穷汉捡到狗头金的侥幸心理，已深深植根于我们整个民族内心深处，不论是市井百姓，还是专家学者，这恐怕也是"伪证明"得以大行其道的根源之一.因为你所运用的方法别人也同样会，那为什么别人没有做出来呢？所以此时我们提倡人们自问，我有什么过人之处吗？在解决这个问题的过程中我的长处是什么？这样会在将自己的成果拿出来时"慎重"些.而所谓"业余爱好者"的证明因其所花代价太小，所以无法得到真正有价值的东西，但正因如此小代价大收获的诱惑，证明"屡禁不止".前些年有一位老同志退休后来到北京，跟潘承彪教授（我国哥德巴赫猜想权威之一）说他要搞哥德巴赫猜想，潘承彪劝他最好还是做点别的事，他却说"别的事不太好做"，在陈景润教授去世后几天，这种"证明"热浪又开始掀起.于是《光明日报》在同一天发表了两篇文章，力劝"爱好者"们及时回头.一篇是中科院数学所业务处写的，文章说"著名数学家陈景润院士去世以后，我们数学所收到比以前多得多的来信来稿，声称解决了哥德巴赫猜想.过去我们也曾收到成千上万类似的稿件，但没有一篇是对的，而且绝大多数错误不超出中学数学的常识范围."陈景润在 1988 年出版的《初等数论》的前言中说：一些同志企图用初等数论的方法来解决哥德巴赫猜想及费马大定理等难题，我认为目前几十年内是不可能的，所以希望青年同志们不要误入歧途，浪费自己的宝贵时间和精力.

诗人的浪漫与"俗人"的疯狂

导语：一部好的文学作品既能给人以鼓舞，又能将人引入歧途

记得 1996 年陈景润教授逝世后，我们曾到北京中国科学院数学研究所组稿，希望能尽快出版一本《陈景润传》，接待我们的是当时数学所人事处处长杨莎莎女士，当我们说明来意后，杨处长介绍说：当年在徐迟先生《哥德巴赫猜想》这篇报告文学发表后，在中国引发了一场全民数论热，杨女士说那个年代数学研究所招收的研究生都是最优秀的，报考人数有几千人，今天的许多中青年数

学家都是受了这篇报告文学的影响才进入了数学的殿堂.笔者至今还能清晰地记得当年(1978年)看到这篇报告文学时激动的心情,并由此对数论产生了浓厚的兴趣.在那个整个民族精神振奋,个性解放,崇尚自我奋斗的年代,这篇文章无疑是具有震憾力的,但同时由于徐老的浪漫也使得文章产生了很大的副作用.北大教授金克木在《读书》杂志2000年3月号发表的一篇名为《数学花木兰:李约瑟难题》的文章中指出:

徐迟是诗人,爱好音乐,他是用对待艺术的态度对待科学的,没留意科学是一种特殊的艺术,甚至可以说是反艺术的艺术.因此他的那篇介绍陈景润的报告文学写得漂亮,起了很好很大的作用.但是描述的是数学家,不是数学.他一再引用很少人能懂的数学公式,却没有解释,对一般人必须说明的基本要领,也许因此引发了不少人,甚至有数学界的人,慌忙去证明那个"猜想",使数学研究所的人耗费许多时间去做本无必要的应对.

在徐迟的报告文学中,似乎给人造成了这样一种错觉,似乎陈景润是由一个不知名的小人物一跃而成了大数学家,并且仅靠他自己天才的想法,但实际上完全不是这样.

其实陈景润当时(1966年)发表(1+2)之前已是一位功力深厚的解析数论专家了,他那时已经在著名数学杂志上发表了关于华林问题,Jesmanowicz猜想,圆内整点问题、黎曼猜想、三维除数问题等著名论文17篇.并且在他的关于(1+2)的著名论文中,使用了大量著名数学家的结果与方法,如布伦(V. Brun)、拉代马海尔(H. Redemacher)、埃斯特曼(T. Estermann)、布赫夕塔布(A. A. Buchstab)、孔恩(P. Kuhn)、赛尔伯格(A. Selberg)、林尼克(Yu. V. Linik)、瑞尼(A. Renyi)、巴尔巴恩(M. B. Barban)、庞比尼(E. Bombieri)等等一大批人,可以说陈景润的高度绝不是自身的高度,而是站在前人肩上之后的高度.如今近30年过去了,陈景润已于1996年3月19日撇开他钟爱的数学,撇下他的妻儿骑鹤而去;《哥德巴赫猜想》一文的作者徐迟也撂下他那枝"划过了几十年逝波"的笔,追随陈景润撒手人寰.

1992年《人民日报》发表《光明日报》记者温红彦的文章题为《是正确认识哥德巴赫猜想的时候了》,他写道:

自从1977年报告文学《哥德巴赫猜想》问世后,神州大地不知有多少人向往着摘取那颗灿烂的"明珠",十几年来,全国各地自称证明出哥德巴赫猜想的人数以千计,关于这种报道也时常见诸市井小报甚至一些大报名刊,但最后证实这些全是谬误,十几年来,光是中国科学院数学所就收到约100麻袋这样的论文,但没有一篇论文正确.

江苏南京的一位数学爱好者在给中科院数学研究所的信中这样写到:"过

去我根本不敢碰哥德巴赫猜想，这几年倒来了兴趣，无事可做，搞点有钻头的东西，锻炼脑子也是好的，现在我把我的研究结论寄来，目的当然不是祈望成家，只请你们在备忘录上记一笔，将来有那么一天，出来一个'大权威'，他得出的结论与我的相似，你们可以证明一下，这个结论他不是第一个."

对业余人士的第二种心理分析是他们内心渴望有种崇高感，但正像苛求完美既是造就大师与专家的必要心理条件但同时又是抑郁症等心理疾病存在的基础一样，渴望崇高也是一把双刃剑.它不仅能使有非凡能力的人成为伟人，也能使平凡的人变成丧失理智的偏执狂.这有些像中国的教育走入了心理寄托与转移的误区一样，千百万自己很不甘心默默无闻走完人生大半的家长们把全部希望都寄托在自己的子女身上，即所谓的望子成龙的心理.有太多太多的人平凡又平凡地淹灭在人海中，于是乎悲叹自己竟比不上夏夜的萤火虫在黑夜中尚有一丝自己的光亮.于是他们便开始挖空心思表现自己，或将名字刻到长城的石头上追求永恒，或当追星族，借明星之光照亮自己，而稍稍有点头脑的人便琢磨，如何将自己同世界上公认伟大的、崇高的事联系起来.于是文坛上有了写了几千万字无一变成铅字的被讥为浪费中国字的"文学青年"；有了吟诗百首无一首一人听得懂、看得明白的"朦胧派诗人"；但最难对付的要算"业余数学爱好者"了.他们像练气功走火入魔一样，笃信自己是数学天才，天降解决某个重大猜想之大任于斯.于是整天衣冠不整，神经兮兮，置本职工作于不顾，视妻儿老小如路人，一心一意，昼夜兼程为求得一个所谓"证明"，夜不安寝，食不甘味.

第三种心理是出人头地——这也是人类共有的心理.

数学家虽然绝大多数在为人上是谦虚的，也可以说是与世无争的，但从某种意义上讲又是最争强好胜的.他们总是觉得应该和各个时代的最伟大的数学家竞争，所以他们大搞世界级难题.啃最硬的果，并且对此充满自信.据陈景润的同乡好友、中科院院士林群回忆说："陈景润其实是一位极其好胜的人，他最大的心愿就是打倒当时世界上哥德巴赫猜想方面的最大权威——前苏联的维诺格拉朵夫(Vinogradow Ivan Matveevič)."记得有人在采访美国数学家罗宾逊(Robinson)教授时，当问及"在数学中，是否有某些领域比其他领域更容易使人成名"时，罗宾逊教授说："在数论中，有许多经典的猜想——哥德巴赫猜想、费马猜想等等，任何对此作出贡献的人将立刻成名，因为这些问题非常有名。"很早以前有一位名叫梅里尔(Merrill)的数学家在一本《数学漫谈》的书中剖析了人类的这种情结.他写到："凡属人类，天生有一种崇高的特性，也就是好胜的心理，这种心理，使人探险攀高、赴汤蹈火而不辞……"波兰最著名的数学家巴拿赫(Banach Stefan)也常常用这样一句话不断勉励自己，他说"最重要的是掌握技艺的巨大光荣感——众所周知，数学家的技术有着像诗人作诗一样的秘

诀……"在数学这个行当中,不存在国内领先,亚洲第一,每个定理都必须是世界第一,否则你的论文将不会发表,因为绝没有第二的位置,正所谓"赢家通吃".

而初等数论的爱好者大多都有这种心理,他们认为惟其需要魄力和技巧的艰苦工作,才有诱惑的分量.有些人以为数学家之所以不能证明哥德巴赫猜想,乃是工作太难的缘故,存了这个念头,当然想要自己去解决问题,以便打倒一切数学家,出人头地.总之,一切麻烦都因学识不够,竟不知这对他来说是不可能之事,真是可惜.现在无法证明高峰绝壁不可攀登,探险家仍然继续尝试,将来终有登临之一日,但要凭借初等数学以至大学本科或硕士研究生的功底要想证明哥德巴赫猜想,无疑是想骑自行车到月球上旅行,这时人类的自省力便是遏制这种蠢行的惟一力量.

最后人类还有一个共同的心理弱点——贪财.这些猜想一经证明便可获巨奖.1998年前也就是1908年德国达姆斯塔特(Darmstadt)一位学过数学的大富翁沃尔夫斯凯尔(Paul Wolfskehl)为感谢在他即将自杀之时,费马猜想救了他一命(他原设定在午夜12点执行自杀,但因看一篇德国数学家库默尔(Kummer)写的关于费马猜想的论文错过了时间)决定悬赏10万元马克,奖给第一个证明费马猜想的人,重赏之下必有勇夫,时间从1908年6月27日哥廷根皇家科学协会发表公告,截止到2007年9月13日止.当时盛况空前,"证明"像雪片一样飞到德国哥廷根大学,但没有一个是对的.当年负责审稿工作的施利克汀(F. Schlichting)博士告诉20世纪70年代的人们奖金贬值后仍值1万多马克.他写了一本《费马大定理十三讲》(13 Lectures on Fermat's last Theorem),写信给保罗·里本博瓦姆(Paulo Ribenboim)说:来稿总数没法统计,第一年1907-1908登记3 621份,他说在社会地位方面,寄论文者常常是受过一种专业教育,但事业上失败的人,他们企图以证明Fermat's last theorem找回成功,他将一些稿件交给了诊断严重精神分裂症的医生.

俗语道"太阳底下无新事",其实历史上的任何闹剧都没有什么新意,手法相似,只不过狂妄程度有所不同,证明的"难题"各不相同罢了.

历史使人明鉴,历史有惊人的相似之处,在中国这片大地上出现过许多类似哥德巴赫猜想被"爱好者"证明的事件.我们可以给读者展示一个小小的缩影,即中国历史上的三分角家及方圆家的悲喜剧.这对那些狂热的爱好者及不负责的报刊记者都是值得借鉴的.(见本文集史海钩沉栏)

这些业余人士的存在对社会无益,对本人则是有害,辽宁教育出版社曾出版的一本书《如此人间》中作者思果(是一位老先生)曾这样说:

至于治学成功,我劝世上所有的少女千万不可嫁好学的人.美国发

明家爱迪生新婚之日路过他的试验所，他说要下车去看一看，就不出来了，让他的新娘坐在车子里没有人去理很久很久；史学家顾颉刚的女儿的作文要他看一看，他没有工夫．学问家也不知道有多少这种忽略了家里人的故事，他们一心要研究学问，一切都搁下，没有时间去顾别人．至于外人能利用就尽量利用，——只比在风月场中放荡、吸鸦片、打吗啡、抢银行的好一些，他们其实也是"劫匪"，不过是法律制裁不到而已．

金庸先生也曾谈到他为了写稿子，办《明报》，多次推托不与大儿子谈心交流，最后导致大儿子因一点小事而自杀．

所以我们似乎可以这样劝那些爱好者，为一个真正的证明尚会让人如此误解与不满，那为了一个"伪证明"值得吗？其实对你来说家人与朋友也许更重要．

总想人咬狗

从多起宣称"证明了"哥德巴赫猜想的闹剧中我们可以看到媒体特别是报纸对此起到了推波助澜的作用．究其原因这一方面有很大程度上是源于记者对数学的无知．但这毕竟是可以理解的，因为正如新闻的黄金法则是"狗咬人不是新闻，人咬狗才是新闻"．这种心态是这类业余人士频频出现在报端的根本原因．

谁都无意苛求新闻出版人员有专家般的学识．像周振甫为钱钟书的《管锥编》当责任编辑时所显示出的那种学识水准．但最起码要有一种科学的态度．《纽约时报》的编辑兼记者、科技部主任詹姆斯·格莱克为了写《混沌开创新科学》，采访了大约200位科学家，这种精神是值得新闻工作者学习的．相反有一些新闻工作者仅凭道听途说，凭着一点少得可怜的数学知识，再夹杂着一点好大喜功的心理作用．于是一篇篇攻克世界难题的报道被布之报端，混淆了人们的视听，助长了"爱好者"们不想作长期艰苦努力就想一鸣惊人的投机心理，于科学的普及极为不利．

有时著名数学家在这方面也会犯错误，苏步青先生早年曾在一篇文章中提到什尼列尔曼(Shnirelman)证明哥德巴赫猜想弱形式时说，什尼列尔曼是夜大学生，文章发表于工厂厂报．其实什尼列尔曼并非业余人士而是根红苗正的科班出身，毕业于莫斯科大学．1929年获数学物理博士学位，1933年被选为苏联科学院通讯院士，并任莫斯科大学教授，虽然33岁就去世了，但仍是哥德巴赫猜想方面的大专家之一．

当然这种报导的失误似乎已成为新闻传媒的常见病，不仅在我国有，就是美国著名的《时代》周刊也出现过这样严重失实的报导.

1984 年 2 月 13 日美国《时代》周刊报导了美国桑迪亚国家实验室的数学家们花了 32 小时，解决了一个历经 3 世纪之久的问题；他们找到了梅森（一位法国僧侣 M. Mersenne）数表中最后一个尚未分解的 69 位数 $2^{251}-1$ 的因子，这个 69 位数是：

1222686104398972053177608575506090561429353935989033525802891469459697

它的三个因子是：

178320287214063289511

61676882198695257501367

12070396178249893039969681

我国的《参考消息》同年 2 月 17 日转载了这篇报导，《数学译林》杂志 1984 年 3 期刊登了此消息，此外还有些杂志作了相应的报导（如 1984 年《科学画报》）. 后来我国天津的三位"业余"数学家天津商学院的吴振奎、沈惠平和华北第三设计院的王金月发现这是一篇严重失实的报导. 因为 $2^{251}-1$ 是 76 位数，并且早在 1876 年卢卡斯（Francois-Edouard-Anatole Lucas，1842—1891-10-3，法国数学家）就已经找到了它的一个素因数 503. 1910 年克尼佛姆又找到了另一个素因数 54 217. 所以真实的情况是报导中的数并不是梅森数 M_{251}，即报道中的 132…697 只是梅森数 $2^{251}-1$ 的除去因子 $503\times 54\ 127=27\ 271\ 151$ 外的余因子.

有一种值得注意的倾向是有些"爱好者"已将试图证明猜想改为自己提出猜想，以期与著名猜想那样受到世人瞩目. 但数学圈偏偏又是那样势利. 只注重那些大家提出的问题，因为它有价值的概率大. 而那些小人物往往是人微言轻，不被人重视，这是自然的，因为那些小人物还没有证明自己行，还没有取得说话的资格. 前些年一位毕业于福建师大数学系的成功企业家在《中国青年报》上悬赏一百万人民币求证他自己提出的一个猜想，后来人们发现它与哥德巴赫猜想是等价的.

目前民间许多业余爱好者提出了许多所谓的猜想，有些比较容易否定，有些则暂时无法证明或肯定，因为有一些是与著名的数论猜想具有某种等价性，随之而来的是将极端困难性也传递了过来. 较典型的是，海南省的一位老农民梁定祥在劳动之余提出了一个类似哥德巴赫猜想的猜想.

前几年，一篇关于业余人士宣布证明了费马大定理的报道发表在《科学时报》上，是说中国航空工业总公司退休高级工程师蒋春暄宣布他发现了一种新的数学方法. 用他的话来说，这种方法"具有许多优美的性质，对未来的数学将

产生重大影响"，而证明费马大定理只不过是其中的一个应用而已．按照他的方法，证明费马大定理的论文只需要几页纸，而且也不用新的数论知识．因此他认为这才应当是当年费马所想到的证明，但与怀尔斯的证明不同的是，对蒋春暄来说，目前的尴尬倒不是无人喝彩，而是根本无人理睬．

自从1991年他在现已停刊的《潜科学》发表了他的证明后，只找到了有限的赞同者，但却从未收到过任何公开的来自学术上的反驳．1994年一位数学家曾将蒋春暄发表在《潜科学》的那篇文章写成评论，寄给了美国的《数学评论》，但遭到了拒绝．直到1998年才在一位美国朋友的帮助下发表在《代数，群，几何》上．在报道这件事时，记者借用了一句流行歌曲的歌词："谁能告诉我是对还是错．"这也许是所有业余者的共同遭遇，从漠然和不置可否这点上说，数学家是吝啬和绝情的．

究竟是谁冷漠无情

导语：业余爱好者大多有这样的疑问，为什么我们辛辛苦苦搞出来的东西数学家连看也不愿看，他们真是一群冷漠无情的人吗？

首先是数学家对那些业余人士的"资格"不予认可，中国数学会前任理事长，世界哥德巴赫猜想权威王元教授在一篇写给中学生的关于评论数论经典问题的科普文章中，语重心长地对数论爱好者说：

> 最后我还想说几句说过多次而某些人可能不爱听的话．那就是研究经典的数论问题之前，必须要对整个现代数学有相当的了解与修养，对前人的工作要熟习．在这个基础上认真研究，才可能有效．由于某些报纸的宣传，使一些人误解为解决上述著名数论问题就是研究数论的惟一目的，就是摘下数学皇冠上的明珠，就是为国争光．只要我们能破除迷信，敢于拼搏就可以成功．这就难怪有些人在专攻这些问题之前甚至连大学数学基础课也没有学过，初等数论书没有念过，更不用说对这些问题的历史成果有所了解了．他们往往把一些错误的东西认为正确的东西，以为把问题"解决"了．这样做不仅没有好处，而是很有害的．这些年来，在这方面不知浪费了多少人的宝贵光阴，实在令人痛心，我衷心希望他们从走过的弯路中，认真总结经验，端正看法，有所反思．

再者数学家对业余人士所采用的工具与思想方法不认可．

王元还说，多年来，有些人凭一时的热情欲攻克哥氏猜想，但他们既不了解这个问题80年来的成就，用的工具又原始，所以浪费了宝贵的时间，又干扰了

数学家的工作.

1984年他在国外出版的《哥德巴赫猜想》一书的前言中写道:可以确信,在哥德巴赫猜想的研究中,有待于将来出现一个全新的数学思想.意思实际是说用现有的方法不能解决这个问题.陈景润生前也有同样看法.

这一切又都是数学家本身深知问题难度才如此的.

中国第一批理学博士、曾任南京师大数学系主任的单墫教授专攻数论,曾拜师于王元,功力不可谓不深.但在他为中国青年出版社写的一本小册子《趣味数论》的结尾中写到:本书的作者还必须在此郑重声明,如果哪位数学爱好者坚持要解决这个问题(哥德巴赫猜想和费马猜想)务请他别把解答寄来,因为作者不够资格来判定如此伟大、如此艰难的工作的正确性.

这一声明同样也适用于其他的猜想,许多爱好者关心哥德巴赫猜想和黎曼猜想的研究.所幸的是,前几年中国科学院数学研究所所长杨乐专门在《文汇报》上撰文指出目前国内无人(包括陈景润在内)搞哥德巴赫猜想和黎曼猜想.另外数学所决不受理宣布证明了这几个猜想的论文(大部分论文是各级各类政府官员"推荐"的,在这里数学不承认权力).如不服,可向国外投稿,世界著名数学杂志有200家之多.杨乐先生也指出:

> 由于哥德巴赫猜想非常简洁,稍加解释任何人都能明白它的意思,这使许多业余数学爱好者抱着侥幸的心理,误以为靠一些初等的方法或从哲学的认识角度就可以证明它.他们长年累月地冥思苦索,浪费了大量的时间和精力.他们并不明白哥德巴赫猜想难在何处,也不懂得什么才是严格的数学证明.在现代数学的研究领域,即使是做出很普通的成果,也需要:(1)长期的努力学习,打下良好的基础,达到大学数学系毕业的同等学历;(2)对所研究的领域已有成果、方法和最新文献有较好的掌握;(3)在所研究的课题上下一番功夫.可惜的是,那些自认为解决了哥德巴赫猜想的同志,绝大部分连上面最起码的第一条都不具备.许多同志只是从新闻报刊中了解到哥德巴赫猜想,根本没有认真读过一篇数学文献,甚至连中学数学和微积分都没有学好,显然还不具备数学研究的条件.这些同志无论花多少时间,也绝对不可能解决哥德巴赫猜想,就像用锯子、刨子去造宇宙飞船一样,是不可能成功的,因为缺乏必要的理论基础、工具和手段.希望业余数学爱好者不要再白白耗费时间去做无谓的"探索".

业余人士也能成功

导语：在《骑自行车不能上月球》①（《哈尔滨日报》2000 年 3 月 15 日）这篇文章发表后，许多读者打来电话说："刘老师，您是不是说业余人士一定不能成功？"我说未必．

所谓业余人士分两类，一类是开始从事其他副业或学其他学科，后来转为职业数学家．

外国的如世界概率论权威柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）原来是莫斯科大学学历史的，后来在做毕业论文时发现他所研究的俄国土地契约问题居然有好几个答案，满足不了他那追求惟一性的天性，于是改学数学，终于成为世界概率论权威．

另一位是格罗登迪克（Grothendieck），他 1928 年生于柏林，后在法国的南部长大，没有受过正规教育，也没有读过多少数学方面的书，只是经常独立地思考一些问题，后受迪多涅（Dieudonné）指导，成为大家，形成了自己的一套完整体系，称为"概型论"（Schema），引入"K 理论"，后人惊叹"仿佛来自虚空"．

国内更是如此，20 世纪 80 年代有几位非常引人注目的全国最年青的数学博士导师都是业余开始的，如肖刚——世界著名代数几何专家，开始是学外语的（1977 年 3 月考入江苏师范学院英语专业）；郑伟安——中国著名概率论专家，开始的职业是上海某一街道服务队专做门窗的小木匠；王建磐——现任上海华东师大校长，著名的代数学家，开始是福建某县地方剧团的编剧；时俭益——著名代数学家，原先的工作是华东师大图书馆的古籍部图书馆管理员，但他们最后无一例外都完成了由业余到职业数学家的转变．

也就是说起点可以业余，但终点必须是职业．

第二类是所学专业不是数学，后来从事的工作也与数学无关，这样的人极少成功，但有一位例外，也就是惟一一位获国家自然科学一等奖的非职业数学家陆家羲．陆家羲生于上海一个贫苦市民家庭，父亲是个收入低微的小商贩，母亲没有职业，靠给别人缝洗衣服弥补家计的不足，他是这个家庭的独子，5 岁开始上学，先后在上海正德学校、声扬中学和麦伦中学读书，他十分珍惜父母亲辛劳节俭给他提供的读书机会，从小就勤奋好学，成绩优秀．初中毕业后，因父亲去世家境困窘而中断学业，并到公共汽车五金材料行当徒工．工余时，他仍孜孜

① 为了劝说"业余人士"不要去证明哥德巴赫猜想，笔者曾在 2000 年 3 月 15 日《哈尔滨日报》上作了一篇记者访谈．

不倦地读书自学，立志日后要攀登科学高峰．上海解放后，他考入东北电器工业管理局的统计训练班，短期学习后，于 1952 年 5 月被分派到哈尔滨电机厂生产科从事统计工作，在此期间他自修了高中课程和俄语，并广泛涉猎天文、地理、文学、哲学、伦理学等多方面的知识．1951 年在职考入东北师范大学物理系接受高等教育，1961 年毕业分配到包头钢铁学院担任助教，高校调整时该校下马，他被调入包头市教育系统，先后在包头市教育局教研室、包头 8 中、包头 5 中、包头 24 中以及包头 9 中等校担任物理教师直到逝世．

在哈尔滨电机厂工作期间，一次，他阅读了一本名为《数学方法趣引》的书——这是对他一生有决定意义的一件事，这本书是我国老一辈数学家孙泽瀛编写的数学普及读物，书中所介绍的两个问题——“柯克曼女生问题”和“斯坦纳系列问题”强烈地吸引了他，使他产生了跃跃欲试的愿望，此后，对这两个组合设计问题的追求再也没有同他的生活分开．

但业余研究谈何容易，他承担着繁重的教学任务，为了能在认真完成教学任务的同时再在自己心心思念的两个数学问题上投入力量，他投入了自己所有的业余时间（美国有一个叫柯尔的数学家曾用三年内全部星期天解决了一个重大猜想），他不分昼夜，没有节假日，理发的周期越来越长，饮食越来越简单，就连婚姻大事也一直拖到 37 岁才解决，人们都知道居里夫妇的实验室，即类似马厩，又像马铃薯窖，但他们的艰难程度又怎么能同当时中国知识分子的工作和生活条件相比呢？陆家羲一家 4 口挤在一间 10 多平米的小屋内，这既是卧室，又是厨房和书房，室内仅有一些陈旧的家具和寒酸的衣物，惟一的一张可写字的桌子要给上学的女儿用，他是趴在多处贴补了旧报纸的破土炕上演算着世纪性难题！包头地处边陲，信息闭塞，资料匮乏，为了查阅文献，他除了通过各方面关系与一些高校的图书馆资料室取得联系外，还不时要千里迢迢自费进京，他惟一的业余爱好是欣赏京剧唱段，但是为了提高自己的英语水平，他的京剧唱片换成了英语唱片，他的一切：家庭生活、时间、精力和有限的金钱都完完全全地付给了惟一的目标——攻克难题．

但他的道路十分艰难，在极左思潮泛滥和文革灾难时期，他时常受到一些人的讥笑，说他是“傻子”，有“精神病”；他还被指责为追求名利，不务正业；甚至有一段时间被扣上“不问政治、走白专道路”的帽子，送到干校去集训，接受批判，进行劳动改造，研究成果的不被承认，生活上的窘困，政治上的受压抑，统统压到了他那高度近视的，一足微跛的，饱经沧桑的身体上．但是，他以惊人的顽强挺住了，凭着对事业的追求，凭着振兴中华民族的一颗耿耿爱国之心，他含辛茹苦，百折不挠，终于迎来了胜利的喜悦，他成功了，他的论文在美国《组合数学》上连续发表了 6 篇，得到国内外专家一致好评．

1983 年 10 月武汉召开的中国数学会第四次全国代表大会破例邀请他作为唯一的中学代表并在会上作报告.

1983 年 10 月 30 日晚,他从武汉跑回包头家中,兴奋异常,向他妻子讲了这几个月来的内心的感受:研究成果所受到的重视,国内外学术界给他的赞誉,他自己进一步攻关的打算.他的妻子于事后回忆说:她第一次见到他笑得这样爽朗,这样欢快,是的,他笑了,但是这已是积劳成疾的他的最后笑声,当夜凌晨,他带着成功的喜悦和未竟事业的遗憾溘然长逝了! 他逝世后,他的女儿在"悼念爸爸"的短文中遗憾地写道:"爸爸,您走得这样匆忙,……您前几年提议要照一张全家福,可一直没抽出时间,如今我们只有把这张全家福印在心上了."

由此可见,起点和终点都可以是业余的,但研究方式必须是专业的,而且必须与专业数学家保持联系.

另一个故事发生在文革后期,1969 年 7 月 20 日,美国阿波罗登月计划成功了,全世界各国人民都围坐在电视边怀着兴奋与期待的心情热切注视着人类在月球上漫步,美国总统尼克松发表演说:"全世界都为此欢呼,只有十亿中国人保持沉默",其实在周恩来总理的亲自指挥下,中国科学院北京天文台台长程茂立手下一位青年数学家韩念国,在很短的时间内已完成了对美国阿波罗飞船的轨道计算,使中国能追踪美国这一空前的试验计划,从而能有效地即时观测.

这时,一群从北京到农村安家落户当农民的"老三届"中学生们,经过两年的准备、学习和组织后,于 1969 年 7 月 20 日在北京正式成立中学生现代数学研究小组.以回应尼克松的演讲,他们还决定出版一份刊物《中学生》,作为联系大家思想、学习、研究的媒介与阵地,他们是程汉生、王明、钱涛、张保环、王世林,他们邀请青年数学家韩念国先生作为他们的指导教授.

1969 年,他们全部撒到了农村,王世林、王明、钱涛分别去了山西省山阴、阳高、汾阳,程汉生则落户于京郊怀柔山区,你可以想象在经过了一天繁重的体力劳动后,还有精力去研读数学与物理巨匠们的艰深的著述吗? 恐怕对任何人都是困难的,王明主动要求去干孤独无味的放羊倌而有大量时间读书,程汉生努力争取到中学去教书,脱离繁重体力劳动以便读书.王世林当时身体不好根本无法劳动,只好经常申请回京养病看书学习.钱涛在很长时间边干体力劳动边研读数学,在数学的基本训练期间,他通常是每天清早上工前抄下十道吉米多维奇(Demidovič)数学分析习题,在"汗滴禾下土"的时候冥思苦想,晚上下工回来时都已获得解答,吃完晚饭后,在昏暗的小油灯下验证白天的抽象思想,把习题解答誊写在习题本上.

在 1969 年秋收过后的冬闲,小学者们便迫不及待地匆匆返京聚会,为此程汉生把他仅有的 6 米住房改造为科学讨论会议厅,其实,他的改造工程也不太

复杂，惟一做的事，是把一面墙涂黑作为黑板.

1963 年陈景润证明了"1+2"之后，王明于 1975 年到 1976 年深入学习了这篇论文，在完全看懂之后，他写了一篇总结论文，把陈的论文提炼为十大数学分析技巧，这为他将来的博士论文做了准备.

后来五人小组的成员们都通过考试成为数学研究生，并先后在国内外获得博士学位，从事着数学、统计及计算机科学方面的科研教学或专业性工作.

请让我来告诉你善待数学

导语：美国前总统里根在 1987 年 12 月 24 日写给美国数学会全体会员的贺信中说："今天，在我们即将跨入 21 世纪的时候，数学在商业、工业和政府部门中所直接起到的基本作用已经越来越明显了.我们国家的安全和我们在世界市场中的竞争地位，从来都没有像今天这样依赖于我们使用数学技巧的本领.我知道，这恰恰是你们所准备迎接的挑战."在数学中，既要研究自然的规律，又要编织出优美的演绎模式.最成功的创造必然在这两种倾向之间维持着最大张力；最不令人满意的是那些只在某一方面呈支配之势的作品，如风俗画或纯粹的抽象.

一位数学家说学习数学是为了探索宇宙的奥秘.……，正如文学诱导人们的情感与了解一样，数学则启发人们的想象与推理.

按此理，全社会应该是学数学的人多，但恰恰相反，几年前据哈尔滨工业大学数学系的老师们介绍，在招收基础数学硕士生时经常是报名的比想招的少.

奇怪的是热衷"证明"哥德巴赫猜想的人却越来越多.

可以说今天数学的应用已经渗透到了人类生活的一切领域.

你想保险吗？告诉你保险公司计算保费的精算师是数学家.

你想炒股炒期货吗？告诉你期权定价是数学家定的(为此获诺贝尔经济学奖).

你想当医生吗？告诉你 CT 的原理是数学家提出的.

你想当艺术家吗？告诉你二战期间最大的假画案是数学家裁定的.

你想当文学家吗？告诉你《静静的顿河》的真正作者是数学家用计算机判定的.

你想搞电脑吗？告诉你世界上最大的电脑公司顶尖部门由纯数学家组成.

总之在一切领域当你走到顶尖时都会与数学家相遇.

作为人类社会最重大的运动——战争，更是离不开数学.

事实上，早在二次世界大战期间，不仅有由丹齐格(Dantzig)为首的运筹学家小组发明了解线性规划的单纯算法，使得美军在战略部署中直接受益，还有以霍尔(Marshall Hall)为首的数论与组合数学专家小组则在破译日军电码和赢得太平洋战争的过程中作出了关键性的贡献.这些都使得美国军方十分热衷于资助应用数学的研究，甚至对某些应用前景还不十分明朗的项目，他们也乐于投资.了解了这一点，如果我们再看到一些数学理论方面的论文下面标有诸如“本文部分地承蒙美国陆军(海军或空军)研究局资助”的字样，就不会觉得奇怪了.

但要注意两个倾向，一是数学绝不低层次地应用.

数学家凯泽说过：

> 数学不是算账和计数的技术，正如建筑学不是造砖伐木的技术，绘画不是调色的技术，地质学不是敲碎岩石的技术，解剖学不是屠宰的技术一样.

二是数学不是马上就有用.

台湾社会学家金耀基教授曾介绍过剑桥的一个非常引人深思的趣事，他说：在剑桥，饭后举杯有时会有这么一说：“愿上帝护佑数学，愿它们永不会被任何人所用.”(《剑桥与哥德堡——欧游语丝》书趣文丛第一辑)，另外从事数学研究也是一种生活方式和选择，那就是数学家从证明哥德巴赫猜想中找到了美感，产生了愉悦，摆脱了日常生活的单调与烦闷.即数学家自己找到了一个安度余生的“游戏”.再有一种说法是人们认为的哥德巴赫猜想的求证过程体现了人们对于人类智力极限的不断追求.已故的两次荣获台湾联合报系文学类中篇小说大奖的大陆青年作家王小波，在他的时代三部曲中的《青铜时代》中描写了一个证明费马大定理的故事，其中有一句可圈点的话就是：“证明了费马大定理，就证明了自己是世界上最聪明的人.这种事值得一干.”但如果进一步追问下去，社会为什么会容忍这些人(尽管人数很少)躲在象牙塔中搞这种既不当吃又不当喝的玩艺呢？这就不可避免地涉及数学的应用问题，数学家会申辩说研究哥德巴赫猜想会给数论乃至整个数学的发展产生良性刺激.而人类社会的历史又一再强化着这样一个共识，即数学对人类生活有益，至少是无害.于是一项社会契约达成，从全社会财富中取出一小部分(份额的大小随当权者对数学重要性的认识程度而定)资助那些自诩能搞数学的人去研究，成果归全社会共享，但哪一代人能受益不在契约中规定，全靠天命，而且绝大多数是卯吃寅粮，但我们的追问似乎还可以再进一步，即可问能否说说数学特别是数论和我们的现实世界究竟是怎么发生联系的吗？是什么保证了一定会应用上？

对此我们切不可再追问下去了.因为那样就会走到哲学的领域中，使我们

无法作答.笔者曾和首都师范大学人文学院副院长、青年哲学家刘啸霆先生讨论过这个问题,他告诉我:对任何事物如果追究到五重问号之后必然是个哲学问题,信乎?

最后让我们这样结束这篇长文:首先,我们全社会都应该宽容这些"业余证明者",因为他们毕竟心怀自己的理想,而且一直在努力.

第二,我们要耐心劝他们"迷途知返",过一个更有意义的人生.

第三,要尊重社会分工,让数学家们走自己的路,我们别再瞎掺和了.

第四,或许我们应该用轻松一点的方式去颠覆那些业余者故作深沉的价值观,用搞笑的方式瓦解他们紧绷的斗志,这一点我们真应向美国人民学习,他们调侃一切,在美国纽约第八街地铁车站,有一幅涂鸦:

> $x^n + y^n = z^n$ 没有解
> 对此我已发现一个真正美妙的证明
> 可惜我现在没时间写出来
> 因为我要坐的地铁车正开过来

> The essence of mathematics is the perception of logical relationships between seemingly disparate ideas; the most successful mathematicians are those whose range is widest and whose ability to see analogies and connect ideas is greatest.
>
> ——爱德华

二〇〇五年全国高中数学联合竞赛试题及参考答案、评分标准

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

本题共有 6 题,每小题均给出 A,B,C,D 四个结论,其中有且仅有一个是正确的,请将正确答案的代表字母填在题后的括号内,每小题选对得 6 分;不选、选错或选出的代表字母超过一个(不论是否写在括号内),一律得 0 分.

1. 使关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}\geqslant k$ 有解的实数 k 的最大值是 ( )

A. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}+\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

解 令 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}$, $3\leqslant x\leqslant 6$, 则 $y^2=(x-3)+(6-x)+2\sqrt{(x-3)(6-x)}\leqslant 2[(x-3)+(6-x)]=6$, 所以 $0<y\leqslant\sqrt{6}$, 所以实数 k 的最大值为 $\sqrt{6}$, 选 D.

2. 空间四点 A,B,C,D 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{BC}|=7$, $|\overrightarrow{CD}|=11$, $|\overrightarrow{DA}|=9$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值 ( )

A. 只有一个　　B. 有二个　　C. 有四个　　D. 有无穷多个

解 注意到 $3^2+11^2=130=7^2+9^2$, 由于 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$, 则 $DA^2=\overrightarrow{DA}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2=AB^2+BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})=AB^2-BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})=AB^2-BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$, 即 $2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2+BC^2-AB^2-CD^2=0$, 所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 只有一个值 0, 故选 A.

3. $\triangle ABC$ 内接于单位圆,三个内角 A,B,C 的平分线延长后分别交此圆于 A_1、B_1、C_1, 则 $\dfrac{AA_1\cdot\cos\frac{A}{2}+BB_1\cdot\cos\frac{B}{2}+CC_1\cdot\cos\frac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 的值为 ( )

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

解 如图(1),连 BA_1,则 $AA_1=2\sin(B+\frac{A}{2})=2\sin(\frac{A+B+C}{2}+\frac{B}{2}-\frac{C}{2})=2\cos(\frac{B}{2}-\frac{C}{2})$. 所以 $AA_1\cos\frac{A}{2}=2\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A+B-C}{2}+\cos\frac{A+C-B}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}-C)+\cos(\frac{\pi}{2}-B)=\sin C+\sin B$,同理 $BB_1\cos\frac{B}{2}=\sin A+\sin C$,$CC_1\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B$,所以 $AA_1\cos\frac{A}{2}+BB_1\cos\frac{B}{2}+CC_1\cos\frac{C}{2}=2(\sin A+\sin B+\sin C)$,所以原式 $=\frac{2(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}=2$,故选 A.

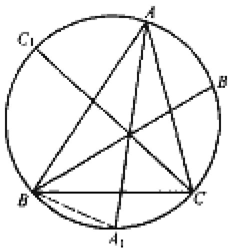


图 1

4. 如图 2,$ABCD-A'B'C'D'$ 为正方体,任作平面 α 与对角线 AC' 垂直,使得 α 与正方体的每个面都有公共点,记这样得到的截面多边形的面积为 S,周长为 l,则 ( )

A. S 为定值,l 不为定值

B. S 不为定值,l 为定值

C. S 与 l 均为定值

D. S 与 l 均不为定值

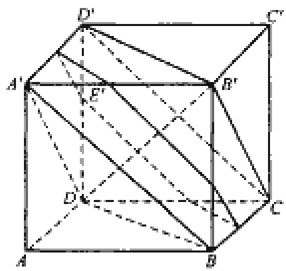


图 2

解 将正方体切去两个正三棱锥 $A-A'BD$ 与 $C'-D'B'C$ 后,得到一个以平行平面 $A'BD$ 与 $D'B'C$ 为上、下底面的几何体 V,V 的每个侧面都是等腰直角三角形,截面多边形 W 的每一条边分别与 V 的底面上的一条边平行,将 V 的侧面沿棱 $A'B'$ 剪开,展平在一张平面上,得到一个 $\square A'B'B_1A_1$,而多边形 W 的周界展开后便成为一条与 $A'A_1$ 平行的线段(如图 3 中 $E'E_1$),显然 $E'E_1=A'A_1$,故 l 为定值.

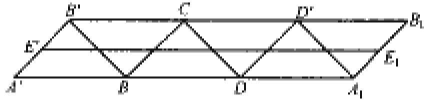


图 3

当 E' 位于 $A'B'$ 中点时，多边形 W 为正六边形，而当 E' 移至 A' 处时，W 为正三角形，易知周长为定值 l 的正六边形与正三角形面积分别为 $\frac{\sqrt{3}}{24}l^2$ 与 $\frac{\sqrt{3}}{36}l^2$，故 S 不为定值，选 B.

5. 方程 $\frac{x^2}{\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}}+\frac{y^2}{\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}}=1$ 表示的曲线是　　(　　)

A. 焦点在 x 轴上的椭圆　　B. 焦点在 x 轴上的双曲线

C. 焦点在 y 轴上的椭圆　　D. 焦点在 y 轴上的双曲线

解　因为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\pi$，所以 $0<\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}<\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2})>\cos(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$，即 $\sin\sqrt{2}>\sin\sqrt{3}$，又 $0<\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\sqrt{3}<\pi$，所以 $\cos\sqrt{2}>0$，$\cos\sqrt{3}<0$，所以 $\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}>0$，方程表示的曲线是椭圆.

因为

$$(\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3})-(\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3})=2\sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}) \tag{1}$$

$-\frac{\pi}{2}<\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}<0$，所以 $\sin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}<0$，$\frac{\pi}{2}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\frac{3\pi}{4}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$，所以 $\sin(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4})>0$，所以式(1) <0.

即 $\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}<\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}$，所以曲线表示焦点在 y 轴上的椭圆，选 C.

6. 记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$M=\left\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}\mid a_i\in T, i=1,2,3,4\right\}$，将 M 中的元素按从大到小的顺序排列，则第 2 005 个数是　　(　　)

A. $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{3}{7^4}$　　B. $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{2}{7^4}$

C. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$　　D. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{3}{7^4}$

解　用 $[a_1a_2\cdots a_k]_p$ 表示 k 位 p 进制数，将集合 M 中的每个数乘以 7^4，得 $M'=\{a_1\cdot 7^3+a_2\cdot 7^2+a_3\cdot 7+a_4\mid a_i\in T, i=1,2,3,4\}=\{[a_1a_2a_3a_4]_7\mid a_i\in T, i=1,2,3,4\}$，$M'$ 中的最大数为 $[6\,666]_7=[2\,400]_{10}$.

在十进制数中，从 2 400 起从大到小顺序排列的第 2 005 个数是 2 400 - 2 004 = 396，而$[396]_{10} = [1\ 104]_7$将此数除以7^4，便得 M 中的数$\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$，故选 C.

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

本题共有 6 小题，要求直接将答案写在横线上.

7. 将关于 x 的多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$ 表为关于 y 的多项式 $g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，其中 $y=x-4$，则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$ $\underline{\quad\frac{5^{21}+1}{6}\quad}$.

解 由题设知，$f(x)$ 和多项式中的各项构成首项为 1，公比为 $-x$ 的等比数列，由等比数列的求和公式，得 $f(x)=\frac{(-x)^{21}-1}{-x-1}=\frac{x^{21}+1}{x+1}$.

令 $x=y+4$，得 $g(y)=\frac{(y+4)^{21}+1}{y+5}$，取 $y=1$，有 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=g(1)=\frac{5^{21}+1}{6}$.

8. 已知 $f(x)$ 是定义在$(0,+\infty)$上的减函数，若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-4a+1)$ 成立，则 a 的取值范围是 $\underline{\quad 0<a<\frac{1}{3}\text{或}1<a<5\quad}$.

解 因为 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上定义，又 $2a^2+a+1=2(a+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}>0$；$3a^2-4a+1=(3a-1)(a-1)$，仅当 $a>1$ 或 $a<\frac{1}{3}$ 时

$$3a^2-4a+1>0 \tag{2}$$

因为 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上是减函数，所以 $2a^2+a+1>3a^2-4a+1\Rightarrow a^2-5a<0$，所以 $0<a<5$，结合(*)知 $0<a<\frac{1}{3}$ 或 $1<a<5$.

9. 设 α、β、γ 满足 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$，则 $\gamma-\alpha=$ $\underline{\quad\frac{4\pi}{3}\quad}$.

解 设 $f(x)=\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)$，由 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=0$ 知，$f(-\alpha)=0$，$f(-\gamma)=0$，$f(-\beta)=0$，即 $\cos(\beta-\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)=-1$，$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma-\beta)=-1$，$\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=-1$，所以 $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\gamma-\beta)=\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{1}{2}$，因为 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，所以 $\beta-\alpha$，$\gamma-\alpha$，$\gamma-\beta\in\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$，又 $\beta-\alpha<\gamma-\alpha$，$\gamma-\beta<\gamma-\alpha$，只有 $\beta-\alpha=\gamma-$

$\beta=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\gamma-\alpha=\frac{4\pi}{3}$.另一方面,当 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\frac{2\pi}{3}$,有 $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$,$\gamma=\alpha+\frac{4\pi}{3}$,$\forall x\in\mathbf{R}$,记 $x+\alpha=\theta$,由于三点$(\cos\theta,\sin\theta)$,$(\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{2\pi}{3}))$,$(\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{4\pi}{3}))$ 构成单位圆 $x^2+y^2=1$ 上正三角形的三个顶点,其中心位于原点,显然有 $\cos\theta+\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})+\cos(\theta+\frac{4\pi}{3})=0$,即 $\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$.

10. 如图 4,四面体 $DABC$ 的体积为$\frac{1}{6}$,且满足 $\angle ACB=45°$,$AD+BC+\frac{AC}{\sqrt{2}}=3$,则 $CD=$<u>$\sqrt{3}$</u>.

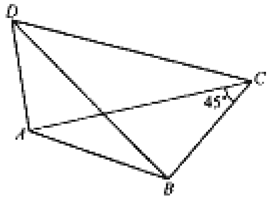


图 4

解　因为 $\frac{1}{3}AD\cdot(\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC\cdot\sin 45°)\geqslant V_{DABC}=\frac{1}{6}$,即 $AD\cdot BC\cdot\frac{AC}{\sqrt{2}}\geqslant 1$,又

$3=AD+BC+\frac{AC}{\sqrt{2}}\geqslant 3\sqrt[3]{AD\cdot BC\cdot\frac{AC}{\sqrt{2}}}\geqslant 3$,

等号当且仅当 $AD=BC=\frac{AC}{\sqrt{2}}=1$ 时成立,这时 $AB=1$,$AD\perp$ 面 ABC,所以 $DC=\sqrt{3}$.

11. 若正方形 $ABCD$ 的一条边在直线 $y=2x-17$ 上,另外两个顶点在抛物线 $y=x^2$ 上,则该正方形面积的最小值为<u>80</u>.

解　设正方形的边 AB 在直线 $y=2x-17$ 上,而位于抛物线上的两个顶点坐标为 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则 CD 所在直线 l 的方程 $y=2x+b$,将直线 l 的方程与抛物线方程联立,得 $x^2=2x+b\Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{b+1}$.

令正方形边长为 a,则

$$a^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=5(x_1-x_2)=20(b+1)\qquad(3)$$

在 $y=2x-17$ 上任取一点$(6,-5)$,它到直线 $y=2x+b$ 的距离为 a,所以

$$a=\frac{|17+b|}{\sqrt{5}}\qquad(4)$$

式(3)、(4)联立解得 $b_1=3$,$b_2=63$,所以 $a^2=80$,或 $a^2=1\ 280$,所以 $a^2_{\min}=80$.

12. 如果自然数 a 的各位数字之和等于7,那么称 a 为"吉祥数",将所有"吉

祥数"从小到大排成一列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$,若 $a_n=2\,005$,则 $a_{5_n}=$ ___52 000___.

解　因为方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=m$ 的非负整数解的个数为 C_{m+k-1}^{m},而使 $x_1\geqslant 1,x_i\geqslant 0(i\geqslant 2)$ 的整数解个数为 C_{m+k-2}^{m-1},现取 $m=7$ 可知,k 位"吉祥数"的个数为 $P(k)=C_{k+5}^{6}$.

因为 2 005 是形如 $2abc$ 的数中最小的一个"吉祥数",且 $P(1)=C_6^6=1$,$P(2)=C_7^6=7$,$P(3)=C_8^6=28$,对于四位"吉祥数" $\overline{1abc}$,其个数为满足 $a+b+c=6$ 的非负整数解个数,即 $C_{6+3-1}^{6}=28$ 个,所以 2 005 是第 $1+7+28+28+1=65$ 个"吉祥数",即 $a_{65}=2\,005$,从而 $n=65.5n=325$. 又 $P(4)=C_9^6=84$,$P(5)=C_{10}^6=210$. 而 $\sum\limits_{k=1}^{5}P(k)=330$. 所以从大到小最后 6 个五位"吉祥数"依次是:70 000,61 000,60 100,60 010,60 001,52 000. 所以第 325 个"吉祥数"是52 000,即 $a_{5n}=52\,000$.

三、解答题(本题满分 60 分,每小题 20 分)

13. 数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_0=1,a_{n+1}=\dfrac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$,$n\in\mathbf{N}$.

证明:(1) 对任意 $n\in\mathbf{N}$,a_n 为正整数;(2) 对任意 $n\in\mathbf{N}$,$a_na_{n+1}-1$ 为完全平方数.

证明　(1) 由题设得 $a_1=5$,且 $\{a_n\}$ 严格单调递增,将条件式变形得 $2a_{n+1}-7a_n=\sqrt{45a_n^2-36}$,两边平方整理得

$$a_{n+1}^2-7a_na_{n+1}+a_n^2+9=0 \tag{5}$$

所以
$$a_n^2-7a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2+9=0 \tag{6}$$

式(5) − 式(6) 得 $(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n)=0$,因为 $a_{n+1}>a_n$,所以

$$a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n=0\Longrightarrow a_{n+1}=7a_n-a_{n-1} \tag{7}$$

由式(7) 及 $a_0=1,a_1=5$ 可知,对任意 $n\in\mathbf{N}$,a_n 为正整数 ……10 分

(2) 按式(5) 两边配方,得 $(a_{n+1}+a_n)^2=9(a_na_{n+1}-1)$,所以

$$a_na_{n+1}-1=\left(\frac{a_{n+1}+a_n}{3}\right)^2 \tag{8}$$

记 $f(n)=a_na_{n+1}-\left(\dfrac{a_na_{n+1}}{3}\right)$,由于 $f(n)-f(n-1)=(a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n)-\left[\left(\dfrac{a_n+a_{n+1}}{3}\right)^2-\left(\dfrac{a_{n-1}+a_n}{3}\right)^2\right]=\dfrac{a_{n-1}-a_{n+1}}{9}(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n)=0$,从而 $f(n)=f(n-1)=\cdots=f(0)=a_0a_1-\left(\dfrac{a_0+a_1}{3}\right)^2=1$,所以式(8) 成立.

所以 $a_na_{n+1}-1$ 是完全平方数. ………………………………………… 20 分

14. 将编号为1,2,⋯,9的9个小球随机放置在圆周的9个等分点上,每个等分点上各有一个小球. 设圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为 S,求使 S 达到最小值的放法的概率(注:如果某种放法,经旋转或镜面反射后可与另一种放法重合,则认为是相同的放法).

解 9个编号不同的小球放在圆周的9个等分点上,每点放一个,相当于9个不同元素在圆周上的一个圆形排列,故共有 8! 种放法,考虑到旋转因素,则本质不同的放法有$\frac{8!}{2}$种. ………………………………………… 5分

下求使 S 达到最小值的放法数:在圆周上,从 1 到 9 有优弧与劣弧两条路径,对其中任一条路径,设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是依次排列于这段弧上的小球号码,则 $|1-x_1|+|x_1-x_2|+\cdots+|x_k-9|\geqslant|(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_k-9)|=|1-9|=8$,上式取等号当且仅当 $1<x_1<x_2<\cdots<x_k<9$,即每一弧段上的小球编号都是由 1 到 9 递增排列.

因此 $S_{最小}=2\cdot 8=16$. ………………………………………… 10分

由上知,当每个弧段上的球号 $\{1,x_1,x_2,\cdots,x_k,9\}$ 确定之后,达到最小值的排序方案便惟一确定.

在1,2,⋯,9中,除1与9外,剩下7个球号2,3,⋯,8,将它们分为两个子集,元素较少的一个子集共有 $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=2^6$ 种情况,每种情况对应着圆周上使 S 值达到最小的惟一排法,即有利事件总数是 2^6 种,故所求概率为

$$P=\frac{2^6}{\frac{8!}{2}}=\frac{1}{315}$$ ………………………… 20分

15. 过抛物线 $y=x^2$ 上的一点 $A(1,1)$ 作抛物线的切线,分别交 x 轴于 D,交 y 轴于 B,点 C 在抛物线上,点 E 在线段 AC 上,满足$\frac{AE}{EC}=\lambda_1$;点 F 在线段 BC 上,满足$\frac{BF}{FC}=\lambda_2$,且 $\lambda_1+\lambda_2=1$,线段 CD 与 EF 交于点 P,当点 C 在抛物线上移动时,求点 P 的轨迹方程(图 5).

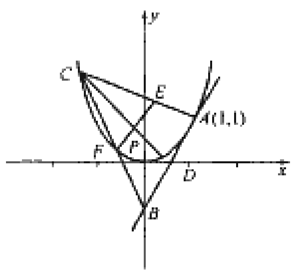


图 5

解一 过抛物线上点 A 的切线斜率为 $y'=2x\Big|_{x=1}=2$,所以切线 AB 的方程为 $y=2x-1$,所以 B,D 的坐标为 $B(0,-1)$,$D(\frac{1}{2},0)$,所以 D 是线段 AB 的中点. ………………………………………… 5分

设 $P(x,y)$，$C(x_0,x_0^2)$，$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，则由 $\dfrac{AE}{EC}=\lambda_1$ 知

$$x_1=\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}\qquad y_1=\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}$$

$$\frac{BE}{FC}=\lambda_2$$

得

$$x_2=\frac{\lambda_2x_0}{1+\lambda_2}\qquad y_2=\frac{-1+\lambda_2x_0^2}{1+\lambda_2}$$

所以 EF 所在直线方程为

$$\frac{y-\dfrac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}}{\dfrac{-1+\lambda_2x_0^2}{1+\lambda_2}-\dfrac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}}=\frac{x-\dfrac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}}{\dfrac{\lambda_2x_0}{1+\lambda_2}-\dfrac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}}$$

化简得

$$[(\lambda_2-\lambda_1)x_0-(1+\lambda_2)]y=[(\lambda_2-\lambda_1)x_0^2-3]x+1+x_0-\lambda_2x_0^2\quad(10)$$

…………………………………………………………………………………………… 10 分

当 $x_0\neq\dfrac{1}{2}$ 时，直线 CD 的方程为

$$y=\frac{2x_0^2x-x_0^2}{2x_0-1}\quad(11)$$

联立式(10)、(11)，解得 $\begin{cases}x=\dfrac{x_0+1}{3}\\ y=\dfrac{x_0^2}{3}\end{cases}$，消去 x_0，得 P 点轨迹方程为

$$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2$$ …………………………… 15 分

当 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 时，EF 方程为 $-\dfrac{3}{2}y=(\dfrac{1}{4}\lambda_2-\dfrac{1}{4}\lambda_1-3)x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}\lambda_2$，$CD$ 方程为 $x=\dfrac{1}{2}$，联立解得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{12}\end{cases}$，也在 P 点轨迹上，因 C 与 A 不能重合，所以 $x_0\neq1$，所以 $x\neq\dfrac{2}{3}$。

所以所求轨迹方程为

$$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2\qquad x\neq\frac{2}{3}$$ …………………… 20 分

解二　由解一知，AB 的方程为 $y=2x-1$，$B(0,-1)$，$D(\dfrac{1}{2},0)$，故 D 是

AB 的中点. …………………………………………………… 5 分

令 $\gamma = \frac{CD}{CP}, t_1 = \frac{CA}{CE} = 1 + \lambda_1, t_2 = \frac{CB}{CF} = 1 + \lambda_2$,则 $t_1 + t_2 = 3$,因 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线,所以 $S_{\triangle CAB} = 2S_{\triangle CAD} = 2S_{CBD}$.

而 $\frac{1}{t_1 t_2} = \frac{CE \cdot CF}{CA \cdot CB} = \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}} = \frac{S_{\triangle CEP}}{2S_{\triangle CAD}} + \frac{S_{\triangle CFP}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1\gamma} + \frac{1}{t_2\gamma}\right) = \frac{t_1 + t_2}{2t_1 t_2 \gamma} = \frac{3}{2t_1 t_2 \gamma}$,所以 $\gamma = \frac{3}{2}$,所以 P 是 $\triangle ABC$ 的重心. ……………… 10 分

设 $P(x, y), C(x_0, x_0^2)$,因点 C 异于点 A,则 $x_0 \neq 1$,故重心 P 的坐标为 $x = \frac{0 + 1 + x_0}{3} = \frac{1 + x_0}{3}\left(x \neq \frac{2}{3}\right), y = \frac{-1 + 1 + x_0^2}{3} = \frac{x_0^2}{3}$,消去 x_0,得 $y = \frac{1}{3}(3x - 1)^2$.

故所求轨迹方程为 $y = \frac{1}{3}(3x - 1)^2\left(x \neq \frac{2}{3}\right)$. ……………… 20 分

If you wish to learn swimming, you have to go into the water, and if you wish to become a problem solver, you have to solve problems.

—— 波利亚

二〇〇五年全国高中数学联合竞赛加试试题及参考答案

一、(本题满分 50 分)

如图 1,在 $\triangle ABC$ 中,设 $AB > AC$,过 A 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 l,又以 A 为圆心,AC 为半径作圆分别交线段 AB 于 D,交直线 l 于 E、F.

证明:直线 DE、DF 分别通过 $\triangle ABC$ 的内心与一个旁心.

(注:与三角形的一边及另两边的延长线均相切的圆称为三角形的旁切圆,旁切圆的圆心称为旁心.)

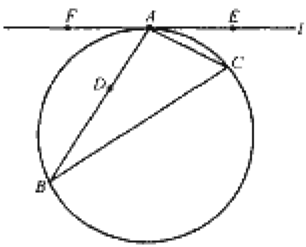


图 1

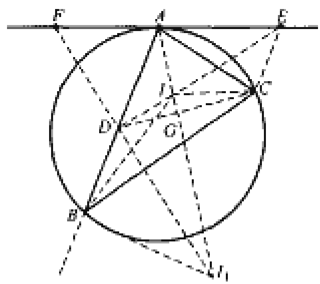


图 2

证明 (1) 先证 DE 过 $\triangle ABC$ 的内心.

如图 2,连 DE,DC,作 $\angle BAC$ 的平分线分别交 DE 于 I、DC 于 G,连 IC,则由 $AD = AC$,得 $AG \perp DC$,$ID = IC$.

又 D, C, E 在 $\odot A$ 上,所以 $\angle IAC = \frac{1}{2}\angle DAC = \angle IEC$,所以 A, I, C, E 四点共圆,所以 $\angle CIE = \angle CAE = \angle ABC$,而 $\angle CIE = 2\angle ICD$,所以 $\angle ICD =$

$\frac{1}{2}\angle ABC$，所以 $\angle AIC = \angle IGC + \angle ICG = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC$，所以 $\angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB$，所以 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

(2) 再证 DF 为 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

连 FD 并延长交 $\angle ABC$ 的外角平分线于 I_1，连 II_1，BI_1，BI，由(1)知，I 为内心，所以 $\angle IBI_1 = 90° = \angle BDI_1$，所以 D，B，I_1，I 四点共圆，因为 $\angle BII_1 = \angle BDI_1 = 90° - \angle ADI = (\frac{1}{2}\angle BAC + \angle ADG) - \angle ADI = \frac{1}{2}\angle BAC + \angle IDG$，所以 A、I、I_1 共线. 所以 I_1 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边外的旁心.

二、(本题满分 50 分)

设正数 a,b,c,x,y,z 满足 $cy + bz = a$；$az + cx = b$；$bx + ay = c$，求函数 $f(x,y,z) = \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z}$ 的最小值.

解　由条件得，$b(az + cx - b) + c(bx + ay - c) - a(cy + bz - a) = 0$，即 $2bcx + a^2 - b^2 - c^2 = 0$，所以 $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$，同理得 $y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$，$z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

因为 a,b,c,x,y,z 为正数，据以上三式知，$b^2 + c^2 > a^2$，$a^2 + c^2 > b^2$，$a^2 + b^2 > c^2$，故以 a,b,c 为边长，可构成一个锐角三角形 ABC，所以 $x = \cos A$，$y = \cos B$，$z = \cos C$，问题转化为：在锐角 $\triangle ABC$ 中，求函数 $f(\cos A, \cos B, \cos C) = \frac{\cos^2 A}{1 + \cos A} + \frac{\cos^2 B}{1 + \cos B} + \frac{\cos^2 C}{1 + \cos C}$ 的最小值.

令 $u = \cot A$，$v = \cot B$，$w = \cot C$，则 $u,v,w \in \mathbf{R}^+$. $uv + vw + wu = 1$，且 $u^2 + 1 = (u + v)(u + w)$，$v^2 + 1 = (u + v)(v + w)$，$w^2 + 1 = (u + w)(v + w)$.

所以
$$\frac{\cos^2 A}{1 + \cos A} = \frac{\frac{u^2}{u^2+1}}{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}} = \frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}(\sqrt{u^2+1} + u)} =$$
$$\frac{u^2(\sqrt{u^2+1} - u)}{\sqrt{u^2+1}} = u^2 - \frac{u^3}{\sqrt{u^2+1}} =$$
$$u^2 - \frac{u^3}{\sqrt{(u+v)(u+w)}} \geqslant u^2 - \frac{u^3}{2}\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{u+w}\right)$$

同理
$$\frac{\cos^2 B}{1 + \cos B} \geqslant v^2 - \frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{v+w}\right)$$

$$\frac{\cos^2 C}{1+\cos C} \geqslant w^2 - \frac{w^3}{2}\left(\frac{1}{u+w}+\frac{1}{v+w}\right)$$

所以$f \geqslant u^2+v^2+w^2-\frac{1}{2}\left(\frac{u^3+v^3}{u+v}+\frac{v^3+w^3}{v+w}+\frac{u^3+w^3}{u+w}\right)=u^2+v^2+w^2-\frac{1}{2}[(u^2-uv+v^2)+(v^2-vw+w^2)+(u^2-uw+w^2)]=\frac{1}{2}(uv+vw+uw)=\frac{1}{2}$(取等号当且仅当$u=v=w$,此时,$a=b=c,x=y=z=\frac{1}{2}$),所以$[f(x,y,z)]_{\min}=\frac{1}{2}$.

三、(本题满分 50 分)

对每个正整数 n,定义函数 $f(n)=\begin{cases}0 & 当 n 为平方数\\ \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right] & 当 n 不为平方数\end{cases}$

(其中$[x]$表示不超过x的最大整数,$\{x\}=x-[x]$),试求:$\sum\limits_{k=1}^{240} f(k)$的值.

解 对任意$a,k\in \mathbf{N}^*$.若$k^2<a<(k+1)^2$,则$1\leqslant a-k^2\leqslant 2k$,设 $=k+\theta,0<\theta<1$,则$\frac{1}{\{\sqrt{a}\}}=\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\sqrt{a}-k}=\frac{\sqrt{a}+k}{a-k^2}=\frac{2k+\theta}{a-k^2}<\frac{2k}{a-k^2}+1$,所以$\left[\frac{1}{\{\sqrt{a}\}}\right]=\left[\frac{2k}{a-k^2}\right]$,让 a 跑遍区间$(k^2,(k+1)^2)$中的所有整数,则$\sum\limits_{k^2<a<(k+1)^2}\left[\frac{1}{\{a\}}\right]=\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]$,于是

$$\sum_{a=1}^{(n+1)^2} f(a)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right] \tag{11}$$

下面计算$\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]$:画一张$2k\times 2k$的表,第$i$行中,凡是$i$的倍数处填写"*"号,则这行的"*"号共$\left[\frac{2k}{i}\right]$个,全表的"*"号共$\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]$个;另一方面,按列收集"*"号数:第$j$列中,若$j$有$T(j)$个正因数,则该列便有$T(j)$个"*"号,故全表的"*"号个数共$\sum\limits_{j=1}^{2k}T(j)$个,因此$\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right]=\sum\limits_{j=1}^{2k}T(j)$.

示例如下:

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	*	*	*	*	*	*
2		*		*		*
3			*			*
4				*		
5					*	
6						*

则
$$\sum_{a=1}^{(n+1)^2} f(a) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2k} T(j) = n[T(1)+T(2)] + (n-1)[T(3)+T(4)] + \cdots + [T(2n-1)+T(2n)] \tag{2}$$

由此
$$\sum_{k=1}^{16^2} f(k) = \sum_{k=1}^{15}(16-k)[T(2k-1)+T(2k)] \tag{3}$$

记 $a_k = T(2k-1)+T(2k), k=1,2,\cdots,15$，易得 a_k 的取值情况如下：

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k	3	5	6	6	7	8	6	9	8	8	8	10	7	10	10

因此
$$\sum_{k=1}^{256} f(k) = \sum_{k=1}^{15}(16-k)a_k = 783 \tag{4}$$

据定义 $$f(256) = f(16^2) = 0$$

又当 $k \in \{241,242,\cdots,255\}$，设
$$k = 15^2 + r \qquad 16 \leqslant r \leqslant 30$$

$$\sqrt{k} - 15 = \sqrt{15^2+r} - 15 = \frac{r}{\sqrt{15^2+r}+15}, \frac{r}{31} < \frac{r}{\sqrt{15^2+r}+15} < \frac{r}{30}$$

$$1 \leqslant \frac{30}{r} < \frac{1}{\{\sqrt{15^2+r}\}} < \frac{31}{r} < 2$$

则
$$\left[\frac{1}{\{\sqrt{k}\}}\right] = 1 \qquad k \in \{241,242,\cdots,255\} \tag{5}$$

从则
$$\sum_{k=1}^{240} f(k) = 783 - \sum_{k=241}^{256} f(k) = 783 - 15 = 768$$

二〇〇五年黑龙江省全国高中数学联合竞赛预赛试题及部分答案、评分标准[①]

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=2\}$,$B=\{(x,y)\mid x^2=y^2\}$,若定义 $M-N=\{x\mid x\in M$,且 $x\notin N\}$,则 $A-B=$ (　　)

A. $\{(x,y)\mid x^2+y^2=2,x\leqslant 0\}$　　B. $\{(x,y)\mid x^2+y^2=2,y\leqslant 0\}$

C. $\{(x,y)\mid x^2+y^2=2,x^2=1\}$　　D. $\{(x,y)\mid x^2+y^2=2,x^2\neq 1\}$

2. 若函数 $f(x)=\tan(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6},0)$ 对称,则实数 ω 的值可以是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E,F 分别是棱 BB_1 与 A_1D_1 的中点,点 G 在棱 DD_1 上,$DG=3GD_1$,则 AE 与 FG 所成角的余弦值为 (　　)

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{1}{10}$　　D. $\frac{1}{10}$

4. 已知圆 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后与原图形关于直线 $x+y=1$ 对称,则向量 $\boldsymbol{a}$ 为(　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,-1)$

C. $(-4,-4)$　　D. $(4,4)$

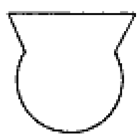
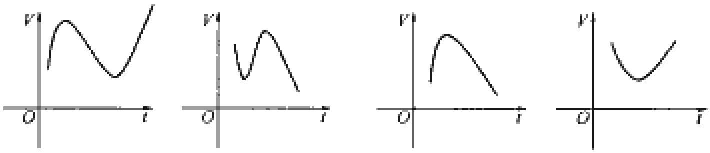


图1

5. 如图1,有一空容器,现在匀速向其内部注水.设水面升高的速度为 v,时间为 t,则 v 与 t 的关系大

① 本文由黑龙江省教育学院吴丽华教研员提供.

致为 （　　）



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

6. 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式分别为 $a_n = n^2 + 1$，$b_n = 2^n + 1$，$n \in \mathbf{N}^*$，那么这两个数列中序号与数值均相同的项的个数为 （　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

7. 下列命题

① 与两条异面直线都相交的两条直线是异面直线；

② a，b 是两条异面直线，过不在直线 a，b 上的空间一点 P 有且只有一个平面与 a，b 都平行；

③ 过一点与一个平面垂直的直线有且只有一条；

④ 一个平面的两条斜线段长度相等，它们在该平面内的射影长也相等.

其中正确命题的个数有 （　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

8. 已知曲线$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$及$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$有相同的焦距（$a > b > 0$），则 （　　）

A. $\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$ 可能为双曲线

B. $\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$ 一定是椭圆

C. $\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$ 可能是一对平行直线

D. $k = 0$

9. 已知球 O 的半径为 1，A，B，C 三点都在球面上，其中 A，B 两点间的球面距离为$\frac{\pi}{3}$，A，C 两点及 B，C 两点间的球面距离均为$\frac{\pi}{2}$，则球心 O 到平面 ABC 的距离为 （　　）

A. $\frac{\sqrt{21}}{21}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{14}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

10. 三条直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$，$A_2x + B_2y + C_2 = 0$，$A_3x + B_3y + C_3 = 0$ 两两相交，有 3 个不同的交点，则下列命题中错误的一个是 （　　）

A. $(A_1B_2-A_2B_1)(A_1B_3-A_3B_1)(A_2B_3-A_3B_2)\neq 0$

B. $(A_1^2+A_2^2)(A_1^2+A_3^2)(A_2^2+A_3^2)\neq 0$

C. $(A_1+A_2+A_3)(B_1+B_2+B_3)(C_1+C_2+C_3)\neq 0$

D. $C_1^2+C_2^2+C_3^2\neq 0$

11. 设$(1+x)^{2\,005}=a_{2\,005}x^{2\,005}+a_{2\,004}x^{2\,004}+\cdots+a_1x+a_0$,则$2\,005a_{2\,005}-2\,004a_{2\,004}+2\,003a_{2\,003}-2\,002a_{2\,002}+\cdots-2a_2+a_1$的值为 (   )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

12. 圆 O 的圆心是$O(3,2)$,圆上到直线$3x-4y=a$的距离为$1-a$的点恰有 2 个,则此圆的半径 r 满足 (   )

A. $\frac{4(1-a)}{5}<r<\frac{6}{5}(1-a)$

B. $r>\frac{6}{5}(1-a)$ 或 $r<\frac{4(1-a)}{5}$

C. r 为任意正实数

D. $r=\frac{6}{5}(1-a)$ 或 $r=\frac{4(1-a)}{5}$

第 Ⅱ 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

13. 已知$f(x)+2f(\frac{1}{x})=x^2$,则$f(x)=$________.

14. 用0到9这10个数字组成没有重复数字的4位数,则所有这些4位数中能被5整除的共有________个.

15. 已知$p>q>0$,则$p^2+\frac{4}{(p-q)q}$的最小值是________.

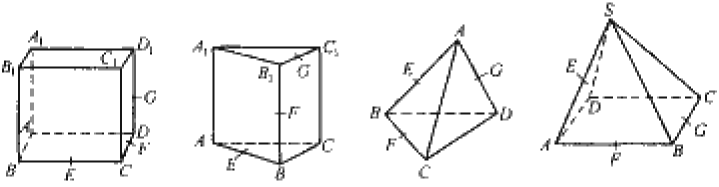
16. 如图 2 所示,下列几何体分别为正方体、正三棱柱、正三棱锥、正四棱锥,点 E,F,G 分别为所在棱的中点,则过点 E,F,G 的截面图形是五边形的几何体有________(写出所有符合要求的几何体的编号).

以上试题答案略.

三、解答题:本大题共6小题,共74分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (本大题满分 12 分)

如图3所示,$\triangle PAB$是等边三角形,四边形$ABCD$是正方形,平面$PAB\perp$平面$ABCD$,点 M,N 分别为PD,BC的中点.



① ② ③ ④

图 2

(1) 求证 $PD \perp$ 平面 AMN;

(2) 求二面角 $M-AN-D$ 的大小.

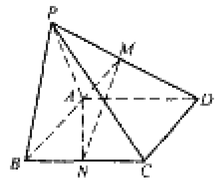


图 3

解 过 P 作 $PE \perp AB$ 交 AB 于 E,因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$. ………………………… 2 分

过 E 在平面 $ABCD$ 内作 $EF /\!/ BC$ 交 CD 于 E,以 E 为原点建立如图 4 所示的直角坐标系.

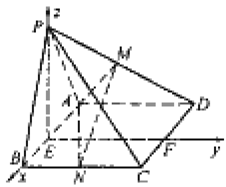


图 4

(1) 证明:不妨设 $EB=1$,则 $P(0,0,\sqrt{3})$,$A(-1,0,0)$,$N(1,1,0)$,$D(1,2,0)$,由 $PM=MD$,得 $M(-\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2})$,于是 $\overline{EP}=(0,0,\sqrt{3})$,$\overline{DP}=(1,-2,\sqrt{3})$,$\overline{AM}=(\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2})$,$\overline{AN}=(2,1,0)$ ……………… 4 分

因为 $\overline{DP}\cdot\overline{AM}=1\times\frac{1}{2}+(-2)\times1+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$,$\overline{DP}\cdot\overline{AN}=1\times2+(-2)\times1+\sqrt{3}\times0=0$,所以 $DP\perp AM$,$DP\perp AN$,所以 $PD\perp$ 平面 AMN.
…………………………………………………………………………………… 6 分

(2) 解:$\cos<\overline{EP},\overline{DP}>=\frac{\overline{EP}\cdot\overline{DP}}{|\overline{EP}||\overline{DP}|}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ ………………………… 10 分

因为 $EP\perp$ 平面 $ABCD$,$DP\perp$ 平面 AMN,$\overline{EP}$,$\overline{DP}$ 分别为平面 $ABCD$,平面 AMN 的法向量,所以二面角 $M-AN-D$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$. ……………… 12 分

18.（本大题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{\sin 3x-2\sin^3 x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$，求：

(1)$f(x)$ 的定义域；

(2)$f(x)$ 的值域.

解 (1) 由已知：令 $1+\sin 2x-\cos 2x\neq 0$，则

$$\cos 2x-\sin 2x\neq 1$$

即

$$\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})\neq 1$$

所以

$$\cos(2x+\frac{\pi}{4})\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以

$$2x+\frac{\pi}{4}\neq 2k\pi\pm\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$$

所以

$$x\neq k\pi,\text{且 } x\neq k\pi-\frac{\pi}{4},(k\in\mathbf{Z})$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,\text{且 } x\neq k\pi-\frac{\pi}{4},(k\in\mathbf{Z})\}$ …… 4 分

(2) 因为 $f(x)=\dfrac{\sin 3x-2\sin^3 x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\dfrac{\sin(2x+x)-2\sin^3 x}{\sin 2x+2\sin^2 x}=$

$$\frac{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x-2\sin^3 x}{2\sin x\cos x+2\sin^2 x}=$$

$$\frac{2\sin x\cos^2 x+\cos 2x\sin x-2\sin^3 x}{2\sin x(\cos x+\sin x)}=$$

$$\frac{2\cos^2 x+\cos 2x-2\sin^2 x}{2(\cos x+\sin x)}=\frac{3(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2(\cos x+\sin x)}=$$

$$\frac{3}{2}(\cos x-\sin x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)$$ …………… 10 分

所以

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

又 $x\neq k\pi$，且 $x\neq k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $f(x)$ 的值域为

$$\left\{y\mid -\frac{3\sqrt{2}}{2}<y<\frac{3\sqrt{2}}{2},y\neq\pm\frac{3}{2}\right\}$$ ……………… 12 分

19.（本大题满分 12 分）

已知曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{2+a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与 $C_2:\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点连线为正方形，曲线 C_1 的焦点 F 到曲线 C_2 的渐近线的距离 a. $\overline{FP}$ 与 $\overline{QF}$ 共线，$\overline{FM}$ 与 $\overline{NF}$ 共线，$\overline{FM}\cdot\overline{FQ}=0$. 若 P,Q,M,N 4个点都在曲线 C_2 上，试求直线 FP 的斜率的取值范围.

解　由已知得$\begin{cases}2+a^2<b^2<b^2+a^2\\ c=\dfrac{b\sqrt{2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

注意到 $a>0,b>0$,解得 $a=b=1$. ………………………………… 4分

则曲线 C_2 的方程为 $y^2-x^2=1$,焦点 F 的坐标为$(-\sqrt{2},0)$,或$(\sqrt{2},0)$.

由对称性不妨设 F 的坐标为$(-\sqrt{2},0)$.

由所给向量条件知 $MN\perp PQ$,再由点 P,Q,M,N 在双曲线$y^2-x^2=1$上,且 PQ 与 MN 交于点 F,可知 MN,PQ 的斜率都存在(否则 PQ 与 MN 中将有一条与双曲线不相交).

设 FP 的斜率为 k,则 FM 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$,此时 FP 的方程为

$$y=kx+k\sqrt{2}$$ ………………………………… 6分

代人双曲线方程得

$$(k^2-1)x^2+2\sqrt{2}k^2x+2k^2-1=0$$

由于 FP 与双曲线交于两点,因此有

$$\begin{cases}(2\sqrt{2}k^2)^2-4(2k^2-1)(k^2-1)>0\\ k^2-1\neq 0\end{cases}$$

化简得
$$\begin{cases}3k^2>1\\ k^2\neq 1\end{cases}$$ ………………………………… 8分

注意到 PF 与 MN 具有相同的性质,同理可得

$$\begin{cases}3\dfrac{1}{k^2}>1\\ \dfrac{1}{k^2}\neq 1\end{cases}$$ 10分

综上可得
$$\begin{cases}k^2\neq 1\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}<|k|<\sqrt{3}\end{cases}$$

所以 FP 的斜率 k 的取值范围是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<|k|<\sqrt{3}$,且 $|k|\neq 1$.

即 $-\sqrt{3}<k<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,或$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<k<\sqrt{3}$,且 $k\neq\pm 1$. ………………………… 12分

20.(本大题满分 12 分)

试构造一个定义在$(0,+\infty)$上的连续函数 $f(x)$,使其满足 $f(1)=1$;$f(n)=\dfrac{1}{4}[f(1)+f(2)+\cdots+f(n+1)]$,$n\in\mathbf{N}^*$.

解　假设存在一个定义在$(0,+\infty)$上的连续函数$f(x)$，使其满足$f(1)=1$

$$f(n)=\frac{1}{4}[f(1)+f(2)+\cdots+f(n+1)]\qquad n\in\mathbf{N}^*$$

则令$n=1$有$4f(1)=f(1)+f(2)$，解得$f(2)=3$ ………………… 2分

因为
$$f(n)=\frac{1}{4}[f(1)+f(2)+\cdots+f(n+1)]$$
所以
$$4f(n)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n+1)$$
所以
$$4(f(n+1)-f(n))=f(n+2)$$
即
$$f(n+2)=4[f(n+1)-f(n)]$$
所以
$$f(n+2)-2f(n+1)=2[f(n+1)-2f(n)]$$
所以
$$f(n+1)-2f(n)=[f(2)-2f(1)]2^{n-1}=2^{n-1}$$
故
$$f(n+1)=2f(n)+2^{n-1}$$ ………………… 6分

所以
$$f(n)=2f(n-1)+2^{n-2}=2[2f(n-2)+2^{n-3}]+2^{n-2}=$$
$$2^2f(n-2)+2\cdot2^{n-2}=2^3f(n-3)+3\cdot2^{n-2}=\cdots=$$
$$2^{n-1}f(1)+(n-1)\cdot2^{n-2}=\frac{n+1}{4}\cdot2^n$$ ………………… 11分

综上，存在函数$f(x)=\frac{x+1}{4}2^x\ (x\in(0,+\infty))$符合题意. ………… 12分

（注：因解法及解题步骤的差异可按采分段予以酌情给分.）

21.（本大题满分12分）

有甲、乙、丙三个城市，其中乙在甲与丙之间的连线上，与两者相距都是10 km. 现欲在三个城市之间建一超市，从超市至各城市有免费班车接送顾客. 如果距离以公里计，成本以百元计，超市班车到三个城市的运营成本为：到甲为超市距甲的距离平方，到乙为超市距乙距离的4倍，到丙为超市距丙距离的2倍，为使超市班车到三个城市的运营成本之和最低，超市应设在何处？

解　(1) 若超市设在甲与乙之间，如图5设甲与超市距离为x，则这时总运营成本为

$$x^2+4(10-x)+2(20-x)=x^2-6x+80$$

3分

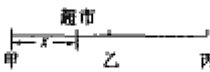


图5

因为
$$x^2-6x+80=(x-3)^2+71,\ x\in[0,10]$$
所以运营成本最小为71，这时超市在甲与乙之间距甲3公里. ………… 5分

(2) 若超市设在乙与丙之间，如图6设丙与超市距离为x，则这时总运营成本为

$$2x+4(10-x)+(20-x)^2=x^2-42x+440$$

………………………………………… 3分

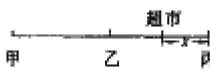


图6

因为$y=x^2-42x+440=(x-21)^2-1$，在$[0,10]$上为减函数，所以运营

成本最小为 120,这时超市在乙处. ………………………… 10 分

综上,超市宜建在甲与乙之间,距离甲 3 公里处. ………………… 12 分

22.(本大题满分 14 分)

已知 $f(x)=ax^3-3ax^2+b(a>0)$ 在 $[-2,3]$ 上的最大值为 $\dfrac{\pi}{\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{7}{9}}$,最小值为 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{-x^4+4x^3+48x-192}{x^2-7x+12}$,求 a 与 b 的值.

解 因为 $\tan(\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{7}{9})=\dfrac{\tan(\arctan\frac{1}{8})+\tan(\arctan\frac{7}{9})}{1-\tan(\arctan\frac{1}{8})\tan(\arctan\frac{7}{9})}=$

$$\frac{\frac{1}{8}+\frac{7}{9}}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{9}}=1$$ ………………… 3 分

故 $\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{7}{9}=\frac{\pi}{4}$,从而 $\dfrac{\pi}{\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{7}{9}}=4$ ………………… 4 分

下面计算极限

$$\lim_{x\to4}\frac{-x^4+4x^3+48x-192}{x^2-7x+12}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(-x^3+48)}{(x-3)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{-x^3+48}{x-3}=-16$$

………………………………………………………………… 7 分

对 $f(x)$ 有:$f'(x)=3ax^2-6ax=0$ ………………………………… 9 分

解得:$x=0$ 或 $x=2$,计算 $f(x)$ 在 $x=0,2,-2,3$ 点的值有

$f(0)=b\quad f(2)=-4a+b\quad f(3)=b\quad f(-2)=-20a+b$ …

…………………………………………………………………… 11 分

这样 $f(x)$ 在[2,3]上的最大值为 b,最小值为 $-20a+b$,由此

$$\begin{cases}b=4\\-20a+b=-16\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$$ ………………………………… 14 分

二〇〇五年河南省数学竞赛试题及参考答案①（高中二年级）

一、选择题(本题满分30分,每小题5分)

1. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点.若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,则下列向量中与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的向量是 (A)

A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

解　容易计算 $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,所以选A.

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,S_n 是前 n 项和,且 $S_3=S_8$,$S_7=S_K$,则 K 为 (C)

A. 2　　B. 11　　C. 4　　D. 12

解　$-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\cdots$ 符合条件,所以 $k=4$,所以选C.

3. 点 P 在直线 $y=x+2$ 上运动,点 $A(2,2)$,$B(6,6)$,满足 $\angle APB$ 取得最大值,则点 P 的坐标是 (D)

A. (0,2)　　B. (1,3)　　C. (2,4)　　D. (3,5)

解　由图象可知:经过 A,B 且和直线相切的切点即为点 P,所以点 P 坐标为(3,5),所以选D.

4. 已知 $1+2\times3+3\times3^2+4\times3^3+\cdots+n\times3^{n-1}=3^n(na-b)+c$,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立,那么 a,b,c 的值为 (C)

A. $a=0,b=c=\frac{1}{4}$　　B. $a=b=c=\frac{1}{4}$

① 本文由河南省实验中学王慧兰提供.

C. $a=\frac{1}{2}, b=c=\frac{1}{4}$　　　　D. 不存在这样的 a, b, c

解　利用等比数列求和可以求出原式左边等于 $3^n\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$，所以选 C.

5. 已知 $f(x)$ 是 R 上的增函数，$A(0,-1)$，$B(3,1)$ 是图象上的两个点，那么 $|f(x+1)|<1$ 的解集的补集是　(D)

A. $(3,\infty)$　　　　B. $([2,+\infty])$

C. $(-1,2)$　　　　D. $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty]$

解　利用 $0<x+1<3$ 得到原不等式的解集是 $(-1,2)$，所以应选 D.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，且 $a_{n+1}=a_n^2-(3n-1)a_n+3$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 11 项的和 $S_{11}=$　(A)

A. 198　　B. 55　　C. 204　　D. 188

解　代入 $a_1=3$ 得 $a_2=6$，代入 $a_n=3n$ 得 $a_{n+1}=3(n+1)$，所以选 A.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，把答案填在题中的横线上.

1. 已知 O 是三角形 ABC 内一点，且满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 是三角形 ABC 的__垂心__.

解　由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 可以得到 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=O$ 所以点 O 在 AB 边上的高线上. 同理可证点 O 也在其他边上的高线上. 所以点 O 是三角形 ABC 的垂心.

2. 若圆锥曲线 $\frac{x^2}{k-2}+\frac{y^2}{k+5}=1$ 的焦距与实数 k 无关，则它焦点的坐标是__$(0,\pm\sqrt{7})$__.

解　因为 $(k+5)-(k-2)=7$ 为定值，所以它表示焦点在 y 轴上的椭圆. 且 $c=\sqrt{7}$. 所以它的焦点坐标应该是 $(0,\pm\sqrt{7})$.

3. 设点 $A(1,1,0)$，$B(1,0,1)$，$C(0,1,1)$ 则三角形 ABC 的形状为__等边三角形__.

解　容易证明：$|AB|=|BC|=|CA|$ 所以是等边三角形.

4. 直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=2$，$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 有公共点，则 θ 的取值范围是__$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$__.

解　因为 $2^2=(x\cos\theta+y\sin\theta)^2=\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}\cos\theta+\frac{y}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\sin\theta\right)^2\leqslant\left(\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}\right)\times(6\cos^2\theta+2\sin^2\theta)$

所以$(6\cos^2\theta+2\sin^2\theta)\geqslant 4$，即$\cos^2\theta\geqslant\frac{1}{2}$，故$\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

5. 过半径为 5 的球面上的一点 P 作三条两两垂直的弦 PA，PB，PC，且满足 $|PA|=2|PB|$，则 $|PA|+|PB|+|PC|$ 的最大值是__$2\sqrt{70}$__.

解　已知 $5a^2+b^2=100$，而$(|PA|+|PB|+|PC|)^2=(3a+b)^2=(\sqrt{5}a\times\frac{3}{\sqrt{5}}+b\times 1)^2\leqslant(5a^2+b^2)\cdot(\frac{9}{5}+1)=280$，则 $|PA|+|PB|+|PC|$ 的最大值是__$2\sqrt{70}$__.

6. 设 $a>b>0$，则 $a^3+\frac{12}{b(a-b)}$ 的最小值是__20__.

解　$a^3+\frac{12}{b(a-b)}\geqslant a^3+\frac{12}{\frac{(b+a-b)^2}{4}}=a^3+\frac{48}{a^2}=\frac{a^3}{2}+\frac{a^3}{2}+\frac{16}{a^2}+\frac{16}{a^2}+\frac{16}{a^2}\geqslant 20$.

三、(本题满分 20 分)

(1) 已知 $a+\log_2(2a+6)=11$，及 $b+2^{b-1}=14$，求 $a+b$ 的值.(2) 已知 $f(x)=\frac{2}{2^{x-2}+1}$，求 $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$ 的值.

解　(1) 设 $t=\log_2(2a+6)$，则有 $t+2^{t-1}=14$，又因为函数 $f(x)=x+2^{x-1}$ 是 R 上的增函数，所以 $b=t$，故 $a+t=11$ 就是 $a+b=11$. …… 10 分

(2) 由于 $f(x)+f(4-x)=\frac{2}{2^{x-2}+1}+\frac{2}{2^{2-x}+1}=\frac{2(2^{x-2}+1)}{2^{x-2}+1}=2$. 所以 $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=7$. …………………… 10 分

四、(本题满分 20 分)

如图 1，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AD=2$，点 M，N 分别在棱 PD，PC 上，且 $PC\perp$ 平面 AMN.

(Ⅰ) 求证：$AM\perp PD$；(Ⅱ) 求二面角 $P-AM-N$ 的大小；(Ⅲ) 求直线 CD 与平面 AMN 所成角的大小.

(Ⅰ) 证明　因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $CD\perp AD$.

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

因为 $AM\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AM$.

因为 $PC\perp$ 平面 AMN，所以 $PC\perp AM$，所以 $AM\perp$ 平面 PCD，所以 $AM\perp PD$. ………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ) 证明　因为 $AM\perp$ 平面 PCD(已证)，所以 $AM\perp PM$，$AM\perp NM$.

所以 $\angle PMN$ 为二面角 $P-AM-N$ 的平面角，因为 $PN\perp$ 平面 AMN，所以

$PN \perp NM$.

在直角$\triangle PCD$中，$CD=2$，$PD=2\sqrt{2}$，所以$PC=2\sqrt{3}$.

因为$PA=AD$，$AM\perp PD$，所以M为PD的中点，$PM=\frac{1}{2}PD=\sqrt{2}$.

由$\mathrm{Rt}\triangle PMN \backsim \mathrm{Rt}\triangle PCD$，得$\frac{MN}{CD}=\frac{PM}{PC}$，所以$MN=\frac{CD\cdot PM}{PC}$.

所以$\cos\angle PMN=\frac{MN}{PM}=\frac{CD}{PC}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\angle PMN=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.
…………………………………………………………………………10分

即二面角$P-AM-N$的大小为$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅲ）解　延长NM，CD交于点E.

因为$PC\perp$平面AMN，所以NE为CE在平面AMN内的射影. 所以$\angle CEN$为CD（即CE）与平面AMN所成的角. ……………………15分

因为$CD\perp PD$，$EN\perp PN$，所以$\angle CEN=\angle MPN$.

在$\mathrm{Rt}\triangle PMN$中，$\sin\angle MPN=\frac{MN}{PM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\angle MPN\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\angle MPN=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以CD与平面AMN所成的角的大小为$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………20分

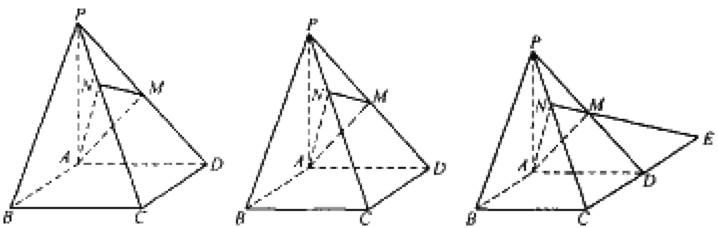


图1

五、（本题满分20分）

在平面直角坐标系中，长度为6的线段PQ的一个端点P在射线$y=0(x\leqslant 0)$上滑动，另一端点Q在射线$x=0(y\leqslant 0)$上滑动，点M在线段PQ上，且$\frac{PM}{MQ}=\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求点M的轨迹方程；（Ⅱ）若点M的轨迹与x轴、y轴分别交于点A，B，

求四边形 $OAMB$ 面积的最大值(其中 O 是坐标原点).

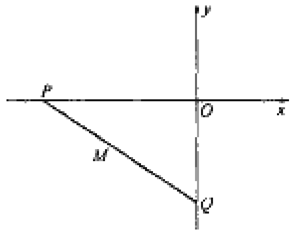


图 2

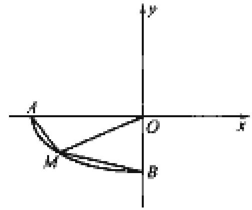


图 3

(Ⅰ)解　设点 P,Q,M 的坐标分别是 $P(x_1,0),Q(0,y_1),M(x,y)$,其中 $x_1\leqslant 0,y_1\leqslant 0$.

依条件可得

$$x_1^2+y_1^2=36 \tag{1}$$

又依 $\lambda=\frac{PM}{MQ}=\frac{1}{2}$,得

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1}{1+\frac{1}{2}}\\ y=\dfrac{\frac{1}{2}y_1}{1+\frac{1}{2}}\end{cases}$$ ………………………………… 5 分

将 $\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x\\ y_1=3y\end{cases}$ 代入式(1),得

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(x,y\leqslant 0)$$

即点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(x\leqslant 0,y\leqslant 0)$. ……………………………… 10 分

(Ⅱ)解　设 M 点的坐标是 $(4\cos\alpha,2\sin\alpha)$,其中 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$,依条件 $\begin{cases}4\cos\alpha<0\\ 2\sin\alpha<0\end{cases}$ 得

$$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$$

$$S_{四边形OAMB}=S_{\triangle OAM}+S_{\triangle OBM}$$ ……………………… 15 分

而 $$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|y_M|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot|2\sin\alpha|=-4\sin\alpha$$

$$S_{\triangle OBM}=\frac{1}{2}|OB|\cdot|x_M|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|4\cos\alpha|=-4\cos\alpha$$

所以 $$S_{四边形OAMB}=-4(\sin\alpha+\cos\alpha)=-4\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 4\sqrt{2}$$

仅当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，四边形 $OAMB$ 的面积有最大值 $4\sqrt{2}$. … 20 分

六、(本题满分 20 分)

如图 4，设 $P_1(1,\sqrt{3})$，$P_2(4,2\sqrt{3})$，…，$P_n(x_n,y_n)(0<y_1<y_2<\cdots<y_n)$，是曲线 $C:y^2=3x(y\geqslant 0)$ 上的 n 个点. 点 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 x 轴的正半轴上，满足三角形 $A_{i-1}A_iP_i$ 是正三角形.（$i=1,2,\cdots,n$，A_0 是坐标原点）.(1) 求出点 $A_n(a_n,0)$ 的横坐标 a_n 关于 n 的表达式. (2) 试求出 $\left[\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt[4]{a_1}}+\frac{1}{\sqrt[4]{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{a_{2\,005}}}\right]$（表示这个数的整数部分）.

（取 $\sqrt{c}=44.78$，当 $2\,005<c<2\,005.6$ 时，$\sqrt{2}=1.4$，$\sqrt{c}=44.785$，当 $2\,006<c<2\,006.5$ 时）

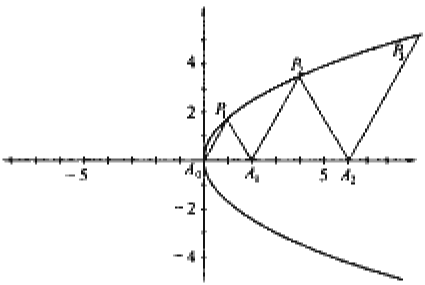


图 4

解 设点 $A_n(a_n,0)$ 利用图象可以求出：点 P_n 的横坐标等于点 A_{n-1} 和点 A_n 的横坐标的等差中项. 即 $x_n=\frac{a_{n-1}+a_n}{2}$，所以点 P_n 的纵坐标 $y_n=\sqrt{3\left(\frac{a_{n-1}+a_n}{2}\right)}$，同时 $y_n=\frac{\sqrt{3}}{2}|A_{i-1}-A_i|=\frac{\sqrt{3}}{2}(a_n-a_{n-1})$，故 $\sqrt{3\left(\frac{a_{n-1}+a_n}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a_n-a_{n-1})$.

所以 $(a_n-a_{n-1})=\sqrt{2(a_n+a_{n-1})}$，所以 $a_n^2-2a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2=2(a_n+$

$a_{n-1})$.

同理可得 $a_{n+1}^2 - 2a_na_{n+1} + a_n^2 = 2(a_{n+1} + a_n)$.

两式相减得$(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n - 2) = 0$.

所以 $a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n - 2 = 0$,所以$(a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1}) = 2$.

所以数列$\{a_{n+1} - a_n\}$是等差数列.所以 $a_n - a_{n-1} = (a_1 - a_0) + (n-1) \times 2 = 2n$.

从而利用叠加可以求出:$a_n = n(n+1)$.

(2) 证明:因为

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a_k}} = \frac{1}{\sqrt[4]{k(k+1)}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}+\sqrt{k-\frac{1}{2}}} = 2\left(\sqrt{k+\frac{1}{2}}-\sqrt{k-\frac{1}{2}}\right)$$

及
$$\frac{1}{\sqrt[4]{a_k}} = \frac{1}{\sqrt[4]{k(k+1)}} > \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}} > \frac{2}{\sqrt{k+\frac{9}{8}}+\sqrt{k+\frac{1}{8}}} = 2\left(\sqrt{k+\frac{9}{8}}-\sqrt{k+\frac{1}{8}}\right)$$

所以
$$\frac{1}{\sqrt[4]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{a_{2\,005}}} < 2\sqrt{2\,005.5} - \sqrt{2} < 88.2$$

及
$$\frac{1}{\sqrt[4]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{a_{2\,005}}} > 2\sqrt{2\,006\frac{1}{8}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} > 87.3$$

所以
$$\left[\frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt[4]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{a_{2\,005}}}\right] = 88$$

> At any rate, in my opinion, one of the principal aims of the high school mathematics curriculum is to develop the students' ability to solve problems.
>
> ——波利亚

后　　记

2005年12月6日，在庆祝中国科学院力学所建所50周年暨钱学森回国50周年大会上，张新宇在发言中讲了一则钱学森的小事。他说："钱先生在解决薄壳变形的难题时，初稿长达800多页。当这个问题彻底解决之后，他在装了浓缩成几页手稿的信封上写上'final'，意思是终稿，但即刻认识到，在科学认识上没有什么是最终的，于是他又紧接着改成了'Nothing is final!!!'。"

《数学奥林匹克与数学文化》(第一辑)终于付印了，这只是一个起点，所以我们借用钱老的"Nothing is final"以自勉。

2006年3月19日，中央电视台采访了惟一的一位获得菲尔兹奖的华人数学家、哈佛大学数学系丘成桐教授，丘成桐先生指出：数学奥林匹克问题都是别人提出并且别人已经解决的题目，要学会自己找出题目，并且重要的不是同别人竞赛而是要同自然界的奥秘之争。

我们是不是可以这样去理解，对于数学奥林匹克选手来说，题目和怎样解题目不是最重要的，而通过这些题目来认识现代数学，为将来能在数学主流中找到自己感兴趣的问题才是最重要的。这正是我们创办这本文集的初衷所在，也是在这样一本初等文集中充斥了大量的高等数学的原因所在，这同时又使我们深感力所不逮，期盼更多大家、名家赐稿共同为数学的普及鼓与呼。

著名数学家、曾任北京大学校长的丁石孙先生曾说过："一个好的数学教师不仅要知道该教给学生什么，更为重要的是要知道不该教给学生什么，以免超过学生的理解力。"从这点来说这本文集是严重犯规了，因为它的大多数内容是严重超标的，幸好我们将其读者定位于数学奥林匹克教练员及研究人员，同时也不排除有个别超常选手感兴趣，在今天这样一种一切市场化的氛围中，本刊能否得到读者及市场认同，我们只有抱着谋事在人，成事在天的超然态度了。

那么为什么要在数学奥林匹克文集中加上数学文化的内容，特别是数学史？

李迪教授在《中外数学史教程》中指出：……然而不能忽视，现实生活中却有这样的例子，有人以百折不挠的精神，企图用尺规解决三等分角的诸问题，有

人历尽艰辛，其成果只是重复了前人的工作；更有甚者，煞费苦心幻想推翻一种基本的数学理论（例如实数理论），用其他什么东西来代替它。至于梦寐以求地力图用初等方法解决诸如费马大定理、哥德巴赫猜想等世界名题的攻关者更是屡见不鲜。所有这些人的致命的弱点是不懂历史，愚蠢地把时间和精力白白浪费掉了。仅此一端，就足以提醒我们，搞数学如果不重视它的历史，将付出沉重代价而被淘汰。因此可以说，谁蔑视历史，谁就被历史蔑视。

如果把本辑比做图书海洋中的一条小鱼，那我想它一定要是鲨鱼。因为一般的鱼都能自由地上浮和下潜，这主要是靠鱼鳔。当鱼想上浮时，鱼鳔充满气体；当鱼想下潜时，便放出鱼鳔中的气体，使自己的浮力变小。这便是潜水艇的仿生原理。然而鲨鱼却没有鱼鳔。于是，它只能靠不停地游动来保证身体不至于沉入水底。也正是靠不停地游动，保持了强健的体魄，成了鱼类中的强者，所向无敌。

我们这本文集恰似一条无鳔的鱼被扔入了大海，只有靠自身的不断发展由小到大，由弱变强，使我们充满危机感与紧迫感，也期盼得到各界的支持与帮助。

钱钟书先生在谈到作家对命运的态度时曾写过这样几句：知命乐生，不齿虚名，不易操守，不计利钝，不为趋避（陆文虎编．钱钟书研究采辑——生活·读书·新知．上海：三联书店，1992：23．）．我们愿以此共勉。

最后向邹大伟先生表示衷心的感谢。

刘培杰

2006 年 5 月

The problem solver may do creative work even if he does not succeed in solving his own problem; his effort may lead him to means applicable to other problems. Then the problem solver may be creative indirectly be leaving a good unsolved problem which eventually leads others to discovering fertile means.

——波利亚